

# 2023 学年第二学期初三年级学业质量调研数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
4. 本次考试不能用计算器.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列说法正确的是 ( )

- A. 无限小数都是无理数
- B.  $-\frac{1}{125}$  没有立方根
- C. 正数的两个平方根互为相反数
- D.  $-(-13)$  没有平方根

【答案】C

【解析】

【分析】根据无理数、立方根、平方根的定义解答即可.

【详解】A、无限循环小数是有理数, 故不符合题意;

B、 $-\frac{1}{125}$  有立方根是  $-\frac{1}{5}$ , 故不符合题意;

C、正数的两个平方根互为相反数, 正确, 故符合题意;

D、 $-(-13) = 13$  有平方根, 故不符合题意,

故选: C.

【点睛】本题考查了无理数、立方根、平方根, 掌握无理数、立方根、平方根的定义是解题的关键.

2. 已知  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ , 而且  $\vec{b}$  和  $\vec{a}$  的方向相反, 那么下列结论中正确的是 ( )

- A.  $3\vec{a} = 2\vec{b}$
- B.  $2\vec{a} = 3\vec{b}$
- C.  $3\vec{a} = -2\vec{b}$
- D.  $2\vec{a} = -3\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据  $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$ ，而且  $\vec{b}$  和  $\vec{a}$  的方向相反，可得两者的关系，即可求解.

【详解】 $\because |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$ ，而且  $\vec{b}$  和  $\vec{a}$  的方向相反

$$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$$

故选 D.

【点睛】本题考查的是向量，熟练掌握向量的定义是解题的关键.

3. 下列成语所反映的事件中，是确定事件的是（ ）

- A. 十拿九稳                      B. 守株待兔                      C. 水中捞月                      D. 一箭双雕

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念.必然事件指在一定条件下一定发生的事件.不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件.不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件. 根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念进行解答即可.

【详解】解：A. 十拿九稳是随机事件，不符合题意；

B. 守株待兔是随机事件，不符合题意；

C. 水中捞月是不可能事件，是确定事件，符合题意；

D. 一箭双雕是随机事件，不符合题意；

故选：C.

4. 方差是刻画数据波动程度的量. 对于一组数据  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，可用如下算式计算方差：

$$s^2 = \frac{1}{n} \left[ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 5)^2 + \dots + (x_n - 5)^2 \right], \text{ 其中“5”是这组数据的 ( )}$$

- A. 最小值                      B. 平均数                      C. 中位数                      D. 众数

【答案】B

【解析】

【分析】根据方差公式的定义即可求解.

【详解】方差  $s^2 = \frac{1}{n} \left[ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 5)^2 + \dots + (x_n - 5)^2 \right]$  中“5”是这组数据的平均数.

故选 B.

【点睛】此题主要考查平均数与方差的关系，解题的关键是熟知方差公式的性质.

5. “利用描点法画函数图象，进而探究函数的一些简单性质”是初中阶段研究函数的主要方式，请试着研究函数  $y = \frac{1}{x^2}$ ，其图象位于（ ）

- A. 第一、二象限      B. 第三、四象限      C. 第一、三象限      D. 第二、四象限

【答案】 A

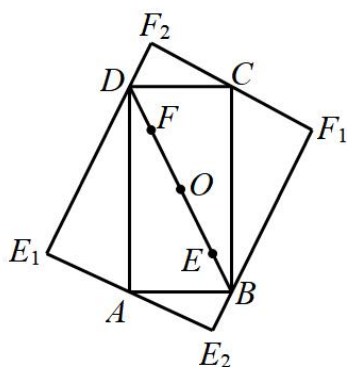
【解析】

【分析】 根据  $x$  的取值，判断  $y$  的范围即可求解.

【详解】 解：当  $x > 0$  时， $y > 0$ ，此时点在第一象限，  
当  $x < 0$  时， $y > 0$ ，此时点在第二象限，  
故选：A.

【点睛】 本题主要考查函数的图像、描点法等知识点，掌握分类讨论思想是解答本题的关键.

