

# 上海市张江集团中学 2025-2026 学年第二学期

## 八年级 5 月阶段练习 · 数学试卷

时间：100 分钟，满分：100 分

### 一、选择题（每题 3 分）

1. 从多边形的一个顶点引出的所有对角线，把这个多边形分成 2026 个三角形，则这个多边形的边数是（ ）

A. 2027

B. 2028

C. 2029

D. 2030

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查多边形的对角线与三角形个数的关系，解题关键是记住“从  $n$  边形一个顶点引对角线，可将其分成  $(n-2)$  个三角形”这一核心结论。

1. 利用结论：三角形个数=边数-2；

2. 代入已知三角形个数 2026，列方程：边数-2=2026；

3. 解得边数=2028.

【详解】解：从  $n$  边形的一个顶点出发，可引出  $(n-3)$  条对角线，把多边形分成  $(n-2)$  个三角形。

已知分成 2026 个三角形，则：

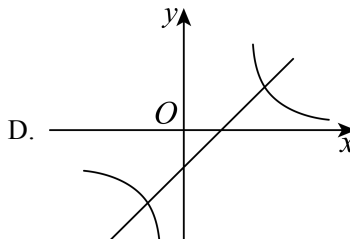
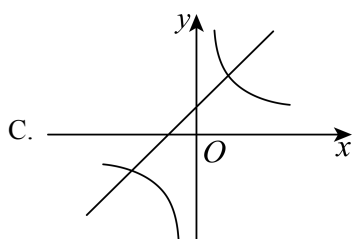
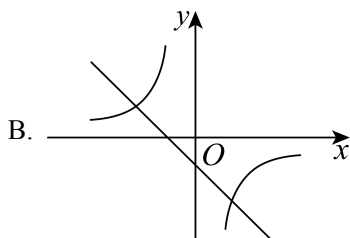
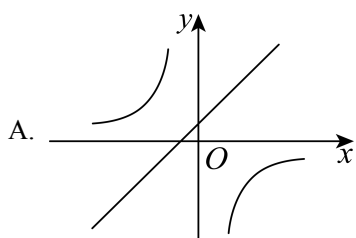
$$n-2=2026$$

解得：

$$n=2028$$

所以这个多边形的边数是 2028. 故选：B.

2. 函数  $y = \frac{k}{x}$  和  $y = k(x-1)$  ( $k > 0$ ) 在同一直角坐标系中的大致图像是（ ）



【答案】D

【解析】

本卷由「微信小程序：指尖试卷」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】本题主要考查了反比例函数和一次函数的图象性质，熟练掌握反比例函数（ $k$ 的符号对应图象所在象限）、一次函数（系数对增减性和与坐标轴交点的影响）的图象特征是解题的关键.

根据 $k > 0$ ，分别分析反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的象限分布，以及一次函数 $y = k(x-1)$ 的增减性和与坐标轴的交点，再匹配选项即可.

【详解】解： $\because k > 0$ ,

$\therefore$  反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象位于第一、三象限,

$\because k > 0$ ，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ ,

$\therefore$  一次函数中， $y$ 随 $x$ 的增大而增大（图象从左到右上升），

令 $x = 0$ ，得 $y = -k$ ,

$\because k > 0$ ,

$\therefore$  一次函数与 $y$ 轴的交点为 $(0, -k)$ ，位于 $y$ 轴负半轴，

结合选项，只有D符合上述特征.

故选：D.

3. 已知三点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ， $P_3(1, -2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，若 $x_1 < 0 < x_2$ ，则下列式子正确的是（ ）

A.  $y_1 < y_2 < 0$

B.  $y_1 < 0 < y_2$

C.  $y_1 > y_2 > 0$

D.  $y_1 > 0 > y_2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

先求出反比例函数解析式，再根据反比例函数的性质求解即可.

【详解】解： $\because$ 点 $P_3(1, -2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\therefore -2 = \frac{k}{1},$$

解得 $k = -2$ ,

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{-2}{x},$$

$\because$ 点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  都在反比例函数  $y = \frac{-2}{x}$  的图象上,  $x_1 < 0 < x_2$ ,

$\therefore y_1 > 0 > y_2$ ,

故选: D.

4. 下列命题, 是真命题的是 ( )

A. 对角线互相垂直的四边形是菱形

B. 对角线相等的四边形是矩形

C. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

D. 对角线相等的菱形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据菱形、矩形、正方形的判定定理逐一判断命题真假即可.

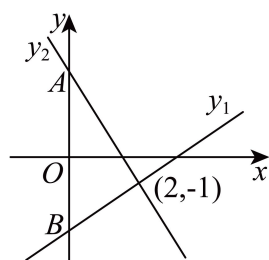
【详解】解: A、 $\because$  对角线互相垂直的平行四边形才是菱形, 仅对角线互相垂直的四边形不一定是菱形,  $\therefore$  A 是假命题.

B、 $\because$  对角线相等的平行四边形才是矩形, 仅对角线相等的四边形不一定是矩形, 例如等腰梯形对角线相等但不是矩形,  $\therefore$  B 是假命题.

C、 $\because$  对角线互相垂直平分且相等的四边形才是正方形, 仅对角线互相垂直平分的四边形是菱形,  $\therefore$  C 是假命题.

D、 $\because$  菱形的对角线互相垂直平分, 若对角线相等, 则该四边形既是菱形又是矩形, 满足正方形的判定条件,  $\therefore$  对角线相等的菱形是正方形, D 是真命题.

5. 一次函数  $y_1 = k_1x + b$  与  $y_2 = k_2x - b$  分别与  $y$  轴交于点  $A$ 、 $B$ , 交点为  $(2, -1)$ , 在同一坐标系中图像如图所示, 下列说法错误的是 ( ).



A.  $b < 0$

B. 点  $A$ 、 $B$  关于  $x$  轴对称

C.  $k_1 < 0 < k_2$

D. 当  $x > 2$  时,  $y_1 > y_2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的性质、一次函数与不等式等知识点, 掌握数形结合思想是解题的关键.

根据一次函数的性质以及数形结合思想逐项判断即可.

【详解】解：A. 由一次函数  $y_1 = k_1x + b$  与  $y$  轴的交点在  $y$  轴的负半轴，即  $b < 0$ ，故 A 选项正确，不符合题意；

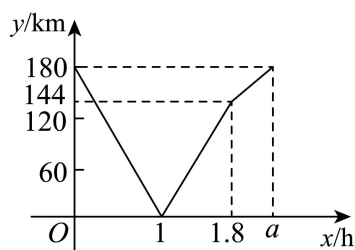
B. 由题意可得  $A(0, b), B(0, -b)$ ，即点  $A, B$  关于  $x$  轴对称，故 B 选项正确，不符合题意；

C. 由一次函数  $y_1 = k_1x + b$ ， $y$  随  $x$  增大而增大，即  $k_1 > 0$ ；由一次函数  $y_2 = k_2x - b$ ， $y$  随  $x$  增大而减小，即  $k_2 < 0$ ；则  $k_2 < 0 < k_1$ ，故 C 选项错误，符合题意；

D. 由函数图像可得：当  $x > 2$  时，一次函数  $y_1 = k_1x + b$  的图像在  $y_2 = k_2x - b$  上方，即  $y_1 > y_2$ ，故 D 选项正确，不符合题意.

故选 C.

