

张江集团学校 2019 学年七年级第一学期数学期中考试

一、填空题

1. 如果多项式 $\pi x^{m+1} + (n-2)x + 3^5$ 是关于 x 的二次二项式, 则 $2^m \cdot 3^n =$ _____

【答案】 18

【解析】

【分析】

根据多项式的定义得到 $m+1=2$, $n-2=0$, 据此可以求得答案.

【详解】 $\because$ 多项式 $\pi x^{m+1} + (n-2)x + 3^5$ 是关于 x 的二次二项式,

$$\therefore m+1=2, \quad n-2=0,$$

$$\therefore m=1, \quad n=2,$$

$$\therefore 2^m \cdot 3^n = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18.$$

故答案为: 18.

【点睛】 本题考查了多项式的有关定义. 解答本题的关键是掌握多项式的定义, 多项式中每个单项式叫做多项式的项, 这些单项式中的最高次数, 就是这个多项式的次数.

2. 多项式 $(x^2 - 3kxy - 3y^2) + \left(\frac{1}{3}xy - 8\right)$ 中不含 xy 项, 则常数 k 的值是 _____

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】

先去掉括号, 再合并同类项, 根据已知得出 $-3k + \frac{1}{3} = 0$, 再求出即可.

$$\text{【详解】 } (x^2 - 3kxy - 3y^2) + \left(\frac{1}{3}xy - 8\right)$$

$$= x^2 - 3kxy - 3y^2 + \frac{1}{3}xy - 8$$

$$= x^2 + \left(-3k + \frac{1}{3}\right)xy - 3y^2 - 8.$$

$\because$ 多项式 $(x^2 - 3kxy - 3y^2) + \left(\frac{1}{3}xy - 8\right)$ 中不含 xy 项,

$$\therefore -3k + \frac{1}{3} = 0,$$

解得： $k = \frac{1}{9}$.

故答案为： $\frac{1}{9}$.

【点睛】 本题考查了去括号法则，合并同类项法则，多项式等知识点，能根据题意得出 $-3k + \frac{1}{3} = 0$ 是解答本题的关键.

3.已知 $a^m = 3$ ， $a^n = 5$ ，则 $a^{3m+2n} =$ _____

【答案】 675

【解析】

【分析】

根据幂的乘方以及同底数幂的乘法法则解答即可.

【详解】 $\because a^m=3$ ， $a^n=5$ ，

$$\therefore a^{3m+2n}$$

$$=(a^m)^3 \cdot (a^n)^2$$

$$=3^3 \times 5^2$$

$$=27 \times 25$$

$$=675.$$

故答案为：675.

【点睛】 本题考查了幂的乘方与积的乘方以及同底数幂的乘法，熟记幂的运算法则是解答本题的关键.

4.已知 $2^x = 4^{y-1}$ ， $27^y = 3^{x+1}$ ，则 $x - y =$ _____

【答案】 -3

【解析】

【分析】

根据已知，可得 $2^x=2^{2y-2}$ ， $3^{3y}=3^{x+1}$ ，所以 $\begin{cases} x=2y-2 \\ 3y=x+1 \end{cases}$ ；然后解二元一次方程，求出 x 、 y 的值，进而求出 x

$-y$ 的值是多少即可.

【详解】 $\because 2^x=4^{y-1}$ ， $27^y=3^{x+1}$ ，

$$\therefore 2^x=2^{2y-2}，3^{3y}=3^{x+1}，$$

$$\therefore \begin{cases} x=2y-2 \\ 3y=x+1 \end{cases}，$$

解得: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$,

$$\therefore x - y = (-4) - (-1) = -3.$$

故答案为: -3 .

【点睛】 本题考查了解二元一次方程以及幂的乘方和积的乘方. 解答本题的关键是要明确: ① $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数); ② $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

5. 分解因式 $5x^2 - 28x + 36 =$ _____

【答案】 $(5x - 18)(x - 2)$

【解析】

【分析】

利用十字相乘法分解即可得.

【详解】 $5x^2 - 28x + 36 = (5x - 18)(x - 2)$.

故答案为: $(5x - 18)(x - 2)$.

【点睛】 本题考查了因式分解 - 十字相乘法, 解答本题的关键是掌握十字相乘法.

6. 已知 $(19x - 31)(13x - 17) - (13x - 17)(11x - 23)$ 可因式分解成 $(ax + b)(8x + c)$, 其中常数 a, b, c 均为整数, 则 $a + b + c =$ _____

【答案】 -12

【解析】

【分析】

首先要对原式正确因式分解, 然后进行对比, 即可得出字母的值.