6. 如图，在矩形  $ABCD$  中， $O$  为对角线  $BD$  的中点， $\angle ABD = 60^\circ$ . 动点  $E$  在线段  $OB$  上，动点  $F$  在线段  $OD$  上，点  $E, F$  同时从点  $O$  出发，分别向终点  $B, D$  运动，且始终保持  $OE = OF$ . 点  $E$  关于  $AD, AB$  的对称点为  $E_1, E_2$ ；点  $F$  关于  $BC, CD$  的对称点为  $F_1, F_2$ . 在整个过程中，四边形  $E_1E_2F_1F_2$  形状的变化依次是 ( )



- A. 菱形→平行四边形→矩形→平行四边形→菱形  
B. 菱形→正方形→平行四边形→菱形→平行四边形  
C. 平行四边形→矩形→平行四边形→菱形→平行四边形  
D. 平行四边形→菱形→正方形→平行四边形→菱形

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意，分别证明四边形  $E_1E_2F_1F_2$  是菱形，平行四边形，矩形，即可求解.

【详解】  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形，

$$\therefore AB \parallel CD, \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle ABD = 60^\circ, \angle ADB = \angle CBD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore OE = OF, OB = OD,$$

$$\therefore DF = EB$$

$\therefore$  对称,

$$\therefore DF = DF_2, \quad BF = BF_1, \quad BE = BE_2, DE = DE_1$$

$$\therefore E_1F_2 = E_2F_1$$

$\therefore$  对称,

$$\therefore \angle F_2DC = \angle CDF = 60^\circ, \quad \angle EDA = \angle E_1DA = 30^\circ$$

$$\therefore \angle E_1DB = 60^\circ,$$

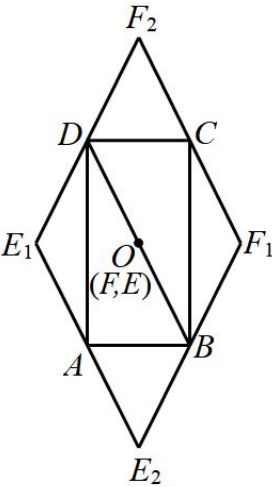
同理  $\angle F_1BD = 60^\circ,$

$$\therefore DE_1 \parallel BF_1$$

$$\therefore E_1F_2 \parallel E_2F_1$$

$\therefore$  四边形  $E_1E_2F_1F_2$  是平行四边形,

如图所示,



当  $E, F, O$  三点重合时,  $DO = BO,$

$$\therefore DE_1 = DF_2 = AE_1 = AE_2$$

即  $E_1E_2 = E_1F_2$

$\therefore$  四边形  $E_1E_2F_1F_2$  是菱形,

如图所示, 当  $E, F$  分别为  $OD, OB$  的中点时,

设  $DB = 4,$  则  $DF_2 = DF = 1, \quad DE_1 = DE = 3,$

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,  $AB = 2, AD = 2\sqrt{3}$ ,

连接  $AE$ ,  $AO$ ,

$\because \angle ABO = 60^\circ, BO = 2 = AB$ ,

$\therefore \triangle ABO$  是等边三角形,

$\because E$  为  $OB$  中点,

$\therefore AE \perp OB, BE = 1$ ,

$\therefore AE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ,

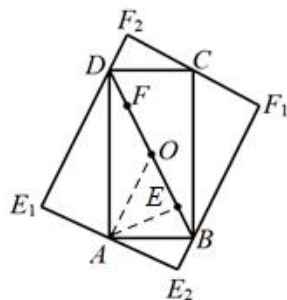
根据对称性可得  $AE_1 = AE = \sqrt{3}$ ,

$\therefore AD^2 = 12, DE_1^2 = 9, AE_1^2 = 3$ ,

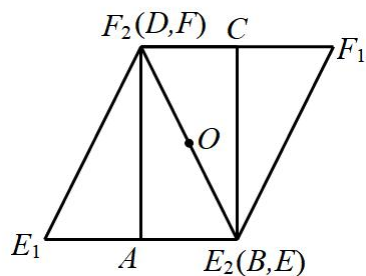
$\therefore AD^2 = AE_1^2 + DE_1^2$ ,

$\therefore \triangle DE_1A$  是直角三角形, 且  $\angle E_1 = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $E_1E_2F_1F_2$  是矩形,