6. 一辆货车从  $A$  地去往  $B$  地，一辆轿车从  $B$  地去往  $A$  地，同时出发，匀速行驶，各自到达终点后停止运动，轿车的速度大于货车的速度. 两辆车之间的距离  $y$  (单位：km) 与货车行驶的时间  $x$  (单位：h) 之间的函数关系如图所示. 下列说法正确的是 ( )



- A. 货车行驶 1h 到达  $B$  地
- B. 货车的速度是 100km/h
- C. 轿车比货车早 27min 到达目的地
- D. 货车行驶 10min 或 2h，两车相距 150km

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了函数图象在实际行程问题中的运用，正确读取函数图象上的信息，结合题意进行分析是解题的关键. 根据题意和函数图象中的数据，可以逐一判断各个小题中的结论是否成立，从而可以求解.

【详解】解：A、根据函数图象可知，货车行驶 1h 与轿车相遇，未到达  $B$  地，故该选项错误，不符合题意；

B、 $\because$  轿车用了 1.8h 从  $B$  地到达了  $A$  地，两地相距 180km，

$\therefore$  轿车的速度为：  $180 \div 1.8 = 100$  (km/h)，

$\therefore$  两车相遇时间为 1h，

∴ 货车的速度为：  $180 \div 1 - 100 = 80 (\text{km/h})$ ，故该选项说法错误，不符合题意；

C、∵ 货车速度为  $80 \text{km/h}$ ，

又∵  $180 \div 80 = 2.25 (\text{h})$ ，

∴ 货车到达目的地用时  $2.25 \text{h}$ ，

轿车到达目的地用时  $1.8 \text{h}$ ，

$2.25 - 1.8 = 0.45 (\text{h})$ ，

$0.45 \times 60 = 27 (\text{min})$ ，

即轿车比货车早  $27 \text{min}$  到达目的地，故该选项说法正确，符合题意；

D、相遇前两车相距  $150 \text{km}$  时，货车行驶的时间是：

$(180 - 150) \div (100 + 80) = \frac{1}{6} (\text{h})$ ，

$\frac{1}{6} \text{h} = 10 \text{min}$ ，

根据图象可得：当相遇后两车相距  $144 \text{km}$  时，轿车到达目的地，

∴ 两车相遇后两车相距  $150 \text{km}$  时，货车行驶的时间是：

$150 \div 80 = \frac{15}{8} (\text{h})$ ，故该选项说法错误，不符合题意。

故选：C。

## 二、填空题（每题 2 分）

7. 在直角坐标系中，已知点  $A (0, 2)$ ， $B (1, 3)$ ，则线段  $AB$  的长度是\_\_\_\_\_。

【答案】  $\sqrt{2}$

【解析】

【详解】 试题分析：在平面直角坐标系中有两点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ ，则两点之间的距离为：

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，则根据公式可得： $AB = \sqrt{(0 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2}$ 。

8. 函数  $y = \frac{\sqrt{4-x}}{x-2}$  中，自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

【答案】  $x \leq 4$  且  $x \neq 2$

【解析】

本卷由「微信小程序：指尖试卷」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】 根据被开方数是非负数、分母不能为零，可得答案。

【详解】解：由  $y = \frac{\sqrt{4-x}}{x-2}$ ，得  $4-x \geq 0$  且  $x-2 \neq 0$ .

解得  $x \leq 4$  且  $x \neq 2$ .

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围，利用被开方数是非负数、分母不能为零得出  $4-x \geq 0$  且  $x-2 \neq 0$  是解题关键.

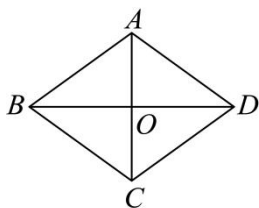
9. 已知菱形边长是 5cm，若一条对角线长 8cm，则另一条对角线长为 \_\_\_\_\_ cm.

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，勾股定理，根据菱形的性质得到  $\angle AOB = 90^\circ$ ， $BO = 4\text{cm}$ ，再根据勾股定理即可求解，掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解：如图：



在菱形  $ABCD$  中， $AB = 5\text{cm}$ ， $BD = 8\text{cm}$ ，

$\therefore$  对角线互相垂直平分，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ， $BO = 4\text{cm}$ ，

在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中， $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$ ，

$\therefore AC = 2AO = 6\text{cm}$ ，

故答案为：6.

10. 将直线  $y = 2x - 1$  向上平移 4 个单位，得到直线 \_\_\_\_\_.

【答案】 $y = 2x + 3$

【解析】

【分析】根据平移  $k$  不变， $b$  值加减即可得出答案.

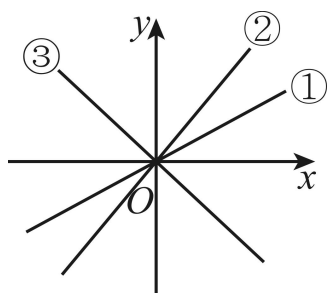
【详解】平移后解析式为： $y = 2x - 1 + 4 = 2x + 3$ ，

故答案为  $y = 2x + 3$

【点睛】此题考查一次函数图象与几何变换，解题关键在于掌握平移的性质

11. 如图，三个函数图象分别对应的表达式是：①  $y_1 = ax$ ；②  $y_2 = bx$ ；③  $y_3 = cx$ . 则  $a$ ， $b$ ， $c$  的大小

关系是\_\_\_\_\_。(用“<”号连接)



【答案】  $c < a < b$

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是正比例函数图象与性质，解题关键是熟练掌握正比例函数的图象特征.

正比例函数图象过第一、三象限时  $k > 0$ ，过第二、四象限时  $k < 0$ ；直线越靠近  $y$  轴， $|k|$  越大，先判断  $a$ ， $b$ ， $c$  的正负，再比较绝对值大小，最终确定三者的大小关系.

【详解】 解：∵ 正比例函数  $y = kx$  的图象特征为：

图象过第一、三象限时  $k > 0$ ，过第二、四象限时  $k < 0$ ；直线越靠近  $y$  轴， $|k|$  越大，

∴ 由图象可知：①②过第一、三象限，故  $a > 0$ ， $b > 0$ ，

③过第二、四象限，故  $c < 0$ ，

②比①更靠近  $y$  轴，故  $b > a > 0$ ，

综上， $b > a > 0 > c$  .

故答案为：  $c < a < b$  .

12. 一次函数  $y = 3x + b$  的图象不经过第二象限，则  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $b \leq 0$

【解析】

【分析】 根据一次函数的图象与系数的关系，已知一次函数  $y = 3x + b$  的一次项系数为 3，大于 0，直线必过第一、三象限，图象不经过第二象限，可得到  $b$  的取值范围.

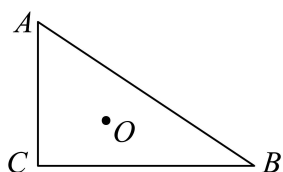
【详解】 解：∵ 一次函数  $y = 3x + b$  中，一次项系数为  $3 > 0$ ，

∴ 一次函数图象一定经过第一、三象限.

∵ 一次函数图象不经过第二象限，

∴  $b \leq 0$  .

13. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心，如果  $AB = 10$ ，那么点  $C$  与点  $O$  的距离为\_\_\_\_\_ .



