

静安区 2023 学年度第一学期期末教学质量调研

九年级数学试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 下列计算正确的是 ()

- A. $(-1)^0 = 0$ B. $(-1)^{-1} = 1$ C. $1^{-1} = -1$ D. $(-1)^{-1} = -1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查零指数幂，负整数指数幂，根据零指数幂，负整数指数幂的运算法则计算即可，正确计算是解题的关键.

【详解】解：A. $(-1)^0 = 1$ ，计算错误，故选项不符合题意；

B. $(-1)^{-1} = -1$ ，计算错误，故选项不符合题意；

C. $1^{-1} = 1$ ，计算错误，故选项不符合题意；

D. $(-1)^{-1} = -1$ ，计算正确，故选项符合题意；

故选：D.

2. 下列选项中的两个图形一定相似的是 ()

- A. 两个平行四边形 B. 两个圆 C. 两个菱形 D. 两个等腰三角形

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了相似图形的识别，对应边成比例，对应角相等的图形叫相似图形，据此逐一判断即可.

【详解】解：A、两个平行四边形不一定相似，例如没有内角是直角的菱形和矩形不相似，不符合题意；

B、两个圆一定相似，符合题意；

C、两个菱形不一定相似，例如没有内角是直角的菱形和正方形不相似，不符合题意；

D、两个等腰三角形不一定相似，例如等腰直角三角形和等边三角形不相似，不符合题意；

故选 B.

3. 如果直线 $y = x$ 与 x 轴正半轴的夹角为锐角 α ，那么下列各式正确的是 ()

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ B. $\cos \alpha = \sqrt{2}$ C. $\tan \alpha = 1$ D. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查了锐角三角函数的定义，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键。将图像画出，设点 A 是直线上的点，设点 $A(m, m)$ ，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H，则 $AH = m, OH = m$ ，即可求解。

【详解】 解：设点 A 是直线上的点，设点 $A(m, m)$ ，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H，则 $AH = m, OH = m$ ，

$$\therefore OA = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2}m$$

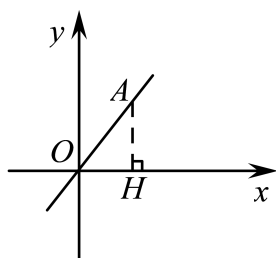
$$\sin \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{m}{\sqrt{2}m} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{m}{\sqrt{2}m} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{m}{m} = 1;$$

$$\cot \alpha = \frac{OH}{AH} = \frac{m}{m} = 1.$$

故选 C.



4. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在边 BC、AB、AC 上，连接 DE、DF，如果 $DE \parallel AC$ ， $DF \parallel AB$ ，且 $AE:EB=1:2$ ，那么 $AF:FC$ 的值是（ ）

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线分线段成比例，熟练掌握平行线分线段成比例是解题的关键。根据题意画出图形，利用平行线分线段成比例即可得到答案。

【详解】 解： $\because DE \parallel AC$ ， $AE:EB=1:2$ ，

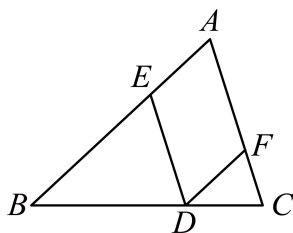
$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = 2,$$

$\because DF \parallel AB$ ，

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{BD}{CD} = 2.$$

故选 C.



5. 如果将抛物线 $y = (x+2)^2 - 1$ 平移后得到抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$, 那么它的平移过程可以是 ()

- A. 向右平移 3 个单位, 再向上平移 3 个单位 B. 向右平移 3 个单位, 再向下平移 3 个单位
C. 向左平移 3 个单位, 再向上平移 3 个单位 D. 向左平移 3 个单位, 再向下平移 3 个单位

【答案】A

【解析】

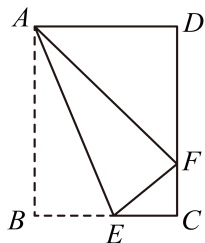
【分析】本题主要考查了二次函数图象的平移问题, 先求出平移前后抛物线的顶点坐标, 再根据点的坐标判断出平移方式即可.

【详解】解: $\because$ 平移前抛物线的顶点坐标为 $(-2, -1)$, 平移后抛物线的顶点坐标为 $(1, 2)$,

$\therefore$ 将抛物线 $y = (x+2)^2 - 1$ 向右平移 3 个单位, 再向上平移 3 个单位可得到抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$,

故选 A.