当  $F, E$  分别与  $D, B$  重合时,  $\triangle BE_1D, \triangle BDF_1$  都是等边三角形, 则四边形  $E_1E_2F_1F_2$  是菱形



$\therefore$  在整个过程中, 四边形  $E_1E_2F_1F_2$  形状的变化依次是菱形  $\rightarrow$  平行四边形  $\rightarrow$  矩形  $\rightarrow$  平行四边形  $\rightarrow$  菱形,

故选: A.

【点睛】 本题考查了菱形的性质与判定, 平行四边形的性质与判定, 矩形的性质与判定, 勾股定理与勾股

定理的逆定理，轴对称的性质，含 30 度角的直角三角形的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键.

## 二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 若函数  $y = -2x^m$  是反比例函数，则  $m$  的值是\_\_.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数定义. 根据反比例函数的定义:  $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ , 列式计算即可.

【详解】 解:  $\because$  函数  $y = -2x^m$  是反比例函数,

$$\therefore m = -1,$$

故答案为: -1

8. 为了考察闵行区 15000 名九年级学生数学知识与能力测试的成绩, 从中抽取 50 本试卷, 每本试卷 25 份, 那么样本容量是\_\_.

【答案】 1250

【解析】

【分析】 本题主要考查样本容量, 掌握样本容量的概念是解题的关键.

根据抽取的试卷的本数  $\times$  每本试卷的份数即可得出答案.

【详解】  $50 \times 25 = 1250$

$\therefore$  样本容量是 1250.

故答案为: 1250.

9. 如果关于  $x$  的多项式  $x^2 - 2x + m$  在实数范围内因式分解, 那么实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $m \leq 1$

【解析】

【分析】 原多项式在实数范围内能因式分解, 说明方程  $x^2 - 2x + m = 0$  有实数根, 即转换为  $\Delta = b^2 - 4ac$  不小于 0, 再代入求值即可.

【详解】 由题意知:  $\because$  关于  $x$  的多项式  $x^2 - 2x + m$  在实数范围内因式分解,

$\therefore x^2 - 2x + m = 0$  有实数根,

$\therefore a=1, b=-2, c=m,$

则  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m \geq 0,$

解得:  $m \leq 1;$

故答案为:  $m \leq 1$ .

【点睛】 本题考查因式分解, 其实是考查一元二次方程根与判别式的关系, 能够转换思维解题是关键.

10. 某班共有 6 名学生干部, 其中 4 名是男生, 2 名是女生, 任意抽一名学生干部去参加一项活动, 其中是女生的概率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{3}$

【解析】

【详解】 分析: 根据概率公式用女生人数除以总人数即可得结论.

详解: 所有等可能结果共有 6 种, 其中女生有 2 种,  $\therefore$  恰好是女生的概率为  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

故答案为  $\frac{1}{3}$ .

点睛: 本题考查了概率公式: 随机事件  $A$  的概率  $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ .

11. 如果二次函数  $y = x^2 - 4x + 1$  的图象的一部分是下降的, 那么  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的性质是解题的关键. 根据函数解析式可得抛物线开口向上, 则当  $x$  在对称轴左侧时, 函数图象下降, 所以求出函数的对称轴即可求解.

【详解】 解:  $\because y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ , 又抛物线开口向上,

$\therefore$  当  $x \leq 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 图像下降; 当  $x \geq 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 图像上升;

$\because$  二次函数  $y = x^2 - 4x + 1$  的图像的一部分是下降的,

$\therefore x \leq 2$ ,

故答案为:  $x \leq 2$ .

12. 一个多边形的内角和是  $1080^\circ$ , 这个多边形的边数是\_\_\_\_\_.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查多边形内角和, 熟练掌握多边形内角和公式是解题的关键; 因此此题可根据多边形内角和公式  $(n - 2) \times 180^\circ$  进行求解即可.

【详解】 解: 由题意得:  $(n - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ ,

$\therefore n = 8$ ