

江湾初级中学 2023 学年度第一学期期末考试八年级数学学科试卷

(满分 100 分, 考试 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 如果最简二次根式 $\sqrt{1-2x}$ 与 $\sqrt{x}$ 是同类二次根式, 那么 x 的值是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 0

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的概念, 化为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式称为同类二次根式, 根据“最简二次根式 $\sqrt{1-2x}$ 与 $\sqrt{x}$ 是同类二次根式”可得 $1-2x=x$, 进行计算即可得出答案, 熟练掌握同类二次根式的概念是解此题的关键.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{1-2x}$ 与 $\sqrt{x}$ 是同类二次根式,

$\therefore$ 它们的被开方数相等,

$$\therefore 1-2x=x,$$

$$\text{解得: } x=\frac{1}{3},$$

故选: B.

2. 下列方程中, 是一元二次方程的是 ()

- A. $x^2 - \frac{1}{x} = 1$ B. $ax^2 + bx + c = 0$
- C. $(1-\sqrt{2})x^2 = \frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$ D. $(x+1)(x-1) = x^2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的定义. 形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程. 根据一元二次方程的定义进行分析判断即可.

【详解】 解: A、 $x^2 - \frac{1}{x} = 1$, 不是整式方程, 则该方程不是一元二次方程, 本选项不符合题意;

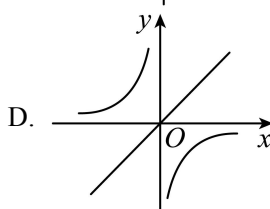
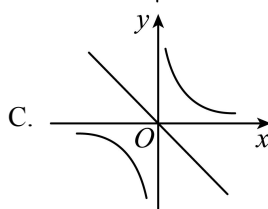
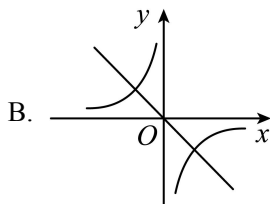
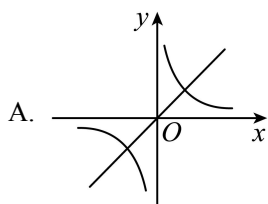
B、 $ax^2 + bx + c = 0$, 若 $a = 0$, 则该方程不是一元二次方程, 本选项不符合题意;

C、 $(1-\sqrt{2})x^2 = \frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$, 是一元二次方程, 本选项符合题意;

D、原方程整理得 $-1 = 0$, 不是一元二次方程, 本选项不符合题意.

故选：C.

3. 设 $k < 0$ ，那么函数 $y = -\frac{x}{k}$ 与 $y = \frac{k}{x}$ 在同一坐标系中的大致图象可能是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数及一次函数图象的特点进行分析即可求解.

【详解】解： $\because k < 0$,

$\therefore -\frac{1}{k} > 0$ ，则正比例函数 $y = -\frac{x}{k}$ 的图象经过一、三象限，排除 B、C 选项；

$\because k < 0$ ，则反比例函数的图象在二、四象限，排除 A 选项；

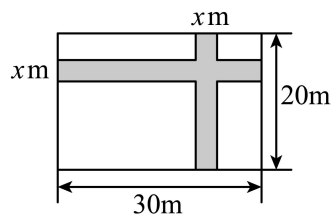
故选项 D 符合题意；

$\therefore -\frac{1}{k} > 0$,

故选：D.

【点睛】本题考查的是反比例函数及一次函数图象，掌握它们的性质是解题的关键.

4. 如图，在宽为 20m，长为 30m 的矩形地面上修建两条宽均为 x m 的小路（阴影），余下部分作为草地，草地面积为 551m^2 ，根据图中数据，求得小路宽 x 的值为（ ）



A. 1

B. 1.5

C. 2

D. 2.5

【答案】A

【解析】

【分析】剩余部分可合成长为 $(30-x)$ m，宽为 $(20-x)$ m 的矩形，利用矩形的面积公式结合草地面积为 551m^2 ，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其较小值即可得出结论.

【详解】解：根据题意，得 $(30-x)(20-x)=551$ ，

整理，得 $x^2-50x+49=0$ ，

解得 $x_1=1, x_2=49$ ，

$\therefore$ 当 $x_2=49$ 时， $20-x=-29<0$ ，

$\therefore x_2=49$ 舍去，

$\therefore$ 小路宽 x 的值为 1.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

5. 下列命题的逆命题是真命题的是 ()

A. 若 $a>0, b>0$ ，则 $a+b>0$

B. 全等三角形的对应角相等

C. 对顶角相等

D. 若 $|a|=|b|$ ，则 $a=b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理的知识. 利用不等式的性质、全等三角形的性质及绝对值的意义分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：A、若 $a>0, b>0$ ，则 $a+b>0$ 的逆命题为：若 $a+b>0$ ，则 $a>0, b>0$ ，错误，为假命题；

