

张江集团学校 2018 学年第一学期初三数学期中试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 抛物线 $y = -x^2 + x - 1$ 与 x 轴和 y 轴的公共点个数是 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】B

【解析】

【分析】

根据抛物线与 x 轴的交点个数与系数的关系, 求出 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值, 即可判断. 再求出抛物线与 y 轴的交点坐标即可.

【详解】 $\because$ 抛物线解析式为: $y = -x^2 + x - 1$,

$$\therefore a = -1, b = 1, c = -1,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 1 - 4 = -3 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴没有交点,

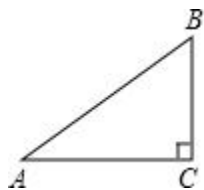
当 $x = 0$ 时, $y = -1$.

抛物线与 y 轴有一个交点.

故选 B.

【点睛】考查抛物线与 x 轴, y 轴的交点个数, 掌握判断的方法是解题的关键.

2. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, $AB = 2$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A = \frac{1}{2}$ C. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B = \sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据三角函数的定义求解.

【详解】解：∵在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，BC=1，AB=2.

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}.$$

故选：D.

【点睛】本题考查了解直角三角形，解答此题关键是正确理解和运用锐角三角函数的定义.

3. 在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，如果 AD=2，BD=3，那么由下列条件能够判定 DE∥BC 的是()

A. $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ B. $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ C. $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据平行线分线段成比例定理的逆定理,当 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ 或 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 时, DE ∥ BD, 然后可对各选项进行判断.

【详解】解：当 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ 或 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 时, DE ∥ BD,

即 $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$.

所以 D 选项是正确的.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理:三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例.也考查了平行线分线段成比例定理的逆定理.

4. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 下列命题是假命题的是 ()

A. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据平行向量的性质, 可得 A, B, D 均正确; 由向量模的意义, 可知 C 错误.

【详解】A.如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 且方向相同;故正确;

B.如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 且方向相反;故正确;

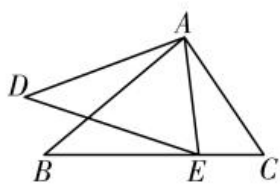
C.如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, ;故错误;

D.如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{c}$.正确.

故选:C

【点睛】 本题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意理解平行向量与模的意义是解此题的关键.

5. 如图, 如果 $\angle BAD = \angle CAE$, 那么添加下列一个条件后, 仍不能确定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 相似的是 ().



A. $\angle B = \angle D$

B. $\angle C = \angle AED$

C. $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{BC}$

D. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

【答案】C

【解析】

【分析】

由 $\angle BAD = \angle CAE$ 结合图形可得 $\angle DAE = \angle CAB$, 所以再需一对对应角相等或或夹这个角的两边对应成比例即可.

【详解】 $\because \angle BAD = \angle CAE$, $\therefore \angle DAE = \angle BAC$,

$\therefore$ A, B 可由两角对应相等的三角形相似, 判定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, D 可据一角对应相等夹边成比例判定 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

选项 C 中不是夹这两个角的边, 所以不能判定相似.

故选: C.

【点睛】 此题考查相似三角形的判定. 其关键是先看已知什么条件, 结合已知的条件, 再据相似的判定方法找所缺条件.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AF、BE 是其两条中线, 满足 $AF \perp BE$, 若 $CA=3$, $CB=4$, 那么 AB 的长为 ()

A. $\sqrt{7}$

B. 5

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{7}{2}$

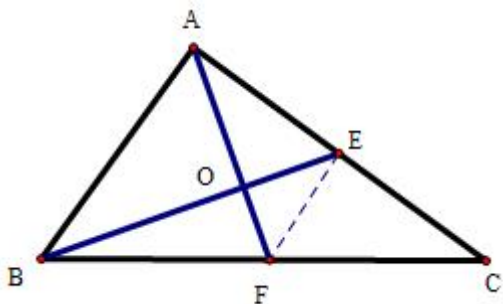
【答案】C

【解析】

【分析】

连接 EF , 根据中位线定理以及中线的性质得到 $EF \parallel AB$, $EF = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}$, $BF = \frac{1}{2}BC = 2$. 即可证明 $\triangle OEF \sim \triangle OBA$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{EF}{AB} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} = \frac{1}{2}$, 设 $OE = x$, $OF = y$, 则 $OB = 2x$, $OA = 2y$, 根据勾股定理得到关于 x, y 的方程组, 得到 EF 的长, 即可求出 AB 的长.