【答案】  $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了三角形重心的性质和直角三角形斜边的中线等于斜边的一半，连接  $CO$ ，延长  $CO$  交  $AB$  于  $D$ ，根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半求出  $CD$ ，再利用重心的性质求  $OC$ 。

【详解】解：连接  $CO$ ，延长  $CO$  交  $AB$  于  $D$ ，

$\because$  点  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心，

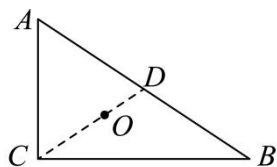
$\therefore D$  是  $AB$  的中点，  $OC = \frac{2}{3}CD$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，  $AB = 10$ ，

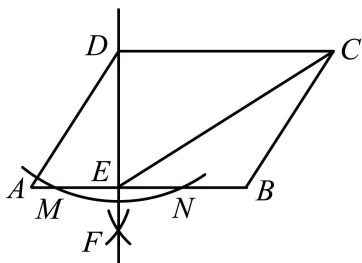
$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 5$ ，

$\therefore OC = \frac{2}{3}CD = \frac{10}{3}$ ，

$\therefore$  点  $C$  与点  $O$  的距离为  $\frac{10}{3}$ 。



14. 如图，在平行四边形  $ABCD$  中， $AB = 8$ ，以点  $D$  为圆心作弧，交  $AB$  于点  $M$ 、 $N$ 。分别以点  $M$ 、 $N$  为圆心，大于  $\frac{1}{2}MN$  为半径作弧，两弧交于点  $F$ ，作直线  $DF$  交  $AB$  于点  $E$ ，若  $\angle BCE = \angle DCE$ ， $AD = 5$ ，则  $DE$  长是\_\_\_\_\_。



【答案】

4

【解析】

【分析】根据作图可知  $DE \perp AB$ ，根据平行四边形的性质结合已知条件推出  $BE = BC$ ，进而求出  $AE$  的长，勾股定理求出  $DE$  即可。

【详解】解：在  $\square ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AD = BC = 5$ ，

$$\therefore \angle DCE = \angle CEB,$$

$$\text{又} \because \angle BCE = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle BEC,$$

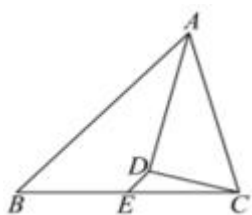
$$\therefore BE = BC = 5,$$

$$\therefore AE = AB - BE = 8 - 5 = 3,$$

由作图可知  $DE \perp AB$ ，即  $\angle AED = 90^\circ$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中， } DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

15. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB > AC$ ， $AD$  平分  $\angle BAC$ ， $CD \perp AD$ ，点  $E$  是  $BC$  的中点，若  $AB = 12$ ， $AC = 10$ ，则  $DE$  的长为\_\_\_\_\_.



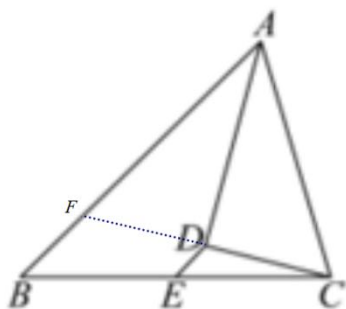
【答案】

1

【解析】

【分析】延长  $CD$  交  $AB$  于点  $F$ ，利用角平分线的定义和垂直的定义证明  $\triangle ADC \cong \triangle ADF$ ，根据全等三角形的性质得出  $AF = AC$ ， $CD = DF$ ，进而求出  $BF$  的长，最后利用三角形中位线定理求解  $DE$  的长。

【详解】解：如图，延长  $CD$  交  $AB$  于点  $F$ ，如图，



$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle FAD,$$

$$\because CD \perp AD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADF = 90^\circ,$$

在  $\triangle ADC$  和  $\triangle ADF$  中,

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle FAD \\ AD = AD \\ \angle ADC = \angle ADF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AC = AF = 10, \quad CD = DF,$$

$\therefore$  点  $D$  是  $CF$  的中点.,

$$\because AB = 12,$$

$$\therefore BF = AB - AF = 12 - 10 = 2.,$$

$\because$  点  $E$  是  $BC$  的中点, 点  $D$  是  $CF$  的中点,

$\therefore DE$  是  $\triangle BCF$  的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

16. 出租车收费按路程计算, 3 公里内 (包括 3 公里) 收费 12 元; 超过 3 公里每增加 1 公里加收 2 元, 当路程  $x \geq 3$  公里时, 车费  $y$  (元) 与  $x$  (公里) 之间的函数关系式是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $y = 2x + 6 (x \geq 3)$

**【解析】**

本卷由「微信小程序: 指尖试卷」整理制作, 小编微信: [Leier19941118](#)

**【分析】** 求出超出 3 公里的路程, 计算超出部分的收费, 加上 3 公里内的固定收费, 整理即可得到函数关系式.

**【详解】** 解: 当  $x \geq 3$  时, 超出 3 公里的路程为  $(x - 3)$  公里.

$\therefore$  超过 3 公里每增加 1 公里加收 2 元,

$\therefore$  超出部分的收费为  $2(x - 3)$  元.

$\therefore$  总车费  $y$  等于 3 公里内的固定收费加上超出部分收费,

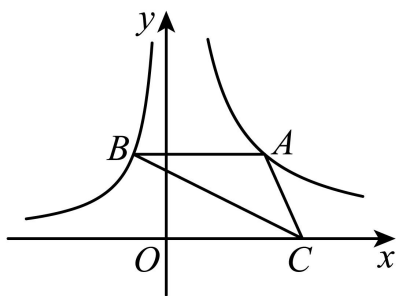
$$\therefore y = 12 + 2(x - 3)$$

$$= 12 + 2x - 6$$

$$= 2x + 6,$$

可知当路程  $x \geq 3$  公里时, 车费  $y$  (元) 与  $x$  (公里) 之间的函数关系式是  $y = 2x + 6 (x \geq 3)$ .

17. 如图, 点  $A$ ,  $B$  分别在反比例函数  $y_1 = \frac{12}{x} (x > 0)$ ,  $y_2 = -\frac{4}{x} (x < 0)$  的图象上, 且  $AB \parallel x$  轴, 点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上, 连接  $AC$ ,  $BC$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何综合, 根据  $A$  点坐标求出  $B$  点坐标是解题的关键. 设  $A$  点坐标为  $\left(m, \frac{12}{m}\right)$ , 由  $AB \parallel x$  轴可得  $B$  点的纵坐标为  $\frac{12}{m}$ , 则  $y_2 = \frac{12}{m} = -\frac{4}{x}$ , 于是可得  $x = -\frac{m}{3}$ , 即  $B$  点坐标为  $\left(-\frac{m}{3}, \frac{12}{m}\right)$ , 则  $AB = \frac{4m}{3}$ , 进而可得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A$ , 由此即可求出  $\triangle ABC$  的面积.

【详解】 解: 设  $A$  点坐标为  $\left(m, \frac{12}{m}\right)$ ,

$\because AB \parallel x$  轴,

$\therefore B$  点的纵坐标为  $\frac{12}{m}$ , 则:

$$y_2 = \frac{12}{m} = -\frac{4}{x},$$

$$\therefore x = -\frac{m}{3},$$

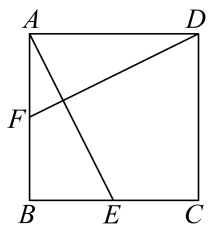
$$\therefore B \text{ 点坐标为 } \left(-\frac{m}{3}, \frac{12}{m}\right),$$

$$\therefore AB = m - \left(-\frac{m}{3}\right) = m + \frac{m}{3} = \frac{4m}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A = \frac{1}{2} \times \frac{4m}{3} \times \frac{12}{m} = 8,$$

故答案为: 8.

18. 如图, 正方形  $ABCD$  的边长为 6,  $E$  是  $BC$  的中点,  $DF \perp AE$ , 与  $AB$  交于点  $F$ , 则  $DF$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】  $3\sqrt{5}$

【解析】由正方形的性质得出  $\angle DAF = \angle B = 90^\circ$ ,  $BC = AB = AD = 6$ , 由  $E$  是  $BC$  的中点, 得出  $BE = 3$ , 由勾股定理得出  $AE = 3\sqrt{5}$ , 证明  $\triangle ADF \cong \triangle BAE$  (ASA), 即可得出答案.

【详解】解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle DAF = \angle B = 90^\circ, \quad BC = AB = AD = 6,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$\because E$  是  $BC$  的中点,

$$\therefore BE = 3,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\because DF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BAE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DF = AE = 3\sqrt{5}.$$

19. 某一次函数  $y = kx + b$  的自变量取值范围为  $1 \leq x \leq 2$  时, 函数值的取值范围为  $2 \leq y \leq 4$ , 那么一次函数的表达式为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = 2x$  或  $y = -2x + 6$

【解析】

【分析】根据一次函数的性质, 分  $k > 0$  和  $k < 0$  两种情况讨论, 利用待定系数法求解一次函数表达式即可.

【详解】解: ①当  $k > 0$  时, 一次函数  $y = kx + b$  中,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore$  函数图象经过点  $(1, 2)$  和  $(2, 4)$ ,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 2 \\ 2k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 2 \\ b = 0 \end{cases},$$

∴ 该一次函数的表达式为  $y = 2x$ ;

② 当  $k < 0$  时, 一次函数  $y = kx + b$  中,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

∴ 函数图象经过点  $(1, 4)$  和  $(2, 2)$ ,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 4 \\ 2k + b = 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases},$$

∴ 该一次函数的表达式为  $y = -2x + 6$ ,

综上所述, 该一次函数的表达式是  $y = 2x$  或  $y = -2x + 6$ .

20. 已知直线  $y_1 = -x$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}x + 2$ ,  $y_3 = \frac{2}{3}x + 3$ . 若无论  $x$  取何值,  $y$  总取  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  中的最大值, 则  $y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

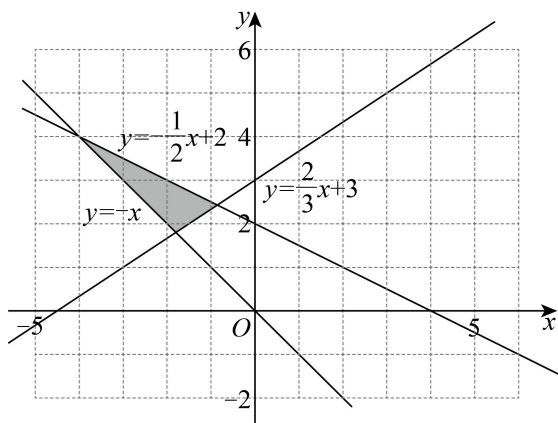
【答案】

$$\frac{17}{7}$$

【解析】

【分析】画出三个函数的公共部分, 最小值即求三个函数的公共部分的最小值.

【详解】解: 由题意, 画出三个函数的图象如下:



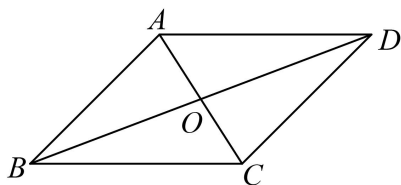
∴ 无论  $x$  取何值,  $y$  总取  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  中的最大值,

∴  $y$  的最小值是  $y_2 = -\frac{1}{2}x + 2$  和  $y_3 = \frac{2}{3}x + 3$  的交点的纵坐标,

$$\text{联立} \begin{cases} y_2 = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y_3 = \frac{2}{3}x + 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -\frac{6}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{cases},$$

$\therefore y$  的最小值为  $\frac{17}{7}$ .

21. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $BC = 7$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ . 将对角线  $AC$  绕点  $O$  顺时针旋转  $60^\circ$ , 点  $A$  落在点  $E$  处, 则线段  $CE$  的长等于\_\_\_\_\_.



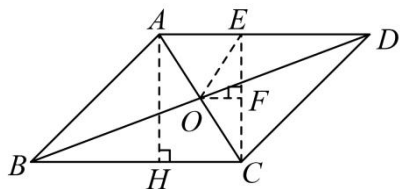
【答案】

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

【解析】

【分析】首先过点  $A$  作  $BC$  的垂线, 构造直角三角形, 勾股定理求出  $AC$  的长, 进而根据平行四边形的性质得到  $OA$ 、 $OC$  的长, 然后根据旋转的性质得到  $OE = OA$ ,  $\angle AOE = 60^\circ$ , 从而求出  $\angle COE$  的度数, 最后在等腰  $\triangle OCE$  中, 利用三线合一、直角三角形的性质和勾股定理求出  $CE$  的长;

【详解】解: 过点  $A$  作  $AH \perp BC$  于点  $H$ ,



在  $Rt\triangle ABH$  中,  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AB^2 = AH^2 + BH^2$ ,

$$\therefore AH = BH = 4,$$

$$\because BC = 7,$$

$$\therefore HC = BC - BH = 7 - 4 = 3,$$

在  $Rt\triangle AHC$  中, 由勾股定理得  $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2} AC = 2.5,$$

由旋转的性质可知,  $OE = OA = 2.5$ ,  $\angle AOE = 60^\circ$ ,

$$\therefore OC = OE,$$

$\because$  点  $A$ 、 $O$ 、 $C$  在同一直线上,

$$\therefore \angle COE = 180^\circ - \angle AOE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\because OC = OE,$$

$$\therefore \triangle OCE \text{ 是等腰三角形, } \angle OCE = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ,$$

过点  $O$  作  $OF \perp CE$  于点  $F$ ,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OC = \frac{5}{4}, \quad CF = EF,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OCF \text{ 中, } CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore CE = 2CF = 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

22. 小明在探究事物的变化过程时发现, 在某个变化过程中也可能有三个变量, 参考本学期学习函数的经验, 小明将这三个变量设为  $x$ 、 $y$  和  $z$ , 如果在变量  $x$  和  $y$  的允许取值范围内, 变量  $z$  随着  $x$  和  $y$  的变化而变化, 它们之间存在确定的依赖关系, 小明就将变量  $z$  叫做变量  $x$  和  $y$  的二元函数, 例如, 小明认为  $x$ 、 $y$  两数的积  $z$ , 就是  $x$  和  $y$  的二元函数. 同样为了继续研究二元函数, 小明把语句“ $z$  是  $x$  和  $y$  的二元函数”用记号  $z = f(x, y)$  来表示. 现在, 小明在研究过程中发现了一个二元函数  $f(x, y)$ , 满足特征  $f(x, x) = 0$ ,

$$f(x, f(y, z)) = f(x, z) - y, \text{ 那么 } f(2025, 2024) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**【答案】**  $-1$