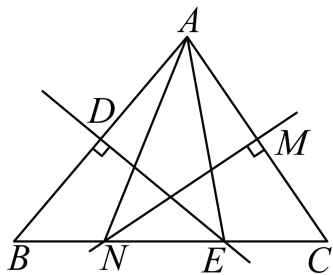
B、全等三角形的对应角相等的逆命题为：对应角相等的两个是全等三角形，错误，为假命题；

C、对顶角相等的逆命题为：相等的两个角是对顶角，错误，为假命题；

D、若 $|a|=|b|$ ，则 $a=b$ 的逆命题为：若 $a=b$ ，则 $|a|=|b|$ ，正确，为真命题，

故选：D.

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线交 BC 边于点 E ， AC 的垂直平分线交 BC 边于点 N ，若 $\angle BAC=74^\circ$ ，则 $\angle NAE$ 的度数为 ()



A. 30°

B. 32°

C. 36°

D. 37°

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的判定及性质，三角形内角和定理．由线段垂直平分线的性质及等腰三角形性质可得 $\angle BAE = \angle B$ ， $\angle CAN = \angle C$ ，从而可得 $\angle B + \angle C = 74^\circ + \angle EAN$ ，即可求解．

【详解】 解： $\because AB$ 的垂直平分线交 BC 边于点 E ，

AC 的垂直平分线交 BC 边于点 N ，

$$\therefore AE = BE, \quad AN = CN,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle B, \quad \angle CAN = \angle C,$$

$$\therefore \angle B + \angle C$$

$$= \angle BAE + \angle CAN$$

$$= \angle BAE + \angle CAE + \angle EAN$$

$$= \angle BAC + \angle EAN$$

$$= 74^\circ + \angle EAN,$$

$$\because \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 106^\circ,$$

$$\therefore 106^\circ = 74^\circ + \angle EAN,$$

$$\therefore \angle EAN = 32^\circ;$$

故选： B.

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化．根据分母有理化的法则计算即可求解．

$$\text{【详解】 解: } \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= -(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= -1.$$

故答案为: -1.

8. 方程 $x^2 = x$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】移项后再因式分解求得两根即可；本题考查一元二次方程解法中的因式分解法，熟练掌握因式分解的方法是本题的关键.

【详解】解： $x^2 - x = 0$,

$$x(x - 1) = 0,$$

$$x = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0,$$

解得 $x = 0, x = 1$,

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = 1$.

9. 在实数范围内因式分解 $-a^2 + 5a + 2 =$ _____.

【答案】 $-\left(a - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)\left(a - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，实数范围内分解因式. 利用公式法求出方程 $-a^2 + 5a + 2 = 0$ 的解，从而得出答案.

【详解】解： $\because$ 方程 $-a^2 + 5a + 2 = 0$ 的 $a = -1, b = 5, c = 2$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times (-1) \times 2 = 33 > 0,$$

$$\therefore a = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{-2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2},$$

$$\therefore -a^2 + 5a + 2 = -\left(a - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)\left(a - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right),$$

故答案为： $-\left(a - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)\left(a - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$.

10. 如果点 A 的坐标为 $(-2, -1)$ ，点 B 的坐标为 $(1, 3)$ ，那么 A、B 两点的距离等于_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了两点之间的距离公式. 利用两点之间的距离公式即可得.

【详解】解： $\because A(-2, -1), B(1, 3)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = 5,$$

即 A、B 两点的距离等于 5,

故答案为: 5.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{3x-1}{1-x}$, 那么 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是求函数值. 把 $x = -\frac{1}{2}$ 代入函数解析式即可得到答案.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{3x-1}{1-x},$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{3}.$$

故答案为: $-\frac{5}{3}$.

12. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图像上的两个点, $x_1 < x_2 < 0$, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的增减性即可判断结论.

【详解】 解: 因为 $y = \frac{k}{x} (k > 0),$

所以函数图像在第一、三象限内,

且在每个象限内, y 随 x 的增大而减小,

因为点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点在该双曲线上, 且 $x_1 < x_2 < 0$,

$\therefore A, B$ 两点在第三象限的曲线上,

$\therefore y_1 > y_2.$

故答案为: $y_1 > y_2$.

【点睛】 本题考查的是反比例函数图像上点的坐标特点, 熟知反比例函数图像上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

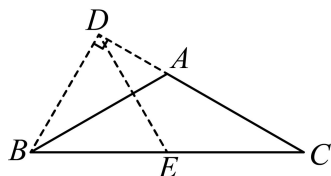
13. 如果等腰三角形腰上的高等于底边的一半, 那么这个等腰三角形的顶角等于_____°.

【答案】120

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质, 等边三角形的判定和性质. 取 BC 的中点 E , 连接 DE , 证明 $\triangle BDE$ 是等边三角形, 据此求解即可.

【详解】解: 如图, 取 BC 的中点 E , 连接 DE ,



$$\therefore DE = BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AB = AC, BD \perp AC, BD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DE = BE = BD,$$

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle CBD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ, \text{ 则 } \angle BAC = 180^\circ - 2\angle C = 120^\circ;$$

故答案为: 120.

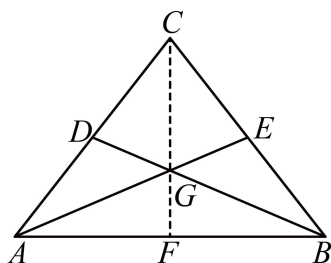
14. 以 AB 为底边的等腰三角形, 它的两腰上的中线交点的轨迹是_____.

【答案】线段 AB 的垂直平分线 (底边中点 F 除外)

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 三角形中线的性质, 线段垂直平分线的逆定理. 根据三角形的三条中线交于一个, 和等腰三角形的性质即可得到结论.

【详解】解: 如图,



$\because CA = CB$, D 、 E 分别是 CA 、 CB 的中点, 点 G 是 AE 、 BD 的交点,

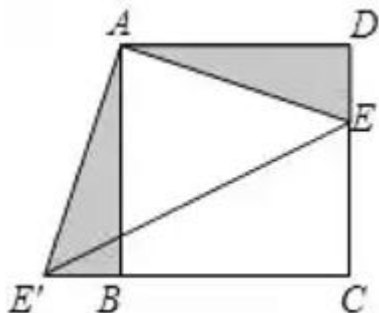
连接 CG 并延长交 AB 于点 F ,

$\therefore CF$ 是底边 AB 的中线, 也是 AB 的垂线,

∴点 G 在底边 AB 的垂直平分线上 (底边中点 F 除外),

故答案为: 线段 AB 的垂直平分线 (底边中点 F 除外).

15. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3, E 为 CD 边上一点, $DE = 1$. 以点 A 为中心, 把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 90° , 得 $\triangle ABE'$, 连接 EE' , 则 EE' 的长等于_____



【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

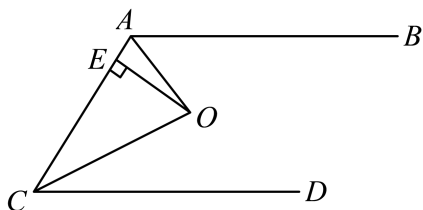
【分析】 根据旋转的性质得到: $BE' = DE = 1$, 在直角 $\triangle EE'C$ 中, 利用勾股定理即可求解.

【详解】 根据旋转的性质得到: $BE' = DE = 1$, 在直角 $\triangle EE'C$ 中: $EC = DC - DE = 2$, $CE' = BC + BE' = 4$.

根据勾股定理得到: $EE' = \sqrt{EC^2 + CE'^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

故答案为: $2\sqrt{5}$

16. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, 点 O 为 $\angle CAB$ 、 $\angle ACD$ 的平分线的交点. $OE \perp AC$, 且 $OE = \frac{2}{3}$, 则两平行线 AB 、 CD 间的距离等于_____.



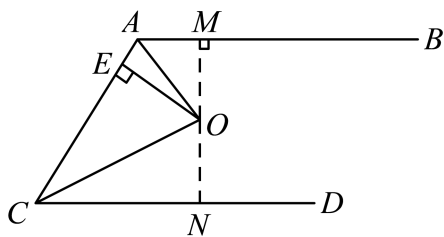
【答案】 $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质, 平行线的性质. 过点 O 作 $MN \perp AB$ 于点 M , 交 CD 于点 N , 根据 $AB \parallel CD$, 得出 $\angle CNM = 180^\circ - \angle AMN = 90^\circ$, 求出 $MN \perp CD$, 根据角平分线的性质得出

$OM = OE = \frac{2}{3}$, $ON = OE = \frac{2}{3}$, 即可得出结论.

【详解】 解: 过点 O 作 $MN \perp AB$ 于点 M , 交 CD 于点 N , 如图所示:



则 $\angle AMN = 90^\circ$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CNM = 180^\circ - \angle AMN = 90^\circ$,

$\therefore MN \perp CD$,

$\because AO$ 、 CO 分别平分 $\angle CAB$, $\angle ACD$,

$\therefore OE \perp AC$,

$\therefore OM = OE = \frac{2}{3}$, $ON = OE = \frac{2}{3}$,

$\therefore MN = OM + ON = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 两平行线 AB 、 CD 之间的距离为 $\frac{4}{3}$.

故答案为: $\frac{4}{3}$.

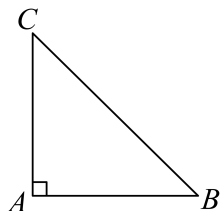
17. 定义: 当三角形中一个内角 α 是另一个内角 β 的两倍时, 我们称此三角形为“特征三角形”, 其中 α 称为“特征角”, 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是特征三角形, $\angle A$ 是特征角, $BC = 6$, 则 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

【答案】 9 或 $6\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{3}$ 或 9

【解析】

【分析】 分 $\angle A = 90^\circ$ 或 $\angle A \neq 90^\circ$, 分别画图, 根据“特征三角形”的定义即可解决问题.

【详解】 解: 如图, 若 $\angle A = 90^\circ$,



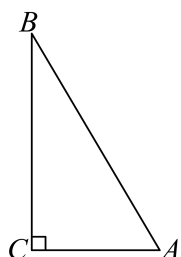
$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 是特征三角形, $\angle A$ 是特征角,

$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$,

$\therefore AC = AB = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9;$$

如图，若 $\angle A \neq 90^\circ$ ，



$\therefore Rt\triangle ABC$ 是特征三角形， $\angle A$ 是特征角，

$$\therefore \angle A = 60^\circ, \quad \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AC,$$

由勾股定理得： $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，

$$\text{即 } AC^2 + 6^2 = 4AC^2,$$

$$\therefore AC = \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6$$

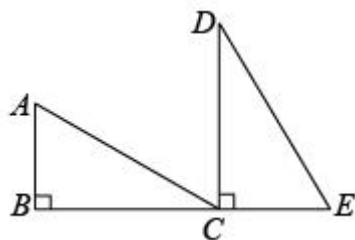
$$= 6\sqrt{3},$$

故答案为：9 或 $6\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查了直角三角形的性质，勾股定理，灵活运用勾股定理是解题的关键。

18. 已知两块相同的三角板如图所示摆放，点 B 、 C 、 E 在同一直线上， $\angle ABC = \angle DCE = 90^\circ$ ，

$\angle ACB = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转一定角度 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，如果在旋转的过程中 $\triangle ABC$ 有一条边与 DE 平行，那么此时 $\triangle BCE$ 的面积是_____。



【答案】 $\sqrt{3}$ 或 3

【解析】

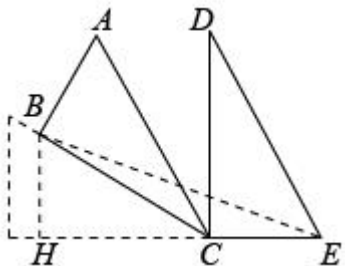
【分析】先求解 $AB = CE = 2$ ， $\angle CDE = 30^\circ$ ， $AC = 4 = DE$ ， $BD = DC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，再分两

种情况讨论；如图，当 $AC \parallel DE$ 时，过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，则 $\angle DEC = \angle ACH = 60^\circ$ ，当 $BC \parallel DE$ 时，过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，则 $\angle DEC = \angle BCH = 60^\circ$ ，再求解 $\triangle BCE$ 中 CE 上的高即可得到答案。

【详解】解： $\because \angle ABC = \angle DCE = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ，且两个三角形一样，

$$\therefore AB = CE = 2, \angle CDE = 30^\circ, AC = 4 = DE, BC = DC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

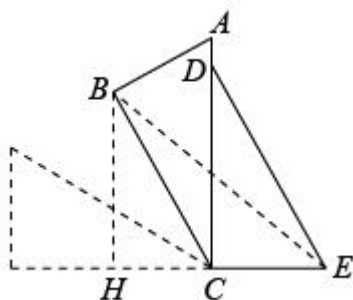
如图，当 $AC \parallel DE$ 时，过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，则 $\angle DEC = \angle ACH = 60^\circ$ ，



$$\therefore \angle BCH = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ, BH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}CE \cdot BH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

当 $BC \parallel DE$ 时，过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，则 $\angle DEC = \angle BCH = 60^\circ$ ，



$$\therefore \angle CBH = 30^\circ, CH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}, BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}CE \cdot BH = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3,$$

故答案为：3 或 $\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查的是旋转的性质，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理的应用，二次根式的化简，熟练的利用旋转的性质解题是关键。

三. 解答题 (本大题共 7 题，第 19 题 12 分，第 20 题 6 分，第 21-23 题各 8 分，第 24 题 10 分，第 25 题 12 分，共 64 分)

19. (1) 计算： $(4\sqrt{3} + 7)(4\sqrt{3} - 7) + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ；

(2) 用配方法解方程： $2x^2 + 4x + 1 = 0$ 。

【答案】 (1) $-1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}$; (2) $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算及解一元二次方程.

(1) 根据二次根式混合运算的法则计算即可求解;

(2) 先通过配方, 然后再利用直接开平方法即可.