【详解】如图: 连接 EF ,



AF 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的两条中线,

$$EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB, AE = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}, BF = \frac{1}{2}BC = 2.$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle OBA,$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } OE = x, OF = y,$$

$$\text{则 } OB = 2x, OA = 2y,$$

$$AF \perp BE,$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = \frac{9}{4} \\ y^2 + 4x^2 = 4, \end{cases}$$

$$\therefore 5x^2 + 5y^2 = \frac{25}{4},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{4},$$

$$EF = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$AB = 2EF = \sqrt{5}.$$

【点睛】考查三角形的中位线定理，相似三角形的判定与性质，勾股定理等，综合性比较强，对学生要求较高.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 线段 b 是线段 a 和线段 c 的比例中项, 若 $a=1\text{cm}$, $b=3\text{cm}$, 则 $c=\underline{\hspace{1cm}}\text{cm}$.

【答案】9

【解析】

【分析】

根据比例中项的定义, 列出比例式即可得出 c 的值, 注意线段不能为负.

【详解】 $\because$ 线段 b 是线段 a 和线段 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac,$$

$$\because a=1, b=3,$$

$$\therefore c=9,$$

故答案为 9.

【点睛】考查比例中项的定义, 掌握比例中项的定义是解题的关键.

8. 如果点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP < PB$, 那么 $\frac{PB}{PA}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】

直接根据黄金分割的定义求解.

【详解】 $\because P$ 是线段 AB 的黄金分割点($AP < PB$),

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB, \quad AP = AB - BP = \frac{3-\sqrt{5}}{2} AB,$$

$$\text{即 } \frac{PB}{PA} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} AB}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

【点睛】考查黄金分割点的概念, 掌握黄金分割值是解题的关键.

9. 如果抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + (m-1)x - m + 2$ 的对称轴是 y 轴, 那么 m 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】

由对称轴是 y 轴可知一次项系数为 0, 可求得 m 的值.

【详解】 $\because y = \frac{1}{2}x^2 + (m-1)x - m + 2$ 的对称轴是 y 轴,

$\therefore m-1=0$, 解得 $m=1$,

故答案为 1.

【点睛】考查二次函数的性质, 熟练抛物线的对称轴方程是解题的关键.

10. 如果两个相似三角形的面积比是 4: 9, 那么它们对应高的比是_____

【答案】 2: 3.

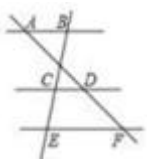
【解析】

试题分析: 已知两个相似三角形的面积比是 4: 9, 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出相似比

是 2: 3, 根据相似三角形对应高的比等于相似比即可得它们对应高的比是 2: 3.

考点: 相似三角形的性质.

11. 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $\frac{AD}{AF} = \frac{3}{5}$, $BE=12$, 那么 CE 的长为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】

根据平行线分线段成比例得到 $\frac{AD}{AF} = \frac{BC}{BE}$, 即 $\frac{3}{5} = \frac{BC}{12}$, 可计算出 BC , 然后利用 $CE=BE-BC$ 进行计算.

【详解】 $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{BC}{BE}, \text{即} \frac{3}{5} = \frac{BC}{12},$$

$$\therefore BC = \frac{36}{5},$$

$$\therefore CE = BE - BC = 12 - \frac{36}{5} = \frac{24}{5}.$$

故答案为 $\frac{24}{5}$.

【点睛】考查平行线分线段成比例定理，三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

12. 如果将抛物线 $y = 2x^2$ 平移，使得平移后的抛物线的顶点坐标为 $(-2, 2)$ ，那么平移后的抛物线的表达式为_____.

【答案】 $y = 2(x+2)^2 + 2$

【解析】

【分析】

平移不改变抛物线的开口方向与开口大小，即解析式的二次项系数不变，根据抛物线的顶点式可求抛物线解析式.

【详解】 $\because$ 原抛物线解析式为 $y = 2x^2$ ，平移后抛物线顶点坐标为 $(-2, 2)$,

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式为: $y = 2(x+2)^2 + 2$.

故答案为 $y = 2(x+2)^2 + 2$.

【点睛】考查二次函数的顶点式，掌握二次函数的顶点式是解题的关键.

13. 在以 O 为坐标原点的直角平面内有一点 $A(2, 4)$ ，如果 AO 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，那么 α 的余弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】

利用锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识求解.

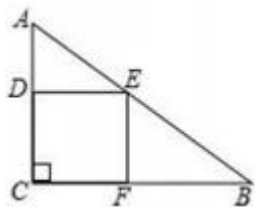
【详解】根据题意可得 $OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

所以 $\cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】考查锐角三角函数的定义，坐标与图形性质，勾股定理，掌握余弦定理的概念是解题的关键.