**【解析】**

本卷由「微信小程序：指尖试卷」整理制作，小编微信：[Leier19941118](#)

**【分析】** 本题考查了函数的性质，解题的关键是理解题意，利用二元函数的特征性质，通过代入特殊值推导出结果.

$$\text{【详解】解: } \because f(x, x) = 0,$$

$$\therefore f(2024, 2024) = 0,$$

$$\because f(x, f(y, z)) = f(x, z) - y, \text{ 令 } y = 2024, \quad z = 2024,$$

$$\therefore f(2025, f(2024, 2024)) = f(2025, 2024) - 2024,$$

$$\text{即 } f(2025, 0) = f(2025, 2024) - 2024;$$

$$\because f(x, f(y, z)) = f(x, z) - y, \text{ 令 } z = y = x,$$

$$\therefore f(x, f(x, x)) = f(x, 0) = -x,$$

$\therefore f(2025, 0) = -2025$ , 代入得  $-2025 = f(2025, 2024) - 2024$ ,

解得  $f(2025, 2024) = -1$ .

故答案为:  $-1$ .

### 三、解答题 (第 23、24 题每题 8 分, 第 25 题 10 分, 第 26, 27 题各 12 分)

23. 已知  $y = y_1 - 2y_2$ , 其中  $y_1$  与  $x$  成反比例,  $y_2$  与  $x+1$  成正比例, 且当  $x=1$  时,  $y=3$ ; 当  $x=2$  时,

$$y = -\frac{5}{2}$$

(1) 求  $y$  关于  $x$  的函数表达式;

(2) 若点  $(3, m)$  在这个函数图像上, 求  $m$  的值

【答案】(1)  $y = \frac{7}{x} - 2x - 2$

(2)  $-\frac{17}{3}$

【解析】

【分析】(1)  $y_1$  与  $x$  成反比例, 可设  $y_1 = \frac{k_1}{x}$ ,  $y_2$  与  $x+1$  成正比例, 可把  $x+1$  看成一个整体, 设  $y_2 = k_2(x+1)$ ,

利用待定系数法即可求解;

(2) 把  $x=3$  代入解析式解答即可.

【小问 1 详解】

解: 设  $y_1 = \frac{k_1}{x}$ ,  $y_2 = k_2(x+1)$ , 则  $y = \frac{k_1}{x} - 2k_2(x+1)$ ,

当  $x=1$  时,  $y=3$ ; 当  $x=2$  时,  $y = -\frac{5}{2}$

$$\text{可得} \begin{cases} 3 = k_1 - 4k_2 \\ -\frac{5}{2} = \frac{k_1}{2} - 6k_2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

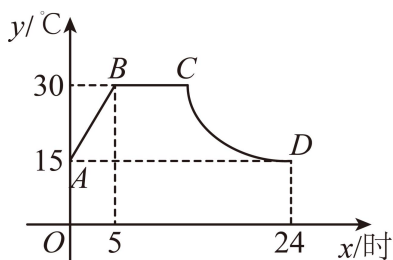
$$\therefore y = \frac{7}{x} - 2(x+1) = \frac{7}{x} - 2x - 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } m = \frac{7}{3} - 2 \times 3 - 2 = -\frac{17}{3}$$

24. 生物实践小组搜集了某种植园温室大棚智能控制系统测试阶段  $0 \sim 24$  时的温度变化, 并绘制出大棚内

的温度  $y(^{\circ}\text{C})$  随时间  $x$  (时) 变化的图象, 如图所示, 点  $A$  表示智能控制系统在 0 时启动, 此时大棚内的温度为  $15^{\circ}\text{C}$ , 线段  $AB$  表示升温阶段, 线段  $BC$  表示恒温阶段, 双曲线的一部分  $CD$  表示恒温系统关闭阶段, 点  $D$  表示 24 时温度降到  $15^{\circ}\text{C}$ .



- (1) 线段  $AB$  的函数解析式和定义域为\_\_\_\_\_;
- (2) 双曲线  $CD$  段的函数解析式和定义域为\_\_\_\_\_;
- (3) 求该大棚在  $0 \sim 24$  时内, 温度不低于  $24^{\circ}\text{C}$  的时长是\_\_\_\_\_;
- (4) 此地日出时间为  $7:00$ , 日落时间为  $17:00$ , 为保证该大棚中的植物至少有 9 小时的光照且在此期间大棚温度不低于  $24^{\circ}\text{C}$ , 小组同学决定推迟智能控制系统的启动时间, 至少推迟\_\_\_\_\_小时, 能满足上述要求.

**【答案】** (1) 线段  $AB$  的函数解析式为  $y = 3x + 15$ , 定义域为  $0 \leq x \leq 5$ ;

(2) 双曲线  $CD$  段的函数解析式为  $y = \frac{360}{x}$ , 定义域为  $12 \leq x \leq 24$ ; (3) 12

(4) 1

**【解析】**

**【分析】** (1) 将点  $A(0, 15)$  与  $B(5, 30)$  代入函数解析式, 由待定系数法求解即可;

(2) 设出双曲线  $CD$  段的函数解析式, 再将点  $(24, 15)$  代入函数解析式求解即可;

(3) 分别求解出升温阶段与恒温系统关闭阶段, 温度为  $24^{\circ}\text{C}$  的时间, 再计算时常即可;

(4) 求出现在符合光照和温度的时间, 进而根据要求即可解答.

**【小问 1 详解】**

解: 设线段  $AB$  的函数解析式为  $y = kx + b (k \neq 0)$ ,

$\because$  点  $A(0, 15)$  与  $B(5, 30)$  在线段  $AB$  上,

$$\therefore \begin{cases} 15 = b \\ 30 = 5k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 3 \\ b = 15 \end{cases},$$

$\therefore$  线段  $AB$  的函数解析式为  $y = 3x + 15$ , 定义域为  $0 \leq x \leq 5$ ;

故答案为:  $y = 3x + 15$ ,  $0 \leq x \leq 5$ ;

【小问 2 详解】

解: 双曲线  $CD$  段的函数解析式为  $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ ,

$\because$  点  $D(24, 15)$  在双曲线  $CD$  上,

$$\therefore 15 = \frac{m}{24}, \text{ 解得 } m = 360,$$

$$\therefore \text{双曲线 } CD \text{ 段的函数解析式为 } y = \frac{360}{x},$$

$$\therefore \text{当 } y = 30 \text{ 时, 可得 } 30 = \frac{360}{x}, \text{ 解得 } x = 12,$$

$$\therefore \text{定义域为 } 12 \leq x \leq 24;$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{360}{x}, 12 \leq x \leq 24;$$

【小问 3 详解】

解:  $\because$  线段  $AB$  的函数解析式为  $y = 3x + 15$ ,

$$\text{令 } y = 24, \text{ 可得 } 24 = 3x + 15, \text{ 解得 } x = 3,$$

$$\text{又 } \because \text{双曲线 } CD \text{ 段的函数解析式为 } y = \frac{360}{x},$$

$$\text{令 } y = 24, \text{ 可得 } 24 = \frac{360}{x}, \text{ 解得 } x = 15,$$

$\therefore$  从 3 时开始到 15 时, 温度不低于  $24^\circ\text{C}$ , 即时长为  $15 - 3 = 12$  时;

故答案为: 12;

【小问 4 详解】

解: 由题意, 日照时间为  $7:00 - 17:00$ , 共 10 小时,

需保证植物至少有 9 小时的光照且在此期间大棚温度不低于  $24^\circ\text{C}$ ,

$\therefore$  该大棚在  $0 \sim 24$  时内, 温度不低于  $24^\circ\text{C}$  的时间为  $3 \leq x \leq 15$ ,

此时和光照时间重叠为 8 小时, 不满足条件;

故推迟 1 小时, 温度不低于  $24^\circ\text{C}$  的时间为  $4 \leq x \leq 16$ ,

此时和光照时间重叠为 9 小时, 满足条件

故至少推迟 1 小时, 能满足上述要求.