【详解】 原式 $= (13x - 17)(19x - 31 - 11x + 23) = (13x - 17)(8x - 8)$.

$$\therefore \text{可以分解成 } (ax + b)(8x + c),$$

$$\therefore a = 13, b = -17, c = -8,$$

$$\therefore a + b + c = -12.$$

故答案为: -12 .

【点睛】 本题考查了提取公因式法分解因式以及代数式求值, 根据已知正确分解因式是解答本题的关键.

7. 已知 m, n 满足 $m^2 n^2 + m^2 + n^2 + 10mn + 16 = 0$, 则 $m + n =$ _____

【答案】 0

【解析】

【分析】

已知等式左边配方变形后，利用非负数的性质求出 m 与 n 的值，即可求出所求.

【详解】已知等式整理得： $(m^2n^2+8mn+16)+(m^2+n^2+2mn)=0$,

即 $(mn+4)^2+(m+n)^2=0$,

可得： $mn+4=0$, $m+n=0$.

故答案为：0.

【点睛】本题考查了配方法的应用，熟练掌握完全平方公式是解答本题的关键.

8.在对某二次三项式进行因式分解时，甲同学因为看错了一次项系数而将其分解为 $2(x-1)(x-9)$ ，乙同学因为看错了常数项而将其分解为 $2(x-2)(x-4)$ ，请写出正确的因式分解的结果_____

【答案】 $2(x-3)^2$

【解析】

【分析】

根据乘法和因式分解的关系，排除甲乙看错的项，得到原二次三项式，再因式分解即可.

【详解】 $\because 2(x-1)(x-9)=2x^2-20x+18$,

$2(x-2)(x-4)=2x^2-12x+16$.

$\therefore$ 甲同学因为看错了一次项系数，

$\therefore$ 多项式的二次项和常数项分别是 $2x^2$ 、18.

$\therefore$ 乙同学因为看错了常数项，

$\therefore$ 多项式的二次项和一次项分别是 $2x^2$ 、 $-12x$,

所以该二次三项式为： $2x^2-12x+18$.

$2x^2-12x+18$

$=2(x^2-6x+9)$

$=2(x-3)^2$

故答案为： $2(x-3)^2$.

【点睛】本题考查了因式分解和多项式乘法的关系及多项式的因式分解. 根据题意，确定原来的二次三项式是解答本题的关键.

9.已知 a , b , c 是正整数, $a > b$, 且 $a^2-ab-ac+bc=11$, 则 $a-c$ =_____

【答案】1 或 11

【解析】

【分析】

根据因式分解的分组分解法即可求解.

【详解】 $a^2 - ab - ac + bc = 11$

$$(a^2 - ab) - (ac - bc) = 11$$

$$a(a - b) - c(a - b) = 11$$

$$(a - b)(a - c) = 11$$

$$\because a > b,$$

$$\therefore a - b > 0, \text{ 又 } \because a, b, c \text{ 是正整数,}$$

$$\therefore a - b = 1 \text{ 或 } 11, a - c = 11 \text{ 或 } 1.$$

故答案为: 1 或 11.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 解答本题的关键是掌握分组分解法分解因式.

10. 对于任意正整数 n , 整式 $n^3 + (n+1)^3 + n^2 - (n+1)^2$ 的值一定是_____的倍数 (填最大的正整数)

【答案】 6

【解析】

【分析】

原式用分组分解法按一三、二四分组, 进行化简, 然后判定结果同时被 2 和 3 整除, 即能被 6 整除, 即可解答本题.

【详解】 $n^3 + (n+1)^3 + n^2 - (n+1)^2$

$$= (n^3 + n^2) + [(n+1)^3 - (n+1)^2]$$

$$= n^2(n+1) + (n+1)^2[n+1-1]$$

$$= n^2(n+1) + n(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(n+n+1)$$

$$= n(n+1)(2n+1).$$

$$\because n \text{ 和 } n+1 \text{ 有一个是偶数,}$$

$$\therefore n(n+1)(2n+1) \text{ 能被 } 2 \text{ 整除,}$$

若 n 能被 3 整除, 则 $n(n+1)(2n+1)$, 能被 3 整除,

若 n 除 3 余数是 2, 则 $n+1$ 除 3 余数是 3, 即能被 3 整除,

若 n 除 3 余数是 1, 设 $n = 3k + 1$, 则 $2n + 1 = 6k + 2 + 1 = 6k + 3$, 能被 3 整除,

$\therefore n(n+1)(2n+1)$ 能被3整除.