【详解】 解: (1) $(4\sqrt{3} + 7)(4\sqrt{3} - 7) + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

$$= 48 - 49 + \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}$$

$$= 48 - 49 + \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$= -1 + \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

(2) $2x^2 + 4x + 1 = 0$,

整理得 $x^2 + 2x = -\frac{1}{2}$,

配方得 $x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$, 即 $(x+1)^2 = \frac{1}{2}$,

$$\therefore x+1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

20. 已知 y 与 x 成反比例, z 与 y 成正比例. 又当 $x=8$ 时, $y=\frac{1}{2}$; 当 $y=\frac{1}{3}$ 时, $z=-2$. 试问 z 是 x 的函数吗? 当 $x=16$ 时, z 的值是多少?

【答案】 z 是 x 的反比例函数; 当 $x=16$ 时, $z=-\frac{3}{2}$.

【解析】

【分析】 根据题意设 $y = \frac{k}{x}$ 把 $x=8$ 时, $y=\frac{1}{2}$ 代入, 求得 k 的值; 设 $z = ny$, 把 $y=\frac{1}{3}$, $z=-2$, 代入计

算求出 n 的值, 即可确定 y 与 x 的函数解析式; 将 $y = \frac{k}{x}$ 代入 $z = ny$, 可求得 z 与 x 得函数解析式, 再将

$x=16$ 代入计算即可.

【详解】解：设 $y = \frac{k}{x}$,

∵ 当 $x = 8$ 时, $y = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{k}{8},$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

设 $z = ny$,

∵ 当 $y = \frac{1}{3}$ 时, $z = -2$,

$$\therefore -2 = \frac{1}{3}n,$$

$$\therefore n = -6,$$

$$\therefore z = -6y,$$

$$\therefore z = -6 \cdot \frac{4}{x}, \text{ 即 } z = -\frac{24}{x},$$

∴ z 是 x 的反比例函数,

$$\text{将 } x = 16 \text{ 代入, 得 } z = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}.$$

【点睛】本题考查了待定系数法求反比例函数、正比例函数的解析式, 熟练掌握待定系数法是解题关键.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2 - 2x - 3 = 0$.

(1) 如果 $x = -1$ 是该方程的一个根, 求另一个根;

(2) 如果方程有两个实数根, 求 k 的取值范围.

【答案】(1) 另一个根为 $x = 3$;

(2) k 的取值范围是 $k \geq \frac{5}{3}$ 且 $k \neq 2$.

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的根、根与系数的关系、根的判别式.

(1) 将 $x = -1$ 代入 $(k-2)x^2 - 2x - 3 = 0$, 然后解方程即可得到 $k = 3$, 再根据根与系数的关系求得另一个根;

(2) 根据一元二次方程的定义得 $k-2 \neq 0$, 根的判别式 $\Delta \geq 0$, 可求得 k 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 将 $x = -1$ 代入 $(k-2)x^2 - 2x - 3 = 0$ 得

$$k-2+2-3=0,$$

解方程得: $k=3$,

故关于 x 的一元二次方程为: $x^2-2x-3=0$,

解得: $x_1=-1, x_2=3$,

故另一个根为 $x=3$;

【小问 2 详解】

解: $\because k-2 \neq 0$,

$$\therefore k \neq 2,$$

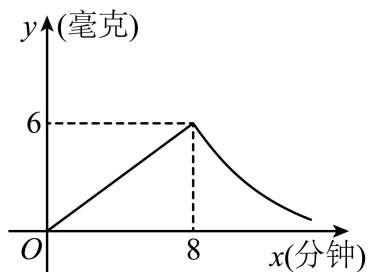
$\therefore$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times (k-2) \times (-3) \geq 0,$$

解之得: $k \geq \frac{5}{3}$,

故 k 的取值范围是 $k \geq \frac{5}{3}$ 且 $k \neq 2$.

22. 为了预防疾病, 某单位对办公室采用药熏消毒法进行消毒, 已知药物燃烧时, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 x (分钟) 成为正比例, 药物燃烧后, y 与 x 成反比例 (如图), 现测得药物 8 分钟燃毕, 此时室内空气中每立方米的含药量 6 毫克, 请根据题中所提供的信息, 解答下列问题:



(1) 药物燃烧时, y 关于 x 的函数关系式为 _____, 自变量 x 的取值范围为 _____; 药物燃烧后, y 关于 x 的函数关系式为 _____.

(2) 研究表明, 当空气中每立方米的含药量低于 1.6 毫克时员工方可进办公室, 那么从消毒开始, 至少需要经过 _____ 分钟后, 员工才能回到办公室;

(3) 研究表明, 当空气中每立方米的含药量不低于 3 毫克且持续时间不低于 10 分钟时, 才能有效杀灭空气中的病菌, 那么此次消毒是否有效? 为什么?