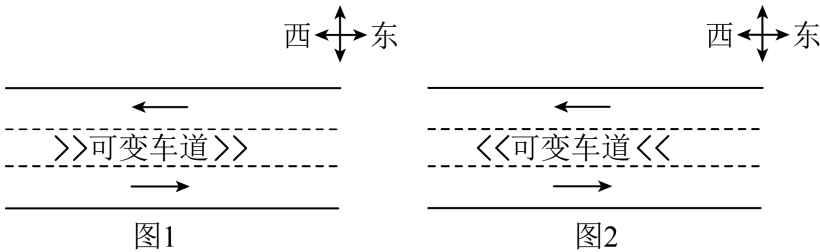
故答案为: 1.

25. 某条东西方向道路双向共有三条车道, 在早晚高峰经常会拥堵, 数学研究小组希望改善道路拥堵情况, 他们对该路段的交通量 (辆/分钟) 和时间进行了统计和分析, 得到下列表格, 并发现时间和交通量的变化

规律符合一次函数的特征.

| 时间 $x$                 | 8 时 | 11 时 | 14 时 | 17 时 | 20 时 |
|------------------------|-----|------|------|------|------|
| $y_1$ 自西向东交通量 (辆 / 分钟) | 10  | 16   | 22   | 28   | 34   |
| $y_2$ 自东向西交通量 (辆 / 分钟) | 25  | 22   | 19   | 16   | 13   |

- (1) 请用一次函数分别表示  $y_1$  与  $x$ 、 $y_2$  与  $x$  之间的函数关系. (不写定义域)
- (2) 如图, 同学们希望设置可变车道来改善拥堵状况, 根据车流量情况改变可变车道的行车方向. 单位时间内双向交通总量为  $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$ , 车流量大的方向交通量为  $v_m$ , 经查阅资料得: 当  $v_m \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ , 需要使可变车道行车方向与拥堵方向相同, 以改善交通情况. 该路段从 8 时至 20 时, 如何设置可变车道行车方向以缓解交通拥堵, 并说明理由.



【答案】(1)  $y_1 = 2x - 6$ ,  $y_2 = -x + 33$

(2) 8 时到 9 时, 可变车道的方向设置为自东向西; 18 时到 20 时, 可变车道的方向设置为自西向东, 理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的应用, 待定系数法求一次函数解析式, 一元一次不等式的应用. 待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

- (1) 利用待定系数法求解即可;
- (2) 根据  $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$ , 求出  $v_{\text{总}}$  关于  $x$  的函数关系式, 分  $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ,  $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$  两种情况讨论, 求出对应  $x$  的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: 设  $y_1 = k_1x + b_1$  ( $k_1$ 、 $b_1$  为常数, 且  $k_1 \neq 0$ ).

将  $x = 8$ ,  $y_1 = 10$  和  $x = 11$ ,  $y_1 = 16$  代入  $y_1 = k_1x + b_1$ ,

$$\text{得} \begin{cases} 8k_1 + b_1 = 10 \\ 11k_1 + b_1 = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 2 \\ b_1 = -6 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = 2x - 6.$$

设  $y_2 = k_2x + b_2$  ( $k_2$ 、 $b_2$  为常数, 且  $k_2 \neq 0$ ).

将  $x = 8$ ,  $y_2 = 25$  和  $x = 11$ ,  $y_2 = 22$  代入  $y_2 = k_2x + b_2$ ,

$$\text{得} \begin{cases} 8k_2 + b_2 = 25 \\ 11k_2 + b_2 = 22 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -1 \\ b_2 = 33 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = -x + 33.$$

【小问 2 详解】

$$v_{\text{总}} = y_1 + y_2 = 2x - 6 - x + 33 = x + 27.$$

当  $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$  时, 即  $2x - 6 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$ , 解得  $x \geq 18$ ;

当  $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$  时, 即  $-x + 33 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$ , 解得  $x \leq 9$ .

8 时到 9 时, 可变车道的方向设置为自东向西; 18 时到 20 时, 可变车道的方向设置为自西向东.

26. 在直角三角形中, 有真命题:  $30^\circ$  所对的直角边等于斜边的一半. 如图 1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $D$  是射线  $CA$  上一点 (不与点  $A$ 、 $C$  重合), 过点  $D$  作直线  $AB$  的垂线, 垂足为点  $E$ ,  $M$  是  $BD$  的中点.

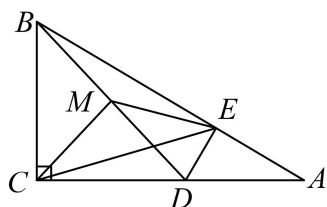
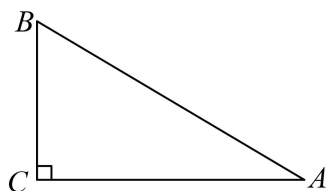


图1



备用图

(1) 求证:  $CM = EM$ ;

(2) 当点  $D$  在边  $CA$  上时, 如果设  $AD = x$ ,  $CM = y$ , 求  $y$  与  $x$  的函数表达式, 并写出自变量  $x$  的取值范围;

(3) 当  $\angle ABD = 15^\circ$  时, 求  $\triangle CME$  的面积.

【答案】(1) 见解析 (2)  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 12x + 48} (x > 0)$

(3)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  或  $9 + 6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边中线的性质即可证明;

(2) 先由  $30^\circ$  所对的直角边等于斜边的一半求解  $AB$ , 再根据勾股定理求解  $AC$ , 则可得  $CD$ , 再结合勾股定理求解即可;

(3) 根据题意进行分类讨论: 点  $D$  在  $CA$  上时, 与当点  $D$  在  $CA$  延长线上时两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $M$  是  $BD$  的中点.