14. 如图，正方形 CDEF 内接于直角 $\triangle ABC$ ，点 D,E,F 分别在边 AC,AB 和 BC 上，当 $AD=2$ ， $BF=3$ 时，正方形 CDEF 的面积是_____.



【答案】6

【解析】

【分析】

首先设正方形 CDEF 的边长为 x ，易得 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，然后由相似三角形的对应边成比例，求得答案；

【详解】设正方形 CDEF 的边长为 x ，则 $DE=CF=CD=x$ ， $BC=CF+BF=3+x$ ， $AC=AD+CD=2+x$ ，

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \frac{x}{x+3} = \frac{2}{x+2},$$

$$\text{解得: } x = \pm\sqrt{6},$$

$$\therefore DE = \sqrt{6},$$

$$\therefore \text{正方形 CDEF 的面积是: } 6;$$

故答案为 6.

【点睛】考查相似三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

15. 在直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0, m)$ ，且 $m \neq 0$ ，点 B 的坐标为 $(n, 0)$ ，将线段 AB 绕点 B 顺时针旋转 90° ，得到线段 BP，我们称点 P 为点 A 关于点 B 的“正伴随点”. 已知点 $A(0, 2017)$ ， $B(-1, 0)$ ，则点 A 关于点 B 的“正伴随点”的坐标为_____.

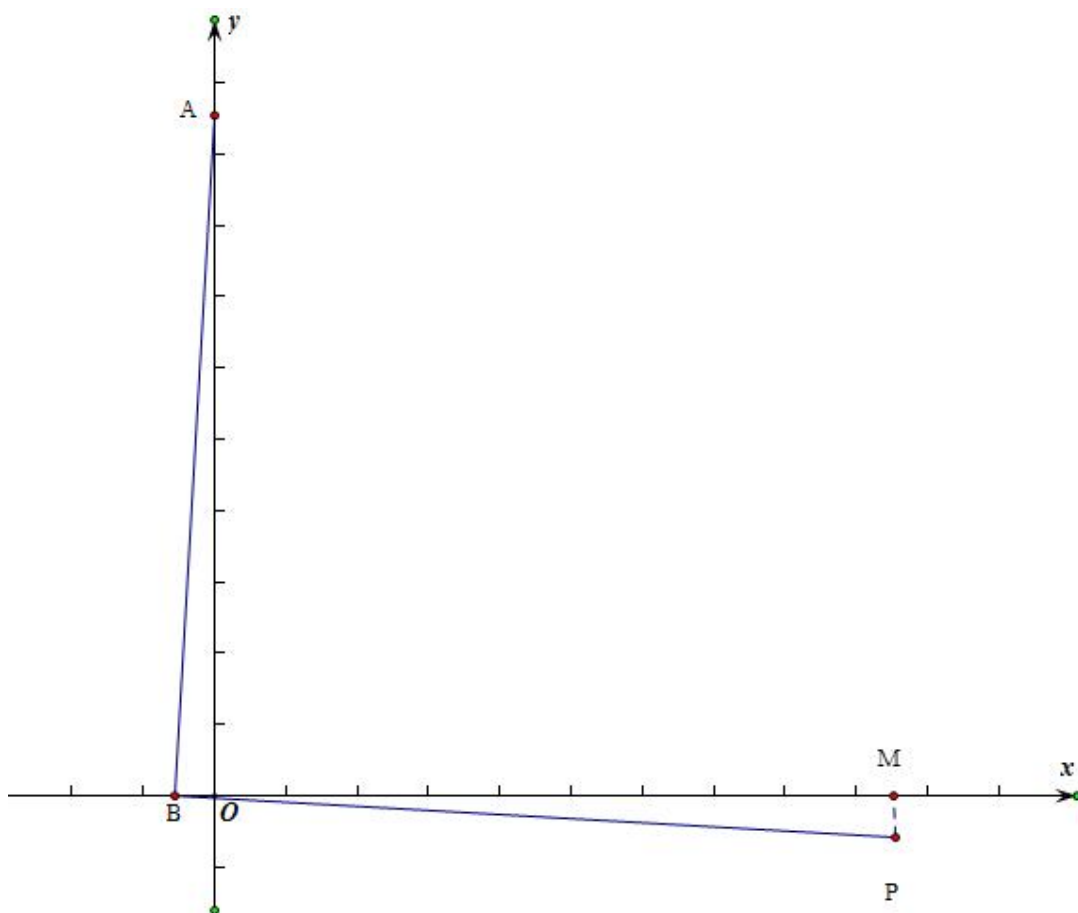
【答案】(2016, -1)

【解析】

【分析】

根据全等三角形即可解决问题；

【详解】如图中,作 $PM \perp x$ 轴于 M .



$\because AB=BP, \angle AOB = \angle PMB = 90^\circ$, 易证 $\angle ABO = \angle P$,

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BPM$,

$\therefore OA=BM, OB=PM$,

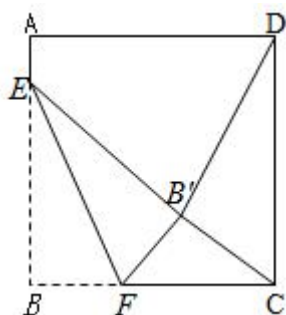
当 $A(0, 2017), B(-1, 0)$ 时, $BM=2017, PM=1$, $OM=2016$,

$\therefore P(2016, -1)$

故答案为: $(2016, -1)$

【点睛】考查全等三角形的判定与性质, 画出示意图, 数形结合是解题的关键.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长是 16, 点 E 在边 AB 上, $AE=3$, 点 F 是边 BC 上不与点 B 、 C 重合的一个动点, 把 $\triangle EBF$ 沿 EF 折叠, 点 B 落在 B' 处, 若 $\triangle CDB'$ 恰为等腰三角形, 则 DB' 的长为_____.



【答案】16 或 $4\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】

【详解】(1) 当 $B'D=B'C$ 时, 过 B' 点作 $GH\parallel AD$, 则 $\angle B'GE=90^\circ$,

当 $B'C=B'D$ 时, $AG=DH=\frac{1}{2}DC=8$, 由 $AE=3$, $AB=16$, 得 $BE=13$.

由翻折的性质, 得 $B'E=BE=13$,

$$\therefore EG=AG-AE=8-3=5,$$

$$\therefore B'G=\sqrt{B'E^2-EG^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12,$$

$$\therefore B'H=GH-B'G=16-12=4,$$

$$\therefore DB'=\sqrt{B'H^2+DH^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5};$$

(2) 当 $DB'=CD$ 时, 则 $DB'=16$ (易知点 F 在 BC 上且不与点 C 、 B 重合);

(3) 当 $CB'=CD$ 时,

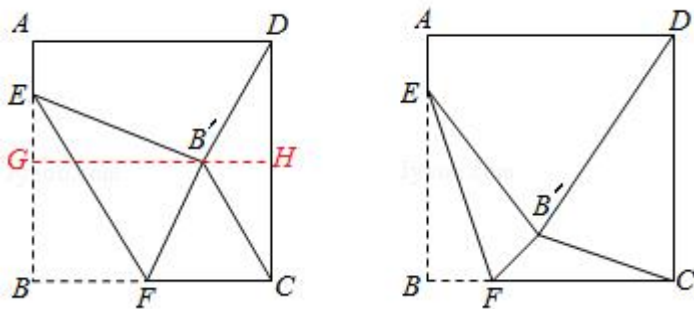
$$\because EB=EB', CB=CB',$$

$\therefore$ 点 E 、 C 在 BB' 的垂直平分线上,

$\therefore EC$ 垂直平分 BB' ,

由折叠可知点 F 与点 C 重合, 不符合题意, 舍去.

综上所述, DB' 的长为 16 或 $4\sqrt{5}$. 故答案为 16 或 $4\sqrt{5}$.



考点: 1. 翻折变换 (折叠问题); 2. 分类讨论.

17. 已知抛物线 $f(x)=x^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点以及图像顶点形成了一个等边三角形, 将抛物线向上平移 m 个单位后, 这个等边三角形变成了一个等腰直角三角形, 那么 m 的值为_____.

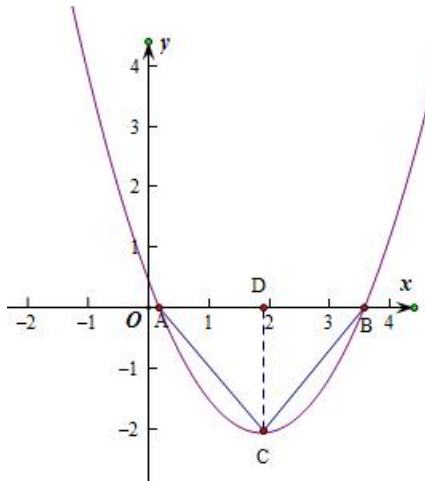
【答案】2

【解析】

【分析】

分别画出图形，根据等边三角形和直角三角形的性质进行分析即可．

【详解】如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形，



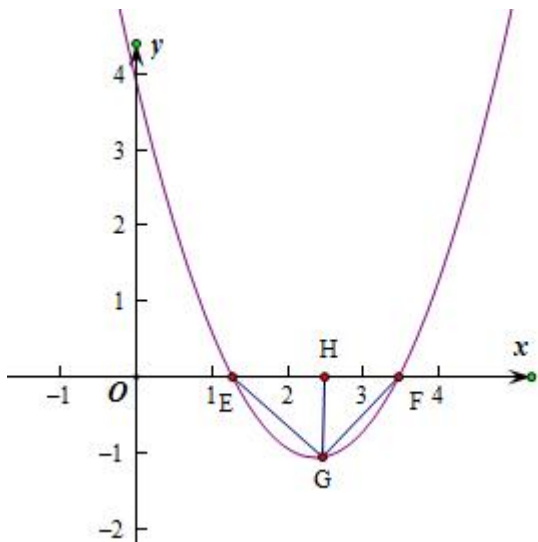
$$|CD| = \left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right| = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4c}{4},$$

$$|AB| = |AC| = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \sqrt{b^2 - 4c},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } 2 \times \frac{b^2 - 4c}{4} = \sqrt{3} \times \sqrt{b^2 - 4c}, \text{ 整理得: } b^2 - 4c = 12, \text{ ①}$$

抛物线向上平移 m 个单位后，所得抛物线为： $y = x^2 + bx + c + m$ ，

如图所示： $\triangle EFG$ 是等腰直角三角形，



$$|GH| = \left| \frac{4a(c + m) - b^2}{4a} \right| = \frac{b^2 - 4a(c + m)}{4a} = \frac{b^2 - 4(c + m)}{4},$$

$$|EF| = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c+m)}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c+m)}}{2a} = \frac{2\sqrt{b^2 - 4a(c+m)}}{2a} = \sqrt{b^2 - 4(c+m)},$$

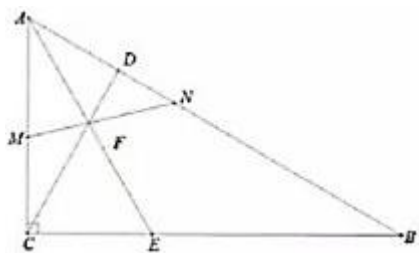
$$EF = 2GH, \text{ 即 } \sqrt{b^2 - 4(c+m)} = 2 \times \frac{b^2 - 4(c+m)}{4}, \text{ 整理得: } b^2 - 4c - 4m = 4, \text{ ②}$$

①②联立, 可得 $12 - 4m = 4$, 解得: $m = 2$.

故答案为 2.

【点睛】属于二次函数综合题, 考查等边三角形的性质, 锐角三角函数, 等腰直角三角形的性质, 二次函数的顶点坐标等, 综合性比较强, 难度较大.

18. 如图, 直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\sin B = \frac{1}{2}$, CD 为斜边上的高, AE 为 $\angle CAB$ 的平分线, 且 CD 、 AE 交于点 F , 点 M 为 AC 上一点, 联结 MF 并延长, 交边 AB 于点 N , 已知 $AC = 2\sqrt{3}$, $AM = 2$, 那么 $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数可得 $\angle B = 30^\circ$, 根据直角三角形的性质得到 $\angle BAC = 60^\circ$, CD 为斜边上的高, 可得

$\angle ACD = 30^\circ$, $AD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$, AE 为 $\angle CAB$ 的平分线, 则

$\angle DAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$, $\tan \angle DAE = \frac{DF}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即可求出 $DF = 1$, 根据勾股定理求出

$AF = AM = 2$, $\angle AMF = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$, 根据三角形的内角和求出 $\angle ANF = 45^\circ$, $DN = DF = 1$, 即

可求出 AN , 代入计算即可.

【详解】根据锐角三角函数 $\sin B = \frac{1}{2}$, 可得 $\angle B = 30^\circ$,

则 $\angle BAC = 60^\circ$,

CD 为斜边上的高,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\angle ACD = 30^\circ, AD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3},$$

AE 为 $\angle CAB$ 的平分线,

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ,$$

$$\tan \angle DAE = \frac{DF}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore DF = 1, \text{ 根据勾股定理求出 } AF = AM = 2, \angle AMF = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

根据三角形的内角和求出 $\angle ANF = 45^\circ$, $DN = DF = 1$,

$$AN = AD + DN = \sqrt{3} + 1,$$

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】考查解直角三角形, 勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质等, 综合性比较强, 熟练运用锐角三角函数是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $|\sin 45^\circ - \tan 45^\circ| + \frac{\cos 30^\circ - \tan 60^\circ - \cos 45^\circ}{\cot 30^\circ}$

【答案】 $\frac{3 - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】

直接利用特殊角的三角函数值代入求出即可.