$\because 2$ 和3互质, $2 \times 3 = 6$,

$\therefore n(n+1)(2n+1)$ 能被6整除,

则整式 $n^3 + (n+1)^3 + n^2 - (n+1)^2$ 的值一定是6的倍数.

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 正确用分组分解法分解因式是解答本题的关键.

11. 已知二次三项式 $x^2 + (m-1)x + 4$ 是完全平方式, 则常数 m 的值是_____

【答案】 5 或 -3

【解析】

【分析】

利用完全平方公式的结构特征判断即可求出 m 的值.

【详解】 $\because$ 二次三项式 $x^2 + (m-1)x + 4$ 是完全平方式,

$\therefore m-1 = \pm 4$,

解得: $m=5$ 或 -3 .

故答案为: 5 或 -3 .

【点睛】 本题考查了完全平方式, 熟练掌握完全平方公式是解答本题的关键.

12. 已知 $1-2x+y$ 是 $4xy-4x^2-y^2-k$ 的一个因式, 则常数 k 的值是_____

【答案】 -1

【解析】

【分析】

根据多项式结构特点整理后判断出是运用平方差公式进行的分解, 即可求解.

【详解】 $\because 4xy-4x^2-y^2-k = -k - (2x-y)^2$, 它的一个因式 $1-2x+y=1-(2x-y)$,

$\therefore$ 分解时是利用平方差公式,

$\therefore -k=1^2=1$,

$\therefore k=-1$.

故答案为: -1 .

【点睛】 本题考查了平方差公式, 由已知中的两个因式, 发现它们的关系符合平方差的形式是解答本题的关键.

13. 已知 $a+b=5$, $ab=3$, 代数式 $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$ 的值是_____

【答案】 -9

【解析】

【分析】

利用平方差公式和多项式的乘法法则将所求代数式变形为 $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$ ，再利用积的乘方以及完全平方公式得到原式 $= (ab)^2 - (a+b)^2 + 2ab + 1$ ，然后把 $a+b=5$ ， $ab=3$ 代入计算即可.

【详解】 $\because a+b=5$ ， $ab=3$ ，

$$\therefore \text{原式} = (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

$$= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$$

$$= (ab)^2 - (a^2 + b^2) + 1$$

$$= (ab)^2 - (a+b)^2 + 2ab + 1$$

$$= 3^2 - 5^2 + 2 \times 3 + 1$$

$$= 9 - 25 + 6 + 1$$

$$= -9.$$

故答案为： -9.

【点睛】 本题考查了整式的混合运算，整式乘法的平方差公式、完全平方公式及多项式与多项式相乘的法则的运用. 在求值中将条件变为 ab 与 $a+b$ 的形式是关键.

14. 已知 a ， b ， c 满足 $a-b=8$ ， $ab+c^2+16=0$ ，则 $2a+b+c$ 的值是_____

【答案】 4

【解析】

【分析】

由 $a-b=8$ ，得出 $a=b+8$ ，进一步代入 $ab+c^2+16=0$ ，进一步利用完全平方公式分组分解，进一步利用非负数的性质求得 a 、 b 、 c 的数值，进一步代入求得答案即可.

【详解】 $\because a-b=8$ ，

$$\therefore a=b+8，$$

$$\therefore ab+c^2+16=b(b+8)+c^2+16=(b+4)^2+c^2=0，$$

$$\therefore b+4=0，c=0，$$

$$\text{解得： } b=-4，$$

$$\therefore a=4，$$

$$\therefore 2a+b+c=4.$$

故答案为：4.

【点睛】 本题考查了配方法的运用，非负数的性质，掌握完全平方公式是解决问题的关键.

15.已知 $x^2 - xy = 16$, $xy - y^2 = -8$, 则 $4x^2 - 7xy + 3y^2$ 的值是_____

【答案】 88

【解析】

【分析】

观察三个式子的特点，可让第一个式子左右两边都乘以 4，第二个式子两边都乘以 3，相减即可.

【详解】 $\because x^2 - xy = 16$, $xy - y^2 = -8$,

$$\therefore 4x^2 - 4xy = 64 \quad (1),$$

$$3xy - 3y^2 = -24 \quad (2),$$

(1) - (2) 得

$$4x^2 - 7xy + 3y^2 = 88.$$

故答案为：88.

【点睛】 本题考查了代数式求值的方法，同时还隐含了整体的数学思想和正确运算的能力.