6. 如图, 点 E 在矩形 ABCD 的边 BC 上, 将矩形沿 AE 翻折, 点 B 恰好落在边 CD 的点 F 处, 如果 $AD = DF$, 那么 $\frac{AB}{BE}$ 的值等于 ()



- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{2} + 1$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了矩形与折叠、勾股定理、等腰三角形的性质, 先根据矩形的性质得出 $\angle D = \angle B = \angle C = 90^\circ$, $AB = CD$, 再根据折叠的性质得出 $\angle AFE = \angle B = 90^\circ$, $AB = AF$, $BE = EF$, 然后根据等边对等角得出 $\angle DAF = \angle DFA = 45^\circ$, 根据余角的定义、等量代换及等角对等边得出 $CF = CE$,

设 $AD = DF = x$ ，根据勾股定理得出 $AF = \sqrt{2}x$ ，根据线段的和差及勾股定理得出 $BE = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}x$ ，最后再化简即可得出答案.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形

$$\therefore \angle D = \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AB = CD$$

$\because$ 将矩形沿 AE 翻折,

$$\therefore \angle AFE = \angle B = 90^\circ, \quad AB = AF, \quad BE = EF$$

$$\because AD = DF$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DFA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DFA + \angle EFC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EFC = \angle FEC = 45^\circ$$

$$\therefore CF = CE$$

$$\text{设 } AD = DF = x$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, } AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{2}x$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2} - 1)x$$

$$\therefore BE = EF = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}x$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}x}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}x} = \sqrt{2} + 1$$

故选 B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 0.5 的倒数是__.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据倒数的定义, 可得答案.

【详解】解: 0.5 的倒数是 2,

故答案为: 2.

【点睛】本题考查倒数的定义, 属于基础题, 熟练掌握倒数的定义是解决本题的关键.

8. 如果 $3a = 5b$ ($a, b \neq 0$), 那么 $a:b =$ ()

【答案】 5:3

【解析】

【分析】根据 $3a = 5b (a, b \neq 0)$ 即可求出答案.

【详解】解: $\because 3a = 5b (a, b \neq 0)$,

$$\therefore a:b = 5:3,$$

故答案为: $5:3$.

【点睛】本题主要考查了求比, 正确计算是解题的关键.

9. 已知线段 AB 的长为 2cm , 点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 那么线段 PB 的长等于_____ (结果保留根号).

【答案】 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据黄金分割的概念得到 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$, 把 $AB=2$ 代入计算求出 AP , 即可得出答案.

【详解】 $\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$),

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2 = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore PB = AB - AP = 3 - \sqrt{5};$$

故答案为 $3 - \sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了黄金分割的概念; 熟练掌握黄金分割值是解题的关键.

10. 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像对称轴的右侧部分上升, 它的开口方向是_____. (填“向上”或“向下”)

【答案】 向上

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数的图像, 熟练掌握二次函数的图像是解题的关键. 根据对称轴的右侧部分上升即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 对称轴的右侧部分上升,

故函数图像在对称轴的右侧单调递增,

$\therefore$ 它的开口方向是向上.

故答案为: 向上.

11. 已知抛物线 $y = x^2 + mx + 9$ 的顶点在 x 轴负半轴上, 那么 m 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】此题考查了二次函数的性质，抛物线的顶点在 x 轴上，即有与 x 轴只有一个交点，根据 $m^2 - 4 \times 9 = 0$ 即可求解，解题的关键是正确理解抛物线的顶点在 x 轴上，即有与 x 轴只有一个交点.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx + 9$ 的顶点在 x 轴的负半轴上，

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 + mx + 9$ 与 x 轴只有一个交点，

$$\therefore m^2 - 4 \times 9 = 0,$$

$$\therefore m = \pm 6,$$

$\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx + 9$ 的顶点在 x 轴的负半轴上，

$$\therefore -\frac{m}{2} < 0, \text{ 即 } m > 0,$$

$$\therefore m = 6,$$

故答案为：6.

12. 在三角形 ABC 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，已知 $DE = 4$ ， $BC = 6$ ， $AE : AC = 2 : 3$ ，那么能否得到 $DE \parallel BC$ ？_____（填“能”或“否”）

【答案】否

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定，解题的关键是掌握有两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

【详解】解： $\because DE = 4$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore DE : BC = AE : AC = 2 : 3,$$

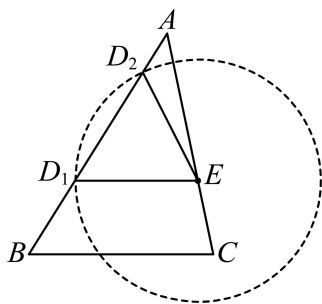
$\because \angle DAE = \angle BAC$ ， $\angle DAE$ 不是 DE 和 AE 的夹角， $\angle BAC$ 不是 BC 和 AC 的夹角，

$\therefore$ 不能判定 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

故不能判定 $\angle C = \angle AED$ ，

$\therefore$ 不能得到 $DE \parallel BC$ ，

故答案为：否.



13. 如果两个相似三角形对应边上的高之比是4:9, 那么它们的周长之比等于_____.

【答案】 4:9

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质, 相似三角形对应边上的高之比等于相似比, 周长比也等于相似比, 由此可解.

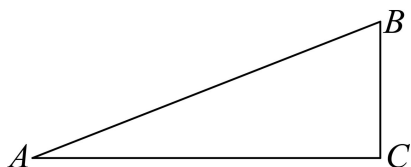
【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形对应边上的高之比是4:9,

$\therefore$ 这两个相似三角形的相似比为4:9,

$\therefore$ 它们的周长之比等于4:9.

故答案为: 4:9.

14. 如图, 小红沿坡度*i*=1:2.4的坡面由A到B行走了26米, 那么小红行走的水平距离AC=_____米.



【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查坡度、勾股定理, 根据坡度的定义可知 $i = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2.4}$, 设 $BC = x$, 则 $AC = 2.4x$, 再用勾股定理解Rt $\triangle ACB$ 即可.