【详解】原式 $= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}},$

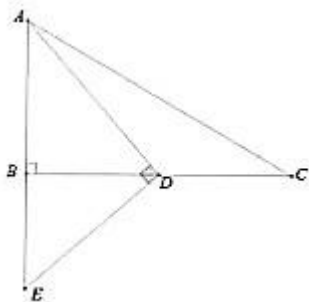
$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}, \\
&= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-3 - \sqrt{6}}{6}, \\
&= \frac{6}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{-3 - \sqrt{6}}{6}, \\
&= \frac{3 - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}.
\end{aligned}$$

【点睛】考查特殊角的三角函数值，熟记特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\tan \angle BAC = \sqrt{3}$ ，点 D 为 BC 中点，联结 AD，过点 D 作 $DE \perp AD$ ，交 AB 的延长线于点 E.

(1) 若 $AD = \sqrt{14}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 求 $\frac{BE}{AB}$ 的值



【答案】(1) $4\sqrt{3}$ ；(2) $\frac{3}{4}$

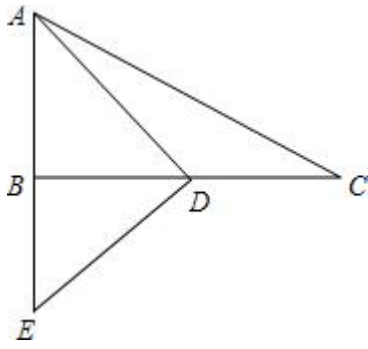
【解析】

【分析】

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 所对的直角边是斜边的一半，则 $AC = 2AB$. 设 $AB = k$ ，则 $AC = 2k$ ， $BC = \sqrt{3}k$ ；然后，由中点的性质、结合在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中的勾股定理求得 k 的值；最后，根据直角三角形的面积公式来求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 由相似三角形 $\triangle ABD \sim \triangle DBE$ 的对应边成比例证得 $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BE}$ ，然后把相关线段的长度代入该比例式即可求得线段 BE 的长度，再将其代入所求的代数式求值即可.

【详解】(1) $\because \angle ABC = 90^\circ, \tan \angle BAC = \sqrt{3}$,



$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AB$$

$$\text{设 } AB = k, \text{ 则 } AC = 2k, BC = \sqrt{3}k,$$

$$\because D \text{ 为 } BC \text{ 中点},$$

$$\therefore BD = DC = \frac{\sqrt{3}}{2}k,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中}, AB^2 + BD^2 = AD^2, AD = \sqrt{14},$$

$$\therefore k^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2 = (\sqrt{14})^2,$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{2}, BC = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3};$$

$$(2) \because AD \perp DE,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle E = 90^\circ$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle E$$

$$\because \angle ABD = \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DBE$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BE},$$

$$\therefore \frac{k}{\frac{\sqrt{3}}{2}k} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{BE},$$

$$\therefore BE = \frac{3}{4}k,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{3}{4}k}{k} = \frac{3}{4}.$$

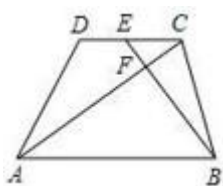
【点睛】考查相似三角形的判定与性质，勾股定理等，掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

21. 如图，梯形 ABCD 中，AB//CD，且 $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$ ，点 E 是 CD 的中点，AC 与 BE 交于点 F，若

$$\overrightarrow{AB} = \vec{m}, \overrightarrow{AD} = \vec{n}.$$

(1) 请用 $\vec{m}, \vec{n}$ 来表示 $\overrightarrow{AF}$ ；

(2) 请在图中画出 $\overrightarrow{EB}$ 在 $\vec{m}, \vec{n}$ 方向上的分向量. (不要求写出作法，但要指出所作图中表示结论的向量)



【答案】(1) $\overrightarrow{AF} = \frac{6}{11}\vec{m} + \frac{8}{11}\vec{n}$. (2) 如图所示.

【解析】

【分析】

(1) $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$, $CD = \frac{3}{4}AB$, 则 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\vec{m}$, 点 E 是 CD 的中点, $EC = \frac{1}{2}DC = \frac{3}{8}AB$, 则 $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{8}\vec{m}$, 由四边形 ABCD 是梯形, AB//CD,

根据平行线分线段成比例定理, 即可得 $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AB} = \frac{3}{8}$, $AF = \frac{8}{11}AC$, 继而求得答案;

(2) 首先把 $\overrightarrow{EB}$ 平移到点 A 处, 过点 B' 作 $B'M \parallel AD$, $B'N \parallel AB$, 根据平行四边形法则即可求得答案.