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD,$$

$\therefore$  过点  $D$  作直线  $AB$  的垂线,

$$\therefore DE \perp AB,$$

在  $Rt\triangle BED$  中,  $\angle BED = 90^\circ$ ,  $M$  是  $BD$  的中点.

$$\therefore EM = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore CM = EM;$$

【小问 2 详解】

解: 设  $AD = x$ ,  $CM = y$ ,

$\therefore$  在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,

$$\therefore AB = 2BC = 4\sqrt{3},$$

由勾股定理可得,  $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 6$ ,

$$\therefore CD = 6 - x,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BD = 2CM = 2y,$$

在  $Rt\triangle BED$  中,  $\angle BED = 90^\circ$ ,

则有  $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$ , 即  $2y = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (6-x)^2}$ ,

整理可得,  $y = \frac{1}{2}\sqrt{12+36-12x+x^2}$ ,

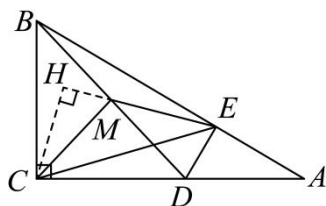
$$\text{即 } y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-12x+48},$$

$\because x^2-12x+48 = (x-6)^2+12 > 0$  成立, 即  $x > 0$ ,

$$\therefore y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-12x+48} (x > 0);$$

【小问3详解】

解: 当点  $D$  在  $CA$  上时, 过点  $C$  作  $CH \perp EM$  的延长线于点  $H$ , 如图,



在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BCD$  为等腰直角三角形,

$$\therefore BC = CD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{12+12} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore CM = EM = \frac{1}{2}BD = \sqrt{6},$$

$$\because \angle ABD = 15^\circ, BM = EM,$$

$$\therefore \angle BME = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle DME = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

$$\because \angle BDC = 45^\circ, MC = MD,$$

$$\therefore \angle CMD = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CMH = 180^\circ - \angle DME - \angle CMD = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

$$\because CH \perp EM \text{ 的延长线于点 } H, \text{ 即 } \angle CHE = 90^\circ,$$

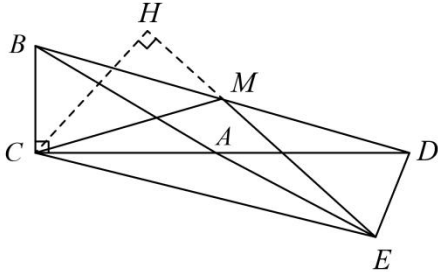
$$\therefore \angle HCM = 30^\circ,$$

$$\therefore MH = \frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

在  $\text{Rt}\triangle CHM$  中,  $CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle CME} = \frac{1}{2} \times CH \times EM = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

当点  $D$  在  $CA$  延长线上时, 过点  $C$  作  $CH \perp EM$  的延长线于点  $H$ , 如图,



$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ,  $AB = 2BC = 4\sqrt{3}$ ,  $AC = 6$ ,

$\therefore \angle ABD = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle CBD = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle DBC$  中,  $\angle BDC = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ ,

$\therefore AD = AB = 4\sqrt{3}$ ,

$\therefore CD = AC + AD = 6 + 4\sqrt{3}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle DBC$  中,  $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (6 + 4\sqrt{3})^2} = \sqrt{(6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})^2} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ ,

$\therefore CM = EM = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,

$\therefore BM = ME$ ,  $\angle ABD = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle BME = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$ ,

$\therefore BM = ME$ ,  $\angle CBD = 75^\circ$ ,

$\therefore \angle BMC = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle CME = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle CMH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ,

$\therefore CH \perp EM$  的延长线于点  $H$ , 即  $\angle CHE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle HCM = 30^\circ$ ,

$\therefore MH = \frac{1}{2}CM = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle CHM$  中,  $CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$ ,

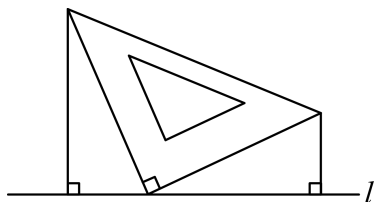
$\therefore S_{\triangle CME} = \frac{1}{2} \times CH \times EM = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2} \times (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 9 + 6\sqrt{3}$ ;

综上,  $\triangle CME$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  或  $9 + 6\sqrt{3}$ .

## 27. 探究活动

### 【模型构建】

如图, 将含有  $45^\circ$  的三角板的直角顶点放在直线  $l$  上, 过两个锐角顶点分别向直线  $l$  作垂线, 这样就得到了两个全等的直角三角形. 由于三个直角的顶点都在同一条直线上, 因此我们将其称为“一线三直角”, 这模型在数学解题中被广泛使用.



### 【模型应用】

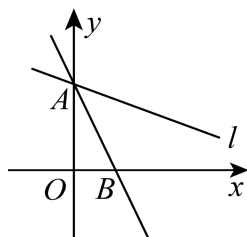


图1

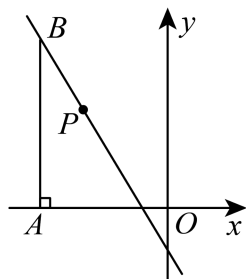


图2

(1) 在平面直角坐标系中, 直线  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  与  $x$  轴,  $y$  轴分别交于  $A$ ,  $B$  两点, 以  $B$  为直角顶点在第一象限内构造等腰直角  $ABC$ , 直接写出第三个点的坐标是\_\_\_\_\_;

(2) 如图 1, 一次函数  $y = -2x + 2$  的图像与  $y$  轴,  $x$  轴分别交于  $A$ ,  $B$  两点. 将直线  $AB$  绕点  $A$  逆时针旋转  $45^\circ$  得到直线  $l$ , 求直线  $l$  对应的函数表达式;

### 【模型拓展】

(3) 如图 2, 点  $A$  在  $x$  轴负半轴上,  $OA = 8$ , 过点  $A$  作  $AB \perp x$  轴交直线  $y = -2x - 3$  于点  $B$ ,  $P$  是直线  $y = -2x - 3$  上的动点,  $Q$  是  $y$  轴上的动点, 若  $\triangle APQ$  是以其中一个动点为直角顶点的等腰直角三角形, 请直接写出所有符合条件的点  $P$  的坐标.

【答案】(1)  $C(2,6)$ ; (2)  $y = -\frac{1}{3}x + 2$ ; (3)  $(-1,-1)$  或  $(-3,3)$  或  $(-11,19)$  或  $(\frac{5}{3}, -\frac{19}{3})$ .

【解析】

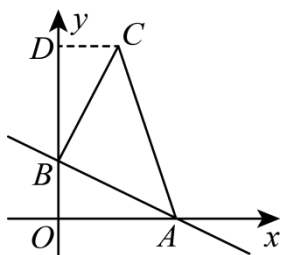
本卷由「微信小程序：指尖试卷」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】(1) 过点  $C$  作  $y$  轴的垂线，垂足为  $D$ ，先求出  $A$ 、 $B$  坐标得到  $OA$ 、 $OB$  的长，再证明  $\triangle OAB \cong \triangle DBC$  (AAS) 推出  $OD$ 、 $CD$  的长即可得到答案；

(2) 先证  $\triangle AOB \cong \triangle BDC$  可得  $CD = OB = 1$ ， $BD = AO = 2$ ，进而得到  $C(3,1)$ ，最后根据待定系数法即可解答；

(3) 分  $\angle APQ = 90^\circ$ ，点  $P$  在  $x$  轴上方或下方和  $\angle AQP = 90^\circ$  点  $P$  在  $x$  轴上方或下方，四种情况，分别运用全等三角形的判定与性质和二元一次方程组解答即可.