【答案】(1) $y = \frac{3}{4}x$, $0 \leq x \leq 8$; $y = \frac{48}{x}$ ($x > 8$)

(2) 30 (3) 有效, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 药物燃烧时, 设出 y 与 x 之间的解析式 $y = k_1x$, 把点 $(8, 6)$ 代入即可, 从图上读出 x 的取值范围; 药物燃烧后, 设出 y 与 x 之间的解析式 $y = \frac{k_2}{x}$, 把点 $(8, 6)$ 代入即可;

(2) 把 $y = 1.6$ 代入反比例函数解析式, 求出相应的 x ;

(3) 把 $y = 3$ 代入正比例函数解析式和反比例函数解析式, 求出相应的 x , 两数之差与 10 进行比较, 大于等于 10 就有效.

【小问 1 详解】

解: (1) 设药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为 $y = k_1x$ ($k_1 > 0$) 代入 $(8, 6)$ 为 $6 = 8k_1$,

$\therefore k_1 = \frac{3}{4}$ 设药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为 $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 > 0$) 代入 $(8, 6)$ 为 $6 = \frac{k_2}{8}$,

$\therefore k_2 = 48$,

$\therefore$ 药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为 $y = \frac{3}{4}x$ ($0 \leq x \leq 8$) 药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为 $y = \frac{48}{x}$ ($x > 8$);

【小问 2 详解】

(2) 结合实际, 令 $y = \frac{48}{x}$ 中 $y \leq 1.6$ 得 $x \geq 30$,

即从消毒开始, 至少需要 30 分钟后学生才能进入教室.

【小问 3 详解】

(3) 把 $y = 3$ 代入 $y = \frac{3}{4}x$, 得: $x = 4$,

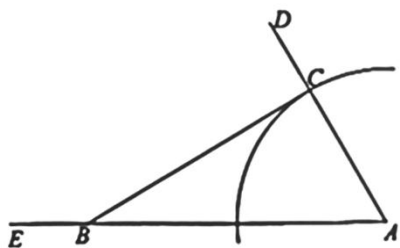
把 $y = 3$ 代入 $y = \frac{48}{x}$, 得: $x = 16$,

$\therefore 16 - 4 = 12$,

所以这次消毒是有效的.

【点睛】本题考查了一次函数和反比例函数的综合应用, 现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量, 解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系, 然后利用待定系数法求出它们的关系式.

23. 已知: 如图, $\angle DAE = 60^\circ$, B 是 AE 上一点, 以 A 为圆心, $\frac{1}{2}AB$ 长为半径作弧, 交 AD 于点 C , 联结 BC . 求证: $\angle ACB = 90^\circ$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】解法一：取 AB 的中点 F ，联结 CF ，证得 $AC=AF$ ，由 $\angle BAD = 60^\circ$ 得到 $\triangle ACF$ 是等边三角形，求出 $\angle ACF = \angle AFC = 60^\circ$ ，再根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle BCF = 30^\circ$ ，结论得到证明。

解法二：过 C 作 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CH ，设 $AH = m$ ，由 $\angle A = 60^\circ$ 求出 $CH = \sqrt{3}m$ ， $AC=2m$ ，由 $AB=2AC=4m$ ，求出 BH 、 BC ，利用勾股定理求得 BC ，由此即可利用勾股定理的逆定理证得 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ 。

【详解】解法一：取 AB 的中点 F ，联结 CF 。

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AB, AC = \frac{1}{2}AB$$

$$\therefore AC = AF,$$

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACF \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle ACF = \angle AFC = 60^\circ$$

$$\therefore BF = FA, FC = FA$$

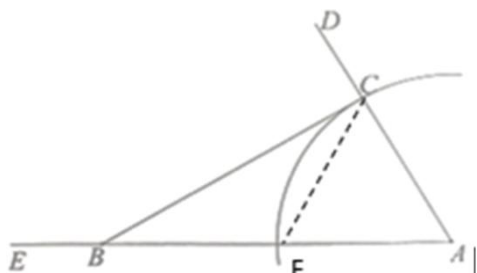
$$\therefore BF = FC$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF$$

$$\therefore \angle AFC = \angle B + \angle BCF = 60^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACF + \angle BCF = 90^\circ$$



解法二：过 C 作 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CH 。

设 $AH = m$.

$\triangle ACH$ 中, $\angle AHC = 90^\circ, \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle ACH = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2AH = 2m$,

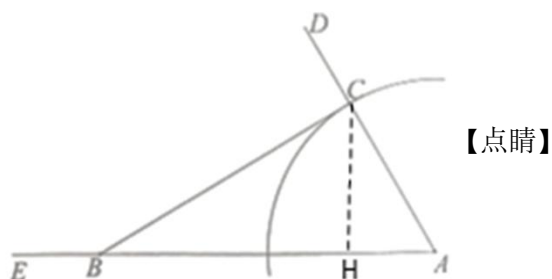
$\therefore CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{3}m$,

$\therefore AB = 2AC = 4m, BH = 3m$,

$\therefore BC = \sqrt{BH^2 - CH^2} = 2\sqrt{3}m$,

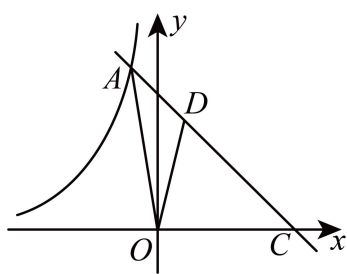
$\therefore BC^2 + AC^2 = AB^2$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ACB = 90^\circ$.



此题考查勾股定理的逆定理, 判断一个角是直角时, 可以用勾股定理的逆定理, 证明该角所在的三角形是直角三角形, 由此证明结论.

24. 如图, 直线 AC 与函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象相交于点 $A(-1, 6)$, 与 x 轴交于点 C , 且 $\angle ACO = 45^\circ$, 点 D 是线段 AC 上一点.



(1) 求 k 的值;

(2) 若 $\triangle DOC$ 与 $\triangle OAC$ 的面积比为 $2:3$, 求点 D 的坐标;

(3) 将 OD 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 OD' , 点 D' 恰好落在函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图像上, 求点 D 的坐标.

【答案】(1) $k = -6$

(2) $(1, 4)$

(3) $D(2,3)$ 或 $D(3,2)$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(-1,6)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$, 可求出 k 的值;

(2) 过 D 点作 $DM \perp x$ 轴于点 M , 过点 A 作 $AN \perp x$ 轴于点 N , 由 $\triangle DOC$ 与 $\triangle OAC$ 的面积比为 $2:3$ 可推出 $\frac{DM}{AN} = \frac{2}{3}$, 由点 A 的坐标可求出 $AN = 6$, 从而求出点 D 的纵坐标, 根据题意求出直线 AC 的解析式, 由于点 D 在直线 AC 上, 进而求出 D 点坐标;

(3) 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于 H , 设 $D(x, -x+5) (x > 0)$, 则 $D'(x-5, x)$, 将其坐标代入到 $y = -\frac{6}{x}$ 得到关于 x 的方程内解方程即可求出结果.

【小问 1 详解】

$\because A(-1,6)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象上,

$$\therefore 6 = \frac{k}{-1},$$

$$\therefore k = -6$$

【小问 2 详解】

如图 1, 过 D 点作 $DM \perp x$ 轴于点 M , 过点 A 作 $AN \perp x$ 轴于点 N ,

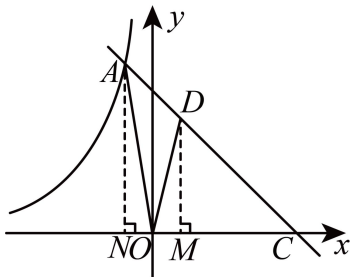


图1

$$\therefore \frac{S_{\triangle ODC}}{S_{\triangle OAC}} = \frac{\frac{1}{2}OC \times DM}{\frac{1}{2}OC \times AN} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DM}{AN} = \frac{2}{3},$$

$\because$ 点 A 的坐标为 $(-1,6)$,

$$\therefore AN = 6,$$

$$\therefore DM = 4,$$

$$\therefore \angle ACO = 45^\circ,$$

$\therefore$ 设直线 AC 的解析式为 $y = -x + b$,

$\because$ 点 $A(-1, 6)$ 在直线 $y = -x + b$ 上,

$$\therefore 6 = 1 + b$$

$$\therefore b = 5$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x + 5$,

把 $y = 4$ 代入 $y = -x + 5$ 中, $4 = -x + 5$,

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore D(1, 4)$$

【小问3详解】

如图2, 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于 H ,

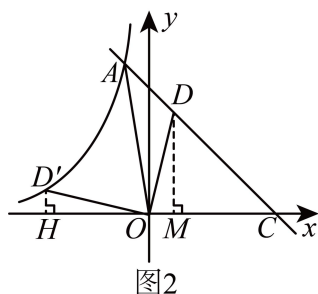


图2

$\because$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x + 5$,

$\therefore$ 设 $D(x, -x + 5) (x > 0)$,

$$\therefore D'(x - 5, x)$$

$\because$ 点 D 落在函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上,

$$\therefore x(x - 5) = -6$$

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$\therefore D(2, 3) \text{ 或 } D(3, 2).$$

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求解析式, 三角形的面积, 反比例函数的性质, 旋转的性质等, 能够熟练运用一次函数和反比例函数的性质是解本题的关键.

25. 如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 6$, D 是 AB 的中点. P 是射线 CD 上一个动点, 连接 PB , 过点 B 作 PB 的垂线, 交射线 CD 于 Q .

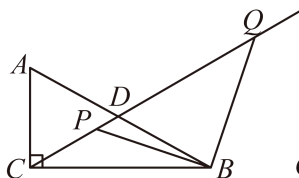


图1

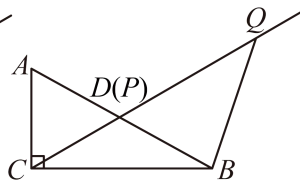


图2

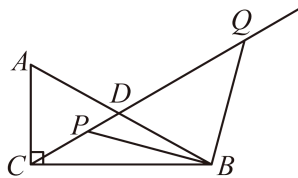


图3

(1) 如图2, 如果点 P 与点 D 重合, 求证: $PQ = 2PC$;

(2) 如图3, 如果 $BP = BQ$, 求 PQ 的长;

(3) 设 $CP = x$, $BP = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式.

【答案】(1) 见解析 (2) $PQ = 6\sqrt{3}$;

(3) $y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} (x > 0)$.

【解析】

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用斜边中线的性质可得 $DC = AD = BD$, 可求得 $\angle DCB = \angle DBC = 30^\circ$, 再利用含 30° 度角的直角三角形的性质可证 $PQ = 2PC$;

(2) 过 B 作 $BH \perp PQ$ 于 H , 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中由勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6\sqrt{3}$, 利用含 30° 度角的直角三角形的性质可求 $CB = 2BH = 6\sqrt{3}$, 据此求解即可;

(3) 分两种情况讨论, 当 $CP \leq 9$ 时, $PH = 9 - x$, 当 $CP > 9$ 时, $PH = x - 9$, 利用勾股定理即可求出.

【小问1详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 6$, D 是 AB 的中点,

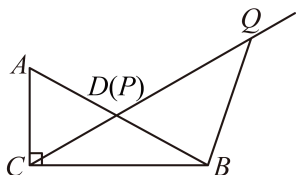


图2

$$\therefore DC = AD = BD,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle QDB = \angle DCB + \angle DBC = 60^\circ,$$

$$\therefore QB \perp DB,$$

$$\therefore \angle DQB = 90^\circ - \angle QDB = 30^\circ,$$

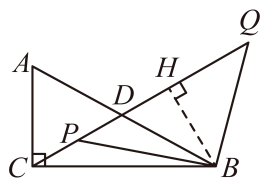
$$\therefore DQ = 2DB = 2DC,$$

$\because D$ 与 P 重合,

$$\therefore PQ = 2PC;$$

【小问 2 详解】

解: 过 B 作 $BH \perp PQ$ 于 H ,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle ABC = 30^\circ, AC = 6,$$

$$\therefore AB = 2AC = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACB \text{ 中由勾股定理 } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6\sqrt{3},$$

$$\text{又因为 } \angle HCB = 30^\circ, \angle CHB = 90^\circ,$$

$$\therefore CB = 2BH = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore BH = 3\sqrt{3},$$

$$\because \angle PBQ = 90^\circ, BP = BQ,$$

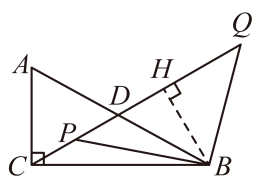
$$\therefore PQ = 2BH = 6\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 由 (2) 得 } BH = 3\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CBH \text{ 中, } CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 9,$$

$$\text{当 } CP \leq 9 \text{ 时, } PH = 9 - PC = 9 - x,$$

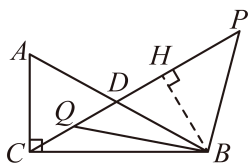


$$\text{在 Rt}\triangle PBH \text{ 中, 由勾股定理得: } PB^2 = PH^2 + BH^2,$$

$$\text{即 } y^2 = (9 - x)^2 + 27,$$

$$\text{即 } y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} \quad (0 < x \leq 9).$$

$$\text{当 } CP > 9 \text{ 时, } PH = PC - 9 = x - 9,$$



在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中由勾股定理得: $PB^2 = PH^2 + BH^2$,

$$\text{即 } y^2 = (x-9)^2 + 27,$$

$$\text{即 } y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} (x > 9),$$

$$\text{综上, } y = \sqrt{x^2 - 18x + 108} (x > 0).$$

【点睛】 本题考查直角三角形性质, 勾股定理, 等腰直角三角形性质, 函数关系, 掌握直角三角形性质, 勾股定理, 等腰直角三角形性质函数关系, 解题关键是在 $\text{Rt}\triangle PBH$ 中利用勾股定理构造等式求出函数关系.