【详解】(1) $\because \frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$,

$$\therefore CD = \frac{3}{4}AB,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\vec{m},$$

点 E 是 CD 的中点,

$$EC = \frac{1}{2}DC = \frac{3}{8}AB,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{8}\vec{m},$$

四边形 ABCD 是梯形,

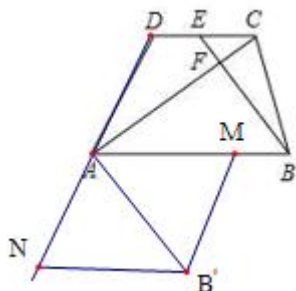
$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AB} = \frac{3}{8},$$

$$\therefore AF = \frac{8}{11}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{8}{11}\overrightarrow{AC} = \frac{8}{11}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{8}{11}\left(\vec{n} + \frac{3}{4}\vec{m}\right) = \frac{6}{11}\vec{m} + \frac{8}{11}\vec{n}.$$

(2)如图, $\overrightarrow{EB}$ 平移到点 A 处, 过点 B' 作 $B'M \parallel AD$, $B'N \parallel AB$, 则 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ 分别是向量 $\overrightarrow{EB}$ 在 $\vec{m}, \vec{n}$ 方向上的分向量.

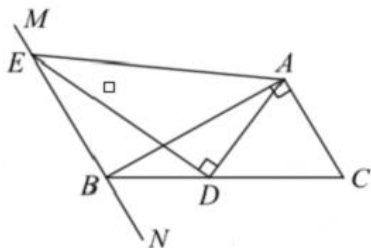


【点睛】考查平面向量, 平行线分线段成比例定理, 熟练掌握平面向量的线性运算是解题的关键.

22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 过点为 B 的直线 MN 与 AC 平行, 点 D 为 BC 上一点, 联结 AD, 过点 D 作 $DE \perp AD$ 交 MN 于点 E, 联结 AE.

(1) 若 $\angle ABC = 30^\circ$, 请说明线段 AD 和 DE 的数量关系, 并加以证明;

(2) 若 $\angle ABC = \alpha$, 请直接写出线段 AD 和 DE 的数量关系: _____ (用含有 α 的三角比表示)



【答案】 $AD = DE \tan \alpha$

【解析】

【分析】

(1) 首先过点 D 作 $DG \perp BC$, 交 AB 于点 G , 进而得出 $\angle EBD = \angle AGD$, 证出 $\triangle BDE \sim \triangle GDA$ 即可得出答案;

(2) 首先过点 D 作 $DG \perp BC$, 交 AB 于点 G , 进而得出 $\angle EBD = \angle AGD$, 证出 $\triangle BDE \sim \triangle GDA$ 即可得出答案.

【详解】(1) $DE = \sqrt{3}AD$,

理由: 如图 2, 过点 D 作 $DG \perp BC$, 交 AB 于点 G ,

则 $\angle BDE + \angle GDE = 90^\circ$,

$\because DE \perp AD$,

$\therefore \angle GDE + \angle ADG = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDE = \angle ADG$,

$\because \angle BAC = 90^\circ, \angle ABC = 30^\circ$,

$\therefore \angle C = 60^\circ$,

$\because MN \parallel AC$,

$\therefore \angle EBD = 180^\circ - \angle C = 120^\circ$,

$\because \angle ABC = 30^\circ, DG \perp BC$,

$\therefore \angle BGD = 60^\circ$,

$\therefore \angle AGD = 120^\circ$,

$\therefore \angle EBD = \angle AGD$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle GDA$,

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{DG}{BD},$$

在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中,

$$\frac{DG}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}AD;$$

$$(2) AD = DE \cdot \tan \alpha;$$

(1) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$, 根据相似三角形的性质即可证明.

(2) 证明 $\triangle ABC \sim \triangle EAD$, 根据相似三角形的性质即可证明.

【详解】(1) $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,

$$\angle ABC = \angle ACB,$$

$$\because \angle ABC + \angle ABD = 180^\circ, \quad \angle ACB + \angle DCE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DCE,$$

$$\angle ABC = \angle BAD + \angle ADB, \angle ADE = \angle ADB + \angle CDE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$$

$$\therefore AB \cdot CE = BD \cdot DC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AC \cdot CE = BD \cdot DC.$$

(2) 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上,

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB,$$

$$\angle DAC = \angle DAE + \angle BAC, \angle ACB = \angle EDC + \angle E,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle E,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EAD,$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{AB}{AE},$$

$$\because DA = DC,$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AE}.$$

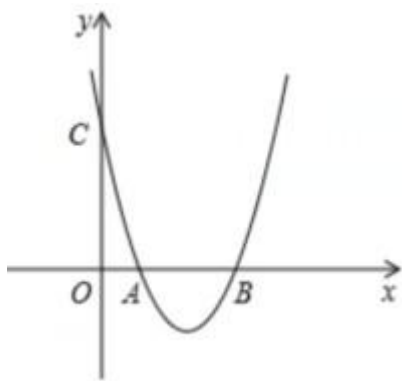
【点睛】考查相似三角形的判定与性质以及线段的垂直平分线的性质，掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

24. 如图，在直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 11ax + c$ ($a > 0$) 与 x 轴交于点 $A(3, 0)$ 和点 B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 15.

(1) 试求抛物线的解析式；

(2) 点 D 是线段 OC 上一点，连接 BD 交 AC 于点 E ，若 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，试求点 D 的坐标和 $\angle DBC$ 的正切值；

(3) 若抛物线对称轴上的点 P ，满足 $\angle APB = \angle ACB$ ，请直接写出点 P 的坐标.



【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{4}x + 6$. (2) 点 D 的坐标为 $(0, 4)$. $\therefore \tan \angle DBC = \frac{2}{11}$. (3) 点 P 的坐标为： $\left(\frac{11}{2}, \frac{5+5\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{11}{2}, \frac{5-5\sqrt{5}}{2}\right)$.

【解析】

【分析】

(1) 设点 $B(x, 0)$, $A(3, 0)$, 则 $x + 3 = -\frac{-11a}{a} = 11$, 则 $x = 8$, 即点 $B(8, 0)$. $|AB| = 5$, 根据 $\triangle ABC$ 的面积即可求出点 C 的坐标，用待定系数法即可求出函数解析式.

(2) $\triangle AEB \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质，可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$, 即可求出 AE 的长度，过点 E 作 $EH \perp OA$ 于 H , 根据平行线分线段成比例，即可求出点 E 的坐标，即可求出直线 BE 的解析式，即可求出点 D 的坐标. 根据正切的和差公式即可求出 $\angle DBC$ 的正切值；

(3) 根据 $\angle APB = \angle ACB$, 则 A, B, C, P 四点共圆，即可求出点 P 的坐标.

【详解】(1) 设点 $B(x, 0)$, $A(3, 0)$, 则 $x + 3 = -\frac{-11a}{a} = 11$,

则 $x = 8$, 即点 $B(8, 0)$.

$$|AB| = 5,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = 15.$$

解得: $h = 6$.

即点 $C(0, 6)$.

$$\text{把点 } A, C \text{ 代入解析式, 得 } \begin{cases} 9a - 33a + c = 0 \\ c = 6, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = 6, \end{cases}$$

即抛物线的解析式为: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{4}x + 6$.

$$(2) \quad AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}, BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, AB = 5,$$

$\therefore \triangle AEB \sim \triangle ABC$,

根据相似三角形的性质, 可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$, 解得: $AE = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

过点 E 作 $EH \perp OA$ 于 H ,

$$\text{则: } \frac{EH}{OC} = \frac{AH}{AO} = \frac{AE}{AC}. \text{ 解得: } AH = \frac{5}{3}, HE = \frac{10}{3}.$$

$$\therefore OH = OA - AH = \frac{4}{3}.$$

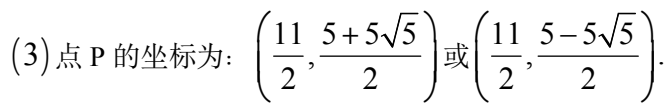
$$\text{点 } H\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

又点 $B(8, 0)$.

直线 BD 的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x + 4$. 当 $x = 0$ 时, $y = 4$, 即点 D 的坐标为 $(0, 4)$.

$$\tan \angle OBC = \frac{3}{4}, \quad \tan \angle OBD = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle DBC = \tan(\angle OBC - \angle OBD) = \frac{\tan \angle OBC - \tan \angle OBD}{1 + \tan \angle OBC \cdot \tan \angle OBD} = \frac{2}{11}.$$



【点睛】属于二次函数综合题，考查待定系数法求二次函数解析式，相似三角形的判定与性质，勾股定理等，综合性比较强，难度较大.