【详解】 解: 由题意得 $i = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2.4}$,

设 $BC = x$, 则 $AC = 2.4x$,

由勾股定理得: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

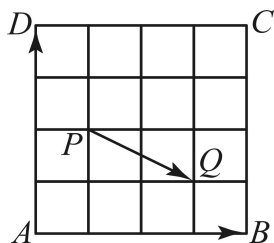
即 $(2.4x)^2 + x^2 = 26^2$,

解得 $x = 10$ (负值舍去),

$\therefore AC = 2.4 \times 10 = 24$,

故答案为: 24.

15. 如图, 正方形ABCD被5条横线与5条纵线划分成16个全等的小正方形, P、Q是其中两个小正方形的顶点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{PQ} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

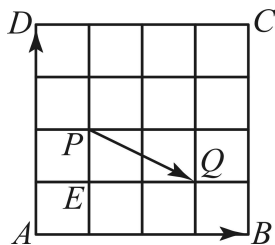


【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的知识，根据题意得： $EP \parallel AD$ ， $EQ \parallel AB$ ， $EP = \frac{1}{4}AD$ ， $EQ = \frac{1}{2}AB$ ，从而得出 $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{b}$ ， $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，再根据 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{EP}$ 即可得出答案，熟练掌握三角形法则与数形结合的思想是解此题的关键。

【详解】 解：如图，



根据题意得： $EP \parallel AD$ ， $EQ \parallel AB$ ， $EP = \frac{1}{4}AD$ ， $EQ = \frac{1}{2}AB$ ，

$$\therefore \overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{b}, \quad \overrightarrow{EQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b},$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ 。

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，将边 BC 绕点 C 旋转后，点 B 落在射线 CA 上的点 D 处，那么 DB 的长为_____。

【答案】 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质以及勾股定理，熟练掌握旋转的性质是解题的关键。过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，根据等腰三角形的性质求出 AF ，再利用等面积法求出 BE ，即可根据勾股定理求出 AE 的值，即可得到答案。

【详解】 解：过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，

$$\because AB = AC = 5, \quad BC = 6,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC = 3, \quad AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 4$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AF = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 = \frac{1}{2}AC \cdot BE$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times BE = 12$$

$$\therefore BE = \frac{24}{5}$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \frac{7}{5}$$

边 BC 绕点 C 旋转后, 点 B 落在射线 CA 上的点 D 处,

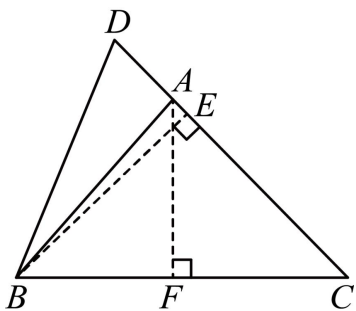
$$\therefore CD = BC = 6$$

$$\therefore AD = DC - AC = 6 - 5 = 1$$

$$\therefore DE = DA + AE = \frac{12}{5}$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中, } DB = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

故答案为: $\frac{12}{5}\sqrt{5}$.



17. 如果某函数图像上至少存在一对关于原点对称的点, 那么约定该函数称之为“ H 函数”, 其图像上关于原点对称的两点叫做一对“ H 点”. 根据该约定, 下列关于 x 的函数: ① $y = -2x$, ② $y = x^{-1}$, ③ $y = 3x - 1$,

④ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}$ 中, 是“ H 函数”的有_____. (请填写函数解析式序号)

【答案】①②④

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数, 二次函数, 反比例函数图像上点的特征, 熟练掌握图像上点的特征是解题的关键. 根据“ H 函数”的定义即可得到答案.

【详解】 解: 函数图像上至少存在一对关于原点对称的点, 那么约定该函数称之为“ H 函数”,

$y = -2x$ 是“ H 函数”, 故①正确;

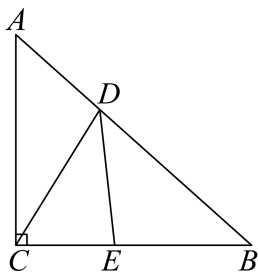
$y = x^{-1}$ 是“ H 函数”, 故②正确;

$y = 3x - 1$ 不是 “H 函数”，故③错误；

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}$ 是 “H 函数”，故④正确；

故答案为：①②④.

18. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $\cos B = \frac{3}{4}$. 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上， $\angle CDE = \angle EDB = \angle B$ ，那么 AD 的长为_____。(用含 a 的代数式表示)