【详解】解：(1) 如图所示，过点  $C$  作  $y$  轴的垂线，垂足为  $D$ ，



在  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  中，当  $x = 0$  时， $y = 2$ ，当  $y = 0$  时， $x = 4$ ，

$\therefore A(4,0)$ ， $B(0,2)$ ，

$\therefore OA = 4$ ， $OB = 2$ ；

$\therefore \triangle ABC$  是以  $B$  为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore AB = BC$ ， $\angle ABC = \angle CDB = \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OBA + \angle OAB = \angle OBA + \angle DBC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OAB = \angle DBC$ ，

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle DBC$  (AAS)，

$\therefore BD = OA = 4$ ， $CD = OB = 2$ ，

$\therefore OD = OB + BD = 6$ ，

$\therefore C(2,6)$ ；

(2) 如图, 过点  $B$  作  $BC \perp AB$  交直线  $l$  于点  $C$ , 过点  $C$  作  $DC \perp x$  轴于  $D$ ,

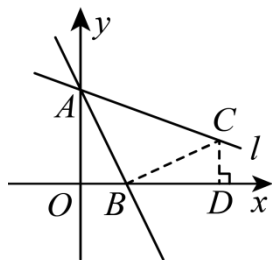


图1

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\because \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA.$$

$$\therefore AB = BC.$$

$$\because \angle ABC = \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ, \angle CBD + \angle ABO = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBD.$$

$$\because AB = BC, \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BDC.$$

$$\therefore AO = BD, OB = CD.$$

在  $y = -2x + 2$  中, 当  $x = 0$  时,  $y = -2x + 2 = 2$ ,

$$\therefore AO = BD = 2.$$

当  $y = 0$  时,  $0 = -2x + 2$ ,  $x = 1$ ,

$$\therefore OB = CD = 1,$$

$$\therefore OD = OB + BD = 3,$$

$$\therefore C(3, 1);$$

设直线  $l$  对应的函数表达式为  $y = kx + b$ ,

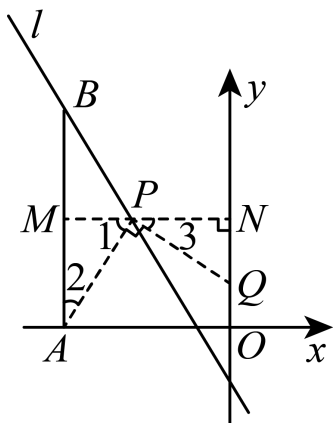
$$\text{将 } C(3, 1) \text{ 和 } A(0, 2) \text{ 代入得 } \begin{cases} b = 2, \\ 3k + b = 1. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{3}, \\ b = 2. \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $l$  解析式为  $y = -\frac{1}{3}x + 2$ .

(3) 当  $\angle APQ = 90^\circ$ ,  $AP = PQ$ ,  $P$  在  $x$  轴的上方,

如图: 过  $P$  作  $MN \perp y$  轴, 交  $AB$  于  $M$ , 交  $y$  轴于  $N$ ,



$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ,  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ ,

又  $\therefore \angle AMP = \angle PMQ = 90^\circ$ ,  $AP = PQ$ ,

$\therefore \triangle AMP \cong \triangle PNQ$  (AAS),

$\therefore PM = NQ$ ,  $AM = PN$ ;

$\therefore$  直线  $l$ :  $y = -2x - 3$ ,

$\therefore$  设  $P(m, -2m - 3)$ ,  $Q(0, n)$ ,

$\therefore AM = -2m - 3$ ,  $PN = -m$ ,

$\therefore -2m - 3 = -m$  ①,

$\therefore PM = NQ = -2m - 3 - n$ ,

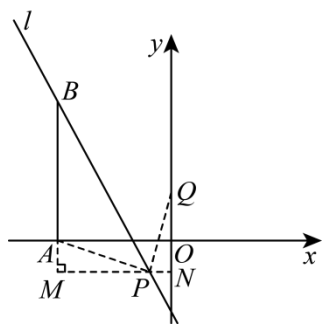
$\therefore PM + PN = OA = 8$ , 即  $-2m - 3 - n + (-m) = 8$  ②,

①②联立解得:  $m = -3, n = -2$ ,

$\therefore P(-3, 3)$ ;

当  $\angle APQ = 90^\circ$ ,  $AP = PQ$ ,  $P$  在  $x$  轴的下方,

如图:



同理可得  $\triangle AMP \cong \triangle PNQ$  (AAS),

$$\therefore AM = PN, MP = QN;$$

$$\because \text{直线 } l: y = -2x - 3,$$

$$\therefore \text{设 } P(m, -2m-3), Q(0, n),$$

$$\therefore AM = 2m + 3, PN = -m,$$

$$\therefore 2m + 3 = -m \text{ ③},$$

$$\therefore PM = NQ = n - (-2m - 3),$$

$$\therefore PM + PN = OA = 8, \text{ 即 } n - (-2m - 3) + (-m) = 8 \text{ ④},$$

$$\text{③④联立解得: } m = -1, n = 6,$$

$$\therefore P(-3, -1);$$

当  $\angle AQP = 90^\circ$ ,  $AQ = PQ$ ,  $P$  在  $x$  轴的上方, 如图

同理可证明  $\triangle PQM \cong \triangle QAO$  (AAS),

$$\therefore PM = OQ, AO = MQ;$$

$$\because \text{直线 } l: y = -2x - 3,$$

$$\therefore \text{设 } P(m, -2m-3), Q(0, n),$$

$$\therefore MQ = -2m - 3 - n, AO = 8,$$

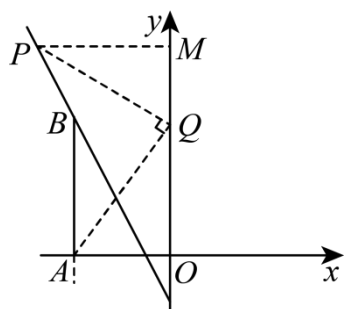
$$\therefore -2m - 3 - n = 8 \text{ ⑤},$$

$$\because PM = -m, OQ = n,$$

$$\therefore -m = n \text{ ⑥},$$

⑤⑥联立解得:  $m = -11, n = 11$ ,

$\therefore P(-11, 19)$ ;



当  $\angle AQP = 90^\circ$ ,  $AQ = PQ$ ,  $P$  在  $x$  轴的下方,

如图:

同理可证明  $\triangle PQM \cong \triangle QNA$  (AAS),

$\therefore PM = NQ, AN = MQ$ ;

$\therefore$  直线  $l: y = -2x - 3$ ,

$\therefore$  设  $P(m, -2m - 3), Q(0, n)$ ,

$\therefore PM = 2m + 3 + n, MQ = AO = 8$ ,

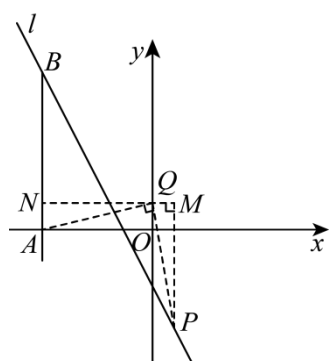
$\therefore 2m + 3 + n = 8$  ⑦,

$\therefore QM = m, AN = n$ ,

$\therefore m = n$  ⑧,

①②联立解得:  $m = \frac{5}{3}, n = \frac{5}{3}$ ,

$\therefore P\left(\frac{5}{3}, -\frac{19}{3}\right)$ .



综上，点  $P$  的坐标为  $(-1, -1)$  或  $(-3, 3)$  或  $(-11, 19)$  或  $\left(\frac{5}{3}, -\frac{19}{3}\right)$ .

**【点睛】** 本题主要考查了一次函数与几何的综合、等腰直角三角形的性质与判定、全等三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握一线三垂直模型是解题的关键.