16.已知 $ab + a + b = bc + b + c = ac + a + c = 8$, 则 $(a+1)(b+1)(c+1) =$ _____

【答案】 ± 27

【解析】

【分析】

由每个等式的结果等于 8，得到与 $(a+1)$, $(b+1)$, $(c+1)$ 有关的值，进而代入所给代数式求值即可.

【详解】 由题意得： $ab + a + b = 8$,

$$\therefore ab + a + b + 1 = 9,$$

$$\therefore (ab + a) + (b + 1) = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1) = 9,$$

$$\text{即 } (a + 1)(b + 1) = 9,$$

$$\text{同理可得： } (b + 1)(c + 1) = 9,$$

$$(a + 1)(c + 1) = 9,$$

$$\therefore [(a + 1)(b + 1)(c + 1)]^2 = 9 \times 9 \times 9,$$

$$\therefore (a + 1)(b + 1)(c + 1) = \pm 27.$$

故答案为： ± 27 .

【点睛】 本题考查了代数式的求值，利用因式分解得到和所给代数式相关的值是解答本题的关键.

17.已知实数 a 、 b 满足 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $2a^2 + 7b^2$ 的最小值是_____

【答案】 2

【解析】

【分析】

根据 $a^2+b^2=1$ 求出 a^2 ，再把代数式变形，然后结合非负数的性质即可求得结果.

【详解】 $\because a^2+b^2=1$,

$$\therefore a^2=1-b^2,$$

$$\therefore 2a^2+7b^2=2(1-b^2)+7b^2=2+5b^2.$$

$$\because b^2 \geq 0,$$

$$\therefore 2+5b^2 \geq 2,$$

$\therefore$ 当 $b=0$ 时, $2a^2+7b^2$ 的值最小, 最小值是 2.

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查了非负数的性质, 解答本题的关键是把已知代数式变形后代入未知.

18. 已知 $a+2b+3c+4d=a^2+b^2+c^2+d^2=30$, 则 $ab+bc+cd+da=$ _____

【答案】 24

【解析】

【分析】

先对已知进行变形, 求得 a 、 b 、 c 、 d 的值, 再代入求解.

【详解】 $\because a+2b+3c+4d=30$,

$$\therefore 2a+4b+6c+8d=60 \text{ ①}$$

$$\text{又 } \because a^2+b^2+c^2+d^2=30 \text{ ②}$$

$$\text{②} - \text{①}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2a-4b-6c-8d=-30$$

$$\text{可变形为 } (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2+(d-4)^2=0,$$

$$\therefore a=1, b=2, c=3, d=4,$$

$$\therefore ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)=(a+c)(b+d)=4 \times 6=24.$$

故答案为: 24.

【点睛】 本题考查了完全平方公式以及非负数的性质. 当所给的等式比字母少时, 又需要知道字母的值, 往往需要变成一种特殊形式: 几个非负数的和为 0, 则这几个非负数同时为 0.

二、选择题

19. 已知二次三项式 $21x^2+ax-10$ 可分解成两个整系数的一次因式的乘积, 那么 ()

- A. a 一定是奇数
C. a 一定是负数

- B. a 一定是偶数
D. a 可为奇数也可为偶数

【答案】A

【解析】

【分析】

根据十字相乘法的分解方法，以及奇数+偶数=奇数，奇数-偶数=奇数即可求解.

【详解】设 $21x^2+ax-10=(mx+p)(nx+q)=mnx^2+(mq+pn)x+pq$

$$\therefore mn=21, pq=-10, a=mq+pn.$$

$\therefore m、n$ 为奇数， $p、q$ 有一个为偶数，一个为奇数，

$\therefore mq、pn$ 中有一个为奇数，一个为偶数，

$\therefore a=mq+pn$ 一定是奇数.

故选：A.

【点睛】本题考查了因式分解-十字相乘法等，运用十字相乘法分解因式时，要注意观察，尝试，并体会它实质是二项式乘法的逆过程.

20. 下列各式中，正确分解因式的个数为 ()

① $x^3 + 2xy + x = x(x^2 + 2y)$

② $x^2 + 2xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$

③ $-2x^2 + 8y^2 = -(2x + 4y)(x - 2y)$

④ $a^3 - abc + a^2b - a^2c = a(a - c)(a + b)$

⑤ $(m - n)(2x - 5y - 7z) + (m - n)(3y - 10x + 3z) = -(m - n)(8x + 2y + 4z)$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】

因式分解的基本方法有提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法等，分解的结果要分解到不能再分解为止，根据这些基本的分解方法及分解要求逐个选项分析即可.

【详解】①左边为三项，右边乘开为两项，故错误；

②右边 $(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \neq$ 左边，故错误；

③公因数 2 未提出来，故错误；

$$\textcircled{4} a^3 - abc + a^2b - a^2c$$

$$= (a^3 + a^2b) - (abc + a^2c)$$

$$= a^2(a+b) - ac(a+b)$$

$$= a(a-c)(a+b)$$

④正确；

⑤等式右边的 $(8x+2y+4z)$ 未提取公因数 2，故错误。

综上，只有④正确。

故选：A.

【点睛】 本题考查了因式分解的方法，熟练掌握分解的基本方法及分解要求，是解答本题的关键。

21. 多项式 $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$ 有因式 ()

A. $a+b+c$

B. $c+a-b$

C. $a^2 + b^2 + c^2 - bc + ac - ab$

D. $bc - ac + ab$

【答案】 B

【解析】

【分析】

当被分解的式子是四项时，应考虑运用分组分解法进行分解。

【详解】 原式 $= (a+c)^3 - b^3 + 3abc - 3ac(a+c)$

$$= (a+c-b)[(a+c)^2 + b(a+c) + b^2] - 3ac(a+c-b)$$

$$= (a+c-b)[(a+c)^2 + b(a+c) + b^2 - 3ac]$$

$$= (a+c-b)[a^2 + c^2 + 2ac + ab + ac + b^2 - 3ac]$$

$$= (a+c-b)(a^2 + c^2 + b^2 + ab + ac - ac).$$

故选：B.

【点睛】 本题考查了分组分解法分解因式，难点是采用两两分组还是三一分组。本题还需要熟练掌握立方和立方差公式。

22. 多项式 $x^2y - y^2z + z^2x - x^2z + y^2x + z^2y - 2xyz$ 因式分解后的结果是 ()

A. $(y-z)(x+y)(x-z)$

B. $(y-z)(x-y)(x+z)$

C. $(y+z)(x-y)(x+z)$

D. $(y+z)(x+y)(x-z)$

【答案】A

【解析】

原式是一个复杂的三元三次多项式，直接分解有一定困难，把原式整理成关于某个字母按降幂排列的多项式 $(y-z)x^2 + (z^2 + y^2 - 2yz)x + z^2y - y^2z$ ，再运用提取公因式法和十字相乘法分解因式。

$$\text{解： } x^2y - y^2z + z^2x - x^2z + y^2x + z^2y - 2xyz$$

$$= (y-z)x^2 + (z^2 + y^2 - 2yz)x + z^2y - y^2z$$

$$= (y-z)x^2 + (y-z)2x - yz(y-z)$$

$$= (y-z)[x^2 + (y-z)x - yz]$$

$$= (y-z)(x+y)(x-z).$$

故选 A.

23. 多项式 $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 12x - 24y + 51$ 的最小值为 ()

A. 41

B. 32

C. 15

D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】

先将多项式 $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 12x - 24y + 51$ 分组配方，根据偶次方的非负性可得答案。

【详解】 $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 12x - 24y + 51$

$$= x^2 - 4xy + 4y^2 + 12x - 24y + 36 + x^2 + 2xy + y^2 + 15$$

$$= (x - 2y)^2 + 12(x - 2y) + 36 + (x + y)^2 + 15$$

$$= (x - 2y + 6)^2 + (x + y)^2 + 15$$

$$\because (x - 2y + 6)^2 \geq 0, (x + y)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x - 2y + 6)^2 + (x + y)^2 + 15 \geq 15.$$

故选：C.

【点睛】 本题考查了配方法在多项式最值中的应用，熟练掌握配方法并灵活运用及恰当分组，是解答本题的关键。

三、解答题

24. $x^2 + 3(x+y) + 3 - y^2 + (x-y)$

【答案】 $(x+y+1)(x-y+3)$

【解析】

【分析】

根据分组分解法先分组，再提公因式和运用公式，可分解因式.

【详解】 $x^2 + 3(x+y) + 3 - y^2 + (x-y)$
 $= x^2 - y^2 + 3(x+y) + 3 + (x-y)$
 $= (x-y)(x+y) + (x-y) + 3(x+y) + 3$
 $= (x-y)(x+y+1) + 3(x+y+1)$
 $= (x+y+1)(x-y+3).$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了提公因式法，分组分解法，公式法分解因式.

25. $x^2 - 4y^2 + 4x + 4$

【答案】 $(x+2+2y)(x+2-2y)$

【解析】

【分析】

根据分组分解法先分组，再连续运用公式，可分解因式.

【详解】 $x^2 - 4y^2 + 4x + 4$
 $= (x+2)^2 - 4y^2$
 $= (x+2+2y)(x+2-2y).$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了分组分解法，公式法分解因式.

26. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) + 1$

【答案】 $(x^2 + 5x + 5)^2$

【解析】

【分析】

先将 x^2+3x+2 和 $x^2+7x+12$ 利用十字相乘法分解因式，再分组相乘，运用整体的思想，根据完全平方公式，可分解因式.

【详解】 $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)+1$
 $= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 \\
 &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24+1 \\
 &= (x^2+5x+5)^2.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了分组分解法，公式法，十字相乘法分解因式.

$$27. (2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$$

【答案】 $(a-4)(2a+7)(2a^2-a-8)$

【解析】

【分析】

先将 a^2-9 分解因式，再重新组合相乘，运用整体思想，可分解因式.

【详解】 $(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$

$$\begin{aligned}
 &= [(2a+5)(a-3)][(2a-7)(a+3)]-91 \\
 &= (2a^2-a-15)(2a^2-a-21)-91 \\
 &= (2a^2-a)^2-15(2a^2-a)-21(2a^2-a)+224 \\
 &= (2a^2-a)^2-36(2a^2-a)+224 \\
 &= (2a^2-a-8)(2a^2-a-28) \\
 &= (a-4)(2a+7)(2a^2-a-8).
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了分组分解法，公式法，十字相乘法分解因式.

$$28. x^3-3x^2+4$$

【答案】 $(x+1)(x-2)^2$

【解析】

【分析】

将 $-3x^2$ 拆项后变为 x^2-4x^2 ，重新分组后，可分解因式.

【详解】 x^3-3x^2+4

$$\begin{aligned}
 &= x^3+x^2-4x^2+4 \\
 &= x^2(x+1)-4(x^2-1) \\
 &= x^2(x+1)-4(x+1)(x-1) \\
 &= (x+1)(x^2-4x+4) \\
 &= (x+1)(x-2)^2.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了提公因式法，分组分解法，公式法分解因式.

29. $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1$

【答案】 $(2x-1)(3x-1)(4x-1)$

【解析】

【分析】

将 $-26x^2$ 拆项后变为 $-6x^2 - 20x^2$ ，重新分组后，可分解因式.

【详解】 $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1$
 $= (24x^3 - 6x^2) - 20x^2 + 9x - 1$
 $= 6x^2(4x - 1) - (20x^2 - 9x + 1)$
 $= 6x^2(4x - 1) - (4x - 1)(5x - 1)$
 $= (4x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$
 $= (4x - 1)(2x - 1)(3x - 1).$

【点睛】 本题考查了因式分解，综合利用了提公因式法，分组分解法，十字相乘法分解因式.

30. 已知: $a - b = \frac{2}{13}$, $b - c = \frac{5}{13}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求 $ab + bc + ca$ 的值.

【答案】 $\frac{10}{13}$

【解析】

【分析】

根据已知条件 $a - b = \frac{2}{13}$, $b - c = \frac{5}{13}$, 求得 $a - c = \frac{7}{13}$; 然后由 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) -$

$2(ab + bc + ca)$, 求 $ab + bc + ca$ 的值.

【详解】 $a - b = \frac{2}{13}$, ①

$b - c = \frac{5}{13}$, ②

由①+②, 得

$a - c = \frac{7}{13}$, ③

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = \frac{4}{169} + \frac{25}{169} + \frac{49}{169} = \frac{78}{169} = \frac{6}{13},$

$\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = \frac{6}{13},$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1,$

$$\therefore 2 - 2(ab+bc+ca) = \frac{6}{13},$$

$$\therefore ab+bc+ca = \frac{10}{13}.$$

【点睛】 本题考查了完全平方公式，巧妙地用到了完全平方公式，把已知条件转化为三个完全平方式，然后将 $a^2+b^2+c^2=1$ 整体代入求值即可.

31.已知: $x^2 - x - 3 = 0$, 求 $(x^2 + 3x - 7)(x^3 + 2x^2 - 2x - 5) - 16x$ 的值.

【答案】 32

【解析】

【分析】

若本题利用多项式乘以多项式法则，直接展开，次数高项数多，考虑把已知整体代入两个多项式因式，从而使运算简便.

【详解】 $\because x^2 - x - 3 = 0$,

$$\therefore x^2 = x + 3, \quad x^2 - x = 3.$$

$$\therefore x^2 + 3x - 7 = x^2 - x + 4x - 7$$

$$= 3 + 4x - 7$$

$$= 4x - 4,$$

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 5 = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x + x - 5$$

$$= x(x^2 - x) + 3(x^2 - x) + x - 5$$

$$= 3x + 9 + x - 5$$

$$= 4x + 4,$$

$$\therefore (x^2 + 3x - 7)(x^3 + 2x^2 - 2x - 5) - 16x$$

$$= (4x - 4)(4x + 4) - 16x$$

$$= 16x^2 - 16x - 16$$

$$= 16(x^2 - x) - 16$$

$$\because x^2 - x = 3,$$

$$\therefore \text{原式} = 16 \times 3 - 16 = 32.$$

【点睛】 本题考查了多项式乘以多项式法则和整体代入的思想. 变形已知整体代入两个多项式因式，是解答本题的关键.

32.已知: $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, 求 $x^3 + y^3$ 的值.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

首先根据完全平方公式 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ ，把 $x+y$ ， x^2+y^2 的值整体代入求出 xy 的值．运用立方和公式变形 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ，将 $x+y$ ， xy ， x^2+y^2 的值整体代入求得结果．

【详解】 $\because x+y=1$,

$$\therefore x^2+y^2+2xy=1,$$

$$\text{又} \because x^2+y^2=2,$$

$$\therefore 2xy=-1,$$

$$\therefore xy=-\frac{1}{2},$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=1 \times (2+\frac{1}{2})=\frac{5}{2}.$$

【点睛】 本题考查了因式分解的应用．解答本题的关键是灵活运用完全平方公式的变形，将 $x+y$ 、 xy 、 x^2+y^2 作为整体代入．

33.已知: $(x-2019)^2+(x-2020)^2=5$, 求 $(2019-x)(2020-x)$ 的值.

【答案】 -2

【解析】

【分析】

根据完全平方公式得出 $(x-2019)^2+(x-2020)^2=[(x-2019)-(x-2020)]^2+2(x-2019)(x-2020)=5$ ，再求出 $(x-2019)(x-2020)$ 的值即可．

【详解】 $\because (x-2019)^2+(x-2020)^2=[(x-2019)-(x-2020)]^2+2(x-2019)(x-2020)=5$,

$$\therefore 1+2(x-2019)(x-2020)=5,$$

$$\text{解得: } (x-2019)(x-2020)=2,$$

$$\therefore (2019-x)(x-2020)=-2.$$

【点睛】 本题考查了多项式乘以多项式和完全平方公式，能灵活运用公式进行变形是解答本题的关键．

34.若 $a^2-b-1=0$, 且 $(a^2-1)(b+2) < a^2b$.

(I) 求 b 的取值范围;

(II) 若 $a^4-2b-2=0$, 求 b 的值.

【答案】 (I) b 的取值范围为 $b < 0$; (II) b 的值为 -1 .

【解析】

【分析】

(I) 根据多项式乘以多项式化简不等式, 再整体代入即可得结论;

(II) 首先进行提公因数 2, 然后再整体代换 $b+1$ 即可求得结论.

【详解】解: (I) $\because a^2 - b - 1 = 0$,

$$\therefore a^2 - b = 1, \quad a^2 = b + 1,$$

$$(a^2 - 1)(b + 2) < a^2 b.$$

$$a^2 b + 2a^2 - b - 2 < a^2 b$$

$$a^2 + a^2 - b - 2 < 0,$$

$$a^2 + 1 - 2 < 0,$$

$$a^2 < 1, \therefore b + 1 < 1, \therefore b < 0.$$

答: b 的取值范围为 $b < 0$.

$$(II) \quad a^4 - 2b - 2 = 0, \quad a^4 - 2(b + 1) = 0,$$

$$\therefore a^2 = b + 1,$$

$$\therefore a^4 - 2a^2 = 0,$$

解得 $a^2 = 0$ 或 $a^2 = 2$,

$$\therefore a^2 < 1,$$

$$\therefore a^2 = 0,$$

$$\therefore b + 1 = 0,$$

$$\therefore b = -1.$$

答: b 的值为 -1 .

【点睛】本题考查了提公因式的应用, 解决本题的关键是整体代入思想的运用.

35. 已知: $a^2 + b^2 = 4$, $c^2 + d^2 = 10$, $ac + bd = 2$, 求 $ad - bc$ 的值.

【答案】 ± 6

【解析】

【分析】

依据 $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, 即可得到 $ad - bc$ 的值.

【详解】 $\because (ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$,
 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$,
 $\therefore (ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$,
 又 $\because a^2+b^2=4, c^2+d^2=10, ac+bd=2$,
 $\therefore 2^2+(ad-bc)^2=4 \times 10$,
 解得: $(ad-bc)^2=36$,
 $\therefore ad-bc=\pm 6$.

【点睛】 本题考查了整式的混合运算, 依据整式的化简得出 $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 是解答问题的关键.

36. 已知: $a+b+c=1, ab+bc+ca=-2, abc=-1$, 设 $s_1=a+b+c, s_2=a^2+b^2+c^2$,
 $s_3=a^3+b^3+c^3, \dots, s_n=a^n+b^n+c^n$

(1) 计算 $s_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_4 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 写出 $s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n$ 四者之间的关系, 并证明你的结论.

(3) 根据 (2) 的结论, 直接写出 $a^6+b^6+c^6$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 (1) 5, 4, 13; (2) $s_n=s_{n-1}+2s_{n-2}-s_{n-3}$, 见解析; (3) 38

【解析】

【分析】

(1) $s_2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1+4=5$, 由 $(a+b+c)^3=-2(a^3+b^3+c^3)+6abc+3(a^2+b^2+c^2)$, 可求 s_3 , 由 $(a^2+b^2+c^2)^2=25$ 变形可求 s_4 ;

(2) $s_n=s_{n-1} \cdot (a+b+c) - (a^{n-1}b+a^{n-1}c+ab^{n-1}+cb^{n-1}+ac^{n-1}+bc^{n-1})=s_{n-1} \cdot (a+b+c) - [s_{n-2} \cdot (ab+ac+bc) - abc^{n-2} - ab^{n-2}c - a^{n-2}bc]=s_{n-1} \cdot (a+b+c) - s_{n-2} \cdot (ab+ac+bc) + s_{n-3} \cdot abc$, 将已知条件代入即可;

(3) 利用所求关系式可得: $s_5=s_4+2s_3-s_2=13+8-5=16$, 则 $s_6=s_5+2s_4-s_3=16+26-4=38$.

【详解】 (1) $s_2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1+4=5$,
 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$.
 $\because a+b+c=1, abc=-1$,
 $\therefore (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(1-a)+3b^2(1-b)+3c^2(1-c)+6abc$
 $\therefore (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2-3a^3+3b^2-3b^3+3c^2-3c^3+6abc$
 $\therefore (a+b+c)^3=-2(a^3+b^3+c^3)-6+3(a^2+b^2+c^2)$,
 $\therefore s_3=a^3+b^3+c^3=4$.

$$\because ab+bc+ac=-2,$$

$$\therefore (ab+bc+ca)^2=4,$$

$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2=4,$$

$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)=4,$$

$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=6.$$

$$\because s_2=a^2+b^2+c^2=5,$$

$$\therefore (a^2+b^2+c^2)^2=25,$$

$$\therefore a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=25$$

$$\therefore a^4+b^4+c^4+2\times 6=25$$

$$\therefore s_4=a^4+b^4+c^4=13.$$

故答案为：5，4，13；

(2) 关系为 $s_n=s_{n-1}-2s_{n-2}-s_{n-3}$ ；理由：

$$s_n=s_{n-1}\cdot(a+b+c)-(a^{n-1}b+a^{n-1}c+ab^{n-1}+cb^{n-1}+ac^{n-1}+bc^{n-1})=s_{n-1}\cdot(a+b+c)-[s_{n-2}\cdot(ab+ac+bc)-abc^{n-2}-ab^{n-2}c-a^{n-2}bc]=s_{n-1}\cdot(a+b+c)-s_{n-2}\cdot(ab+ac+bc)+s_{n-3}\cdot abc.$$

$$\because a+b+c=1, \quad ab+bc+ca=-2, \quad abc=-1,$$

$$\therefore s_n=s_{n-1}+2s_{n-2}-s_{n-3};$$

$$(3) \quad \because s_5=s_4+2s_3-s_2=13+8-5=16,$$

$$\therefore s_6=s_5+2s_4-s_3=16+26-4=-38,$$

$$\therefore a^6+b^6+c^6 \text{ 的为 } 38.$$

故答案为：38.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用；理解题意，将已知式子进行合理的变形，再运用因式分解进行求解是解答本题的关键.