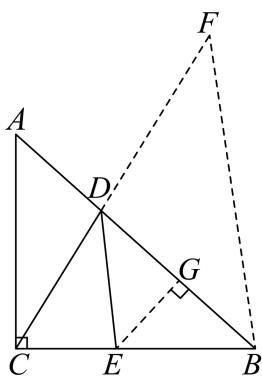


【答案】 $\frac{1}{2}a$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例，相似三角形的性质与判定，余弦的定义，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，设 $BG = 3k$ ，则 $DE = BE = 4k$ ， $BD = 6k$ ， $CE = a - 4k$ ，过点 B 作 $BF \parallel DE$ 交 CD 的延长线于点 F ，根据平行线分线段成比例得出 $\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{EB}$ ，得出 $CD = \frac{3}{2}a - 6k$ ，证明 $\triangle CDE \sim \triangle CBD$ ，得出 $\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$ ，则 $k = \frac{5a}{36}$ ，进而求得 $BD = 6k = \frac{5a}{6}$ ，进而根据 $AD = \frac{4}{3}a - BD$ ，即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，



$$\because \angle EDB = \angle ABC$$

$$\therefore ED = EB,$$

$$\because \cos \angle ABC = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{BG}{BE} = \frac{3}{4}, \text{ 设 } BG = 3k, \text{ 则 } DE = BE = 4k, \quad BD = 6k,$$

$$\therefore BC = a,$$

$$\therefore CE = a - 4k,$$

过点 B 作 $BF \parallel DE$ 交 CD 的延长线于点 F ,

$$\therefore \angle EDB = \angle DBF, \quad \angle CDE = \angle F$$

$$\therefore \angle CDE = \angle EDB$$

$$\therefore \angle DBF = \angle F,$$

$$\therefore DF = DB$$

$$\therefore BF \parallel DE$$

$$\therefore \frac{CD}{DF} = \frac{CE}{EB}, \quad \text{即} \quad \frac{CD}{DB} = \frac{CE}{EB}$$

$$\therefore \frac{CD}{6k} = \frac{a-4k}{4k}$$

$$\text{解得: } CD = \frac{3}{2}a - 6k$$

$$\text{又} \therefore \angle DCE = \angle BCD, \angle CDE = \angle CBD$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBD$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\therefore \frac{a-4k}{\frac{3}{2}a-6k} = \frac{\frac{3}{2}a-6k}{a}$$

$$\text{解得: } k = \frac{5a}{36}$$

$$\therefore BD = 6k = \frac{5a}{6}$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \quad \cos \angle ABC = \frac{3}{4}, \quad BC = a,$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\cos \angle ABC} = \frac{4}{3}a, \quad \text{则} \quad AD = \frac{4}{3}a - BD = \frac{4}{3}a - \frac{5}{6}a = \frac{1}{2}a$$

故答案为: $\frac{a}{2}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{(\sin 45^\circ - 1)^2} + \cos 45^\circ + \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ.$$

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查特殊三角函数值的混合运算, 将各角的三角函数值代入计算即可.

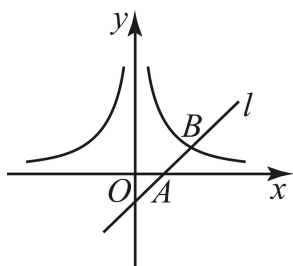
【详解】解： $\sqrt{(\sin 45^\circ - 1)^2} + \cos 45^\circ + \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{5}{2}.$$

20. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 经过点 $A(1,0)$, 与双曲线 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 交于点 $B(2,1)$. 点

$P(a,2)$ 在直线 AB 上, 过点 P 作 x 轴的平行线分别交双曲线 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 和 $y = -\frac{m}{x} (x < 0)$ 于点 E, F .



(1) 求 m 的值和直线 l 的表达式;

(2) 联结 EB, FA . 求证: $EB \parallel FA$.

【答案】(1) $m = 2$, 直线 l 的解析式为 $y = x - 1$;

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是反比例函数的综合题.

(1) 根据点 B 的坐标求得 m 的值, 根据点 $A(1,0)$ 和点 $B(2,1)$ 使用待定系数法即可求出一次函数的解析式;

(2) 先求出点 P, E, F 坐标, 利用两点之间的距离公式证明 $PB = BE, AP = AF$, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: 因为点 $B(2,1)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上,

所以 $m = 1 \times 2 = 2$,

设直线 l 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

代入点 $A(1,0)$ 和点 $B(2,1)$, 得 $\begin{cases} k + b = 0 \\ 2k + b = 1 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = -1 \end{cases}$,

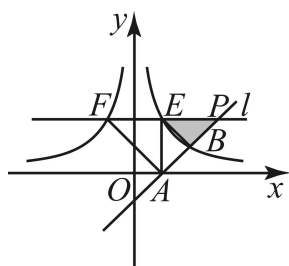
所以直线 l 的解析式为 $y = x - 1$;

【小问 2 详解】

解：由点 $P(a, 2)$ 的坐标可知，点 P 在直线 $y = x - 1$ 上，

$$\therefore 2 = a - 1,$$

$$\therefore a = 3,$$



$$\because EF \parallel x \text{ 轴}, \therefore \text{当 } y = 2 \text{ 时}, 2 = \frac{2}{x} \text{ 或 } 2 = -\frac{2}{x},$$

解得 $x = 1$ 或 $x = -1$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, 2)$ ，点 F 的坐标为 $(-1, 2)$ 。

$$\text{由 } P(3, 2)、E(1, 2)、B(2, 1) \text{ 知 } PB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}, EB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore PB = BE,$$

$$\therefore \angle BEP = \angle BPE;$$

$$\text{由 } P(3, 2)、F(-1, 2)、A(1, 0) \text{ 知 } PA = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}, FA = \sqrt{(1+1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2},$$

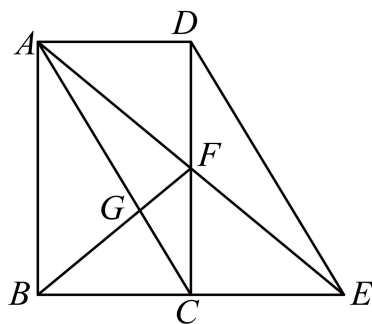
$$\therefore AP = AF,$$

$$\therefore \angle AFP = \angle APF;$$

$$\therefore \angle AFP = \angle BEP;$$

$$\therefore EB \parallel FA.$$

21. 如图，已知 AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线， $DE \parallel AC$ ， DE 交 BC 延长线于 E ， AE 交 DC 于 F ， BF 交 AC 于 G 。



(1) 求证：点 G 是 $\triangle ABE$ 的重心；

(2) 如果 $BG = BC = 2$ ，求 $\angle AEB$ 的正弦值。

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查重心的判定，三角函数的定义，熟练掌握求正弦值的方法是解题的关键.

(1) 证明 BF 是 AE 的中线， AC 是 BE 的中线即可得到结论.

(2) 根据重心的性质得到 $BF = 3$ ，求出 AE 、 BE 的值，再根据勾股定理求出答案即可.

【小问 1 详解】

证明：∵ 矩形 $ABCD$ ，

∴ $AD \parallel BE, AD = BC$ ，

∵ $DE \parallel AC$ ，

∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

∴ $AF = EF, AD = CE$ ，

∴ BF 是 AE 的中线，

∵ $AD = BC$ ，

∴ $BC = CE$ ，

∴ AC 是 BE 的中线，

∴ 点 G 是 $\triangle ABE$ 的重心；

【小问 2 详解】

解：∵ 点 G 是 $\triangle ABE$ 的重心，

∴ $BG = \frac{2}{3}BF$ ，

∵ $BG = BC = 2, BC = EC$ ，

∴ $BF = 3, EC = 2$ ，

∴ $BE = 4$ ，

∵ $\angle ABE = 90^\circ, AF = EF$ ，

∴ $BF = \frac{1}{2}AB = AF = EF = 3$ ，

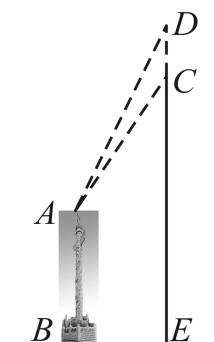
∴ $AE = 6$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AB = \sqrt{AE^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\sin \angle AEB = \frac{AB}{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

22. 如图, 某建筑物 AB 高为 200 米, 某人乘热气球来到距地面 400 米的 C 处 (即 CE 长为 400 米) .此时测得建筑物顶部 A 的俯角为 α , 当乘坐的热气球垂直上升到达 D 处后, 再次测得建筑物顶部 A 的俯角为 β .

$$(\tan \alpha = 1.25, \tan \beta = 1.75)$$



(1) 请在图中标出俯角 α 、 β , 并用计算器求 α 、 β 的大小: $\alpha \approx$ _____, $\beta \approx$ _____; (精确到 “1”)

(2) 求热气球上升的垂直高度 (即 CD 的长) .

【答案】 (1) $51^\circ 20' 25''$, $60^\circ 15' 18''$

(2) 80 米

【解析】

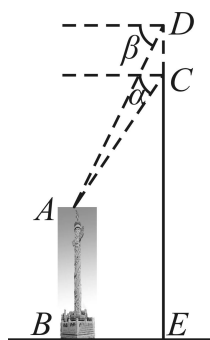
【分析】 本题考查解直角三角形的实际应用:

(1) 根据俯角的定义标出 α 、 β , 再利用计算器求 α 、 β 的大小;

(2) 作 $AF \perp DE$ 于点 F , 则 $\tan \angle CAF = \tan \alpha = 1.25$, $\tan \angle DAF = \tan \beta = 1.75$, 利用锐角三角函数解 $\text{Rt}\triangle CAF$ 和 $\text{Rt}\triangle DAF$ 即可.

【小问 1 详解】

解: α 、 β 如图所示,

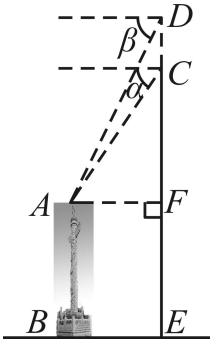


计算器求得 $\alpha \approx 51^\circ 20' 25''$, $\beta \approx 60^\circ 15' 18''$,

故答案为: $51^\circ 20' 25''$, $60^\circ 15' 18''$;

【小问 2 详解】

解：如图，作 $AF \perp DE$ 于点 F ，



则 $\angle CAF = \alpha$ ， $\angle DAF = \beta$ ，

$$\therefore \tan \angle CAF = \tan \alpha = 1.25, \quad \tan \angle DAF = \tan \beta = 1.75,$$

$$\therefore \tan \angle CAF = \frac{CF}{AF} = 1.25, \quad \tan \angle DAF = \frac{DF}{AF} = 1.75,$$

$$\therefore CF = 1.25AF, \quad DF = 1.75AF,$$

$$\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{1.25}{1.75} = \frac{5}{7},$$

$$\because CF = CE - EF = CE - AB = 400 - 200 = 200,$$

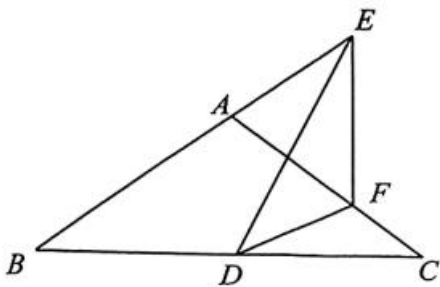
$$\therefore \frac{200}{DF} = \frac{5}{7},$$

解得 $DF = 280$ ，

$$\therefore CD = DF - CF = 280 - 200 = 80 \text{ (米)},$$

即热气球上升的垂直高度为 80 米.

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 中点，点 E 在 BA 延长线上，点 F 在 AC 边上， $\angle EDF = \angle B$ 。



求证：

(1) $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ ；

(2) $DF^2 = EF \cdot CF$ 。

【答案】(1) 证明, 见解析

(2) 证明, 见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的知识, 解题的关键是掌握相似三角形的判定和性质, 即可.

(1) 根据 $AB = AC$, 则 $\angle B = \angle C$, 根据 $\angle BED + \angle B = \angle EDF + \angle CDF$, $\angle EDF = \angle B$, 则 $\angle BED = \angle CDF$, 再根据相似三角形的判定, 即可;

(2) 根据相似三角形的性质, 则 $\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{FC}$, 根据 D 是 BC 中点, 则 $\frac{DE}{DF} = \frac{CD}{FC}$, 再根据 $\angle EDF = \angle C$, 相似三角形的判定, 即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle BED + \angle B = \angle EDF + \angle CDF, \quad \angle EDF = \angle B,$$

$$\therefore \angle BED = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CDF.$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 得, $\triangle BDE \sim \triangle CDF$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{BD}{FC},$$

$\because D$ 是 BC 中点,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{CD}{FC},$$

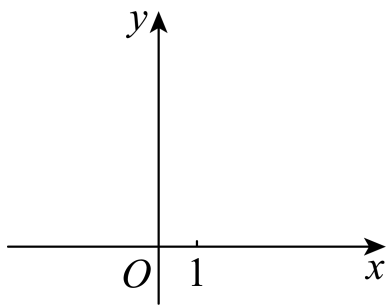
又 $\because \angle EDF = \angle C$,

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{CF}{DF},$$

$$\therefore DF^2 = EF \cdot CF.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知点 $A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 8)$ 、 $D\left(2, \frac{32}{3}\right)$ 在同一个二次函数的图像上.



- (1) 请从中选择适当的点坐标，求二次函数解析式；
- (2) 如果射线 BE 平分 $\angle ABC$ ，交 y 轴于点 E ，
- ① 现将抛物线沿对称轴向下平移，顶点落在线段 BE 的点 F 处，求此时抛物线顶点 F 的坐标；
- ② 如果点 P 在射线 BE 上，当 $\triangle PBC$ 与 $\triangle BOE$ 相似时，请求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8$

(2) ① $F(2, 2)$ ② $P_1(-2, 4)$, $P_2(-4, 5)$

【解析】

【分析】(1) 把解析式设为交点式，再把 $C(0, 8)$ 代入解析式中求解即可；

(2) ① 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ，由角平分线的性质得到 $OE = HE$ 。利用勾股定理求出 $BC = 10$ ，进而利用等面积法求出 $OE = 3$ ，则 $E(0, 3)$ ，求出直线 BE 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ，再求出对称轴为直线 $x = 2$ ，

由此即可求出 $F(2, 2)$ ；② 先求出 $OE = 3$ ， $OB = 6$ ，设 $P(2m, -m + 3)$ ，则 $PC^2 = 5m^2 + 10m + 25$ ，

$PB^2 = 5m^2 - 30m + 45$ ，分当 $\triangle PBC \sim \triangle OBE$ 时，当 $\triangle PBC \sim \triangle EBO$ 时，两种情况根据相似三角形的性质建立方程求解即可。

【小问 1 详解】

解：设二次函数解析式为 $y = a(x + 2)(x - 6)$ ($a \neq 0$)，

把 $C(0, 8)$ 代入 $y = a(x + 2)(x - 6)$ ($a \neq 0$) 中得： $a(0 + 2)(0 - 6) = 8$ ，

解得 $a = -\frac{2}{3}$ ，

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = -\frac{2}{3}(x + 2)(x - 6) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8$ ；

【小问 2 详解】

解：① 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ，

$\because$ 射线 BE 平分 $\angle ABC$ ， $EH \perp BC$ ， $EO \perp AB$ ，

$\therefore OE = HE$ ，

$$\therefore B(6,0)、C(0,8),$$

$$\therefore OC = 8, \quad OB = 6,$$

$$\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle BOE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{1}{2}OE \cdot OB + \frac{1}{2}BC \cdot HE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 3OE + 5OE,$$

$$\therefore OE = 3,$$

$$\therefore E(0,3),$$

设直线 BE 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

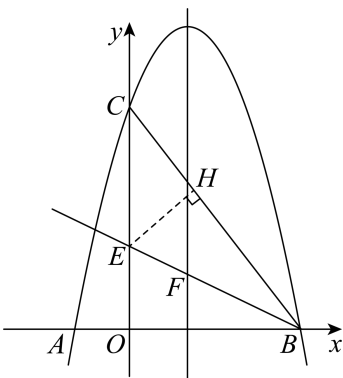
$$\therefore \text{直线 } BE \text{ 解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{2}{3} \times 3} = 2,$$

$$\text{在 } y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 中, 当 } x = 2 \text{ 时, } y = 2,$$

$$\therefore F(2,2);$$



$$\textcircled{2} \therefore E(0,3), \quad B(6,0),$$

$$\therefore OE = 3, OB = 6,$$

$$\text{设 } P(2m, -m+3),$$

$$\therefore PC^2 = (2m-0)^2 + (-m+3-8)^2 = 5m^2 + 10m + 25,$$

$$PB^2 = (2m-6)^2 + (-m+3-0)^2 = 5m^2 - 30m + 45,$$

$$\text{当 } \triangle PBC \sim \triangle OBE \text{ 时, 则 } \frac{PB}{PC} = \frac{OB}{OE} = 2,$$

$$\therefore \frac{5m^2 - 30m + 45}{5m^2 + 10m + 25} = 4,$$

$$\therefore 5m^2 - 30m + 45 = 20m^2 + 40m + 100,$$

$$\therefore 3m^2 + 14m + 11 = 0,$$

$$\text{解得 } m = -1 \text{ 或 } m = -\frac{11}{3} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore P(-2, 4);$$

$$\text{当 } \triangle PBC \sim \triangle EBO \text{ 时, 则 } \frac{PC}{BC} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{5m^2 + 10m + 25}{100} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore m^2 + 2m = 0,$$

$$\text{解得 } m = -2 \text{ 或 } m = 0 \text{ (舍去),}$$

$$P(-4, 5);$$

综上所述, $P(-2, 4)$ 或 $P(-4, 5)$.

【点睛】本题主要考查了二次函数综合, 相似三角形的性质, 勾股定理, 角平分线的性质, 一次函数与几何综合等等, 利用分类讨论的思想求解是解题的关键.

25. 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2$, $AD = 4$, $DC = 3$, $BC = 7$. 点 P 在射线 BA 上, 点 Q 在射线 BC 上 (点 P 、点 Q 均不与点 B 重合), 且 $PQ = BQ$, 连接 DQ , 设 $BP = x$, $\triangle DQC$ 的面积为 y .

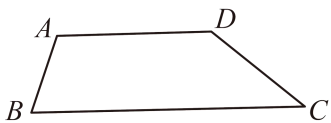


图1

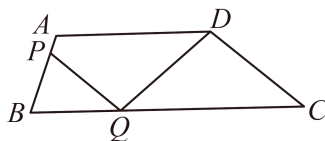
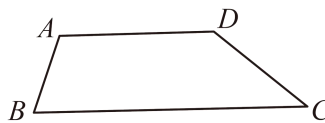


图2



(备用图)

(1) 如图 1 所示, 求 $\sin B$ 的值;

(2) 如图 2 所示, 点 Q 在线段 BC 上, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 当 $\triangle DQC$ 是等腰三角形时, 求 BP 的长.

【答案】(1) $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $y = -\sqrt{2}x + \frac{14\sqrt{2}}{3} \left(0 < x \leq \frac{14}{3} \right)$

(3) $BP = \frac{14}{9}$ 或 $BP = \frac{20}{3}$ 或 $BP = \frac{8}{3}$; 或 $BP = \frac{71}{21}$

【解析】

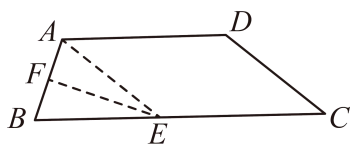
【分析】(1) 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F , 证明四边形 $ADCE$ 为平行四边形, 得出 $AE = DC = 3$, $EC = AD = 4$, 求出 $BE = BC - CE = 7 - 4 = 3$, 根据等腰三角形的性质得出 $BF = AF = \frac{1}{2}AB = 1$, 根据勾股定理求出 $EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 根据三角函数定义即可得出答案;

(2) 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , $QH \perp AB$ 于点 H , 根据 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos B = \frac{1}{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中根据三角函数求出 $AF = AB \times \sin B = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $BQ = \frac{BH}{\cos B} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}x$, 求出 $CQ = 7 - BQ = 7 - \frac{3}{2}x$, 根据三角形面积公式求出 $y = \frac{1}{2}CQ \cdot AF = \frac{1}{2} \left(7 - \frac{3}{2}x \right) \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = -\sqrt{2}x + \frac{14\sqrt{2}}{3}$, 然后求出 x 的取值范围即可;

(3) 分四种情况进行讨论: 当 $DQ = DC = 3$ 时, 当 $CQ = DC = 3$, 点 Q 在线段 BC 延长线上时, 当 $CQ = DC = 3$, 点 Q 在线段 BC 上时, 当 $DQ = QC$ 时, 分别画出图形, 求出结果即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F , 如图所示:



$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 为平行四边形,

$$\therefore AE = DC = 3, \quad EC = AD = 4,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 7 - 4 = 3,$$

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore EF \perp AB,$$

$$\therefore BF = AF = \frac{1}{2}AB = 1,$$

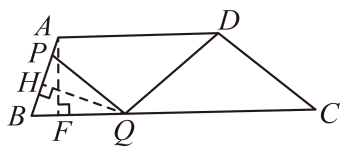
$$\therefore EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin B = \frac{EF}{BE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos B = \frac{BF}{BE} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{即 } \sin B \text{ 的值为 } \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【小问 2 详解】

解：过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F， $QH \perp AB$ 于点 H，如图所示：



$$\text{根据解析 (1) 可知, } \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos B = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中 } AF = AB \times \sin B = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore BQ = PQ, \quad QH \perp BP,$$

$$\therefore BH = PH = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BQH \text{ 中 } BQ = \frac{BH}{\cos B} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore CQ = 7 - BQ = 7 - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}CQ \cdot AF = \frac{1}{2} \left(7 - \frac{3}{2}x \right) \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = -\sqrt{2}x + \frac{14\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore$ 点 Q 在线段 BC 上，且当点 Q 在点 C 上时， $\triangle CDQ$ 的面积为 0，即 $y = 0$ ，

$$\therefore -\sqrt{2}x + \frac{14\sqrt{2}}{3} = 0,$$

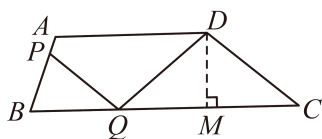
$$\text{解得: } x = \frac{14}{3},$$

$\therefore$ 点 P 、点 Q 均不与点 B 重合,

$$\therefore 0 < x \leq \frac{14}{3}.$$

【小问 3 详解】

解: 当 $DQ = DC = 3$ 时, 过点 D 作 $DM \perp CQ$ 于点 M , 如图所示:



$$\text{根据解析 (2) 可知, } DM = AF = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{根据勾股定理得: } CM = \sqrt{CD^2 - DM^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{7}{3},$$

$$\cos C = \frac{CM}{CD} = \frac{\frac{7}{3}}{3} = \frac{7}{9},$$

$$\therefore DM \perp CQ, \quad DQ = DC = 3,$$

$$\therefore CQ = 2CM = \frac{14}{3},$$

$$\therefore BQ = BC - CQ = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3},$$

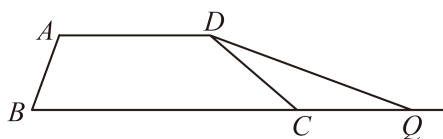
$$\text{根据解析 (2) 可知, } BQ = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \frac{7}{3} = \frac{3}{2}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{14}{9},$$

$$\text{即 } BP = \frac{14}{9};$$

当 $CQ = DC = 3$, 点 Q 在线段 BC 延长线上时, 如图所示:



$$BQ = BC + CQ = 7 + 3 = 10,$$

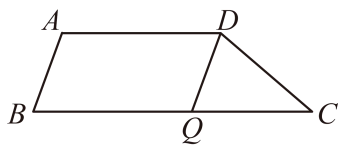
根据解析 (2) 可知, $BQ = \frac{3}{2}x$,

$$\therefore 10 = \frac{3}{2}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{20}{3},$$

$$\text{即 } BP = \frac{20}{3};$$

当 $CQ = DC = 3$, 点 Q 在线段 BC 上时, 如图所示:



$$BQ = BC + CQ = 7 - 3 = 4,$$

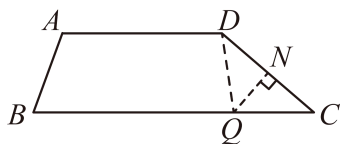
根据解析 (2) 可知, $BQ = \frac{3}{2}x$,

$$\therefore 4 = \frac{3}{2}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{8}{3},$$

$$\text{即 } BP = \frac{8}{3};$$

当 $DQ = QC$, 过点 Q 作 $QN \perp CD$ 于点 N ,



$$\therefore DQ = QC, \quad QN \perp CD,$$

$$\therefore CN = \frac{1}{2}CD = \frac{3}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CQN \text{ 中, } CQ = \frac{CN}{\cos C} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{9}} = \frac{27}{14},$$

$$\therefore BQ = 7 - \frac{27}{14} = \frac{71}{14},$$

根据解析 (2) 可知, $BQ = \frac{3}{2}x$,

$$\therefore \frac{71}{14} = \frac{3}{2}x,$$

解得: $x = \frac{71}{21}$,

即 $BP = \frac{71}{21}$;

综上所述可知, $BP = \frac{14}{9}$ 或 $BP = \frac{20}{3}$ 或 $BP = \frac{8}{3}$; 或

名师教学 · 务实课程 · 注重教辅

淘宝搜索店铺: 优尖升教育
客服微信: DEM2008

手机淘宝扫一扫:

扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION
为您的课程, 我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”, 淘宝唯一一家, 其他都是旧版
淘宝店铺网址: shop492842749.taobao.com

$$BP = \frac{71}{21}.$$

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形, 平行四边形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 求函数解析式, 勾股定理, 三角形面积的计算, 解题的关键是作出辅助线, 注意分类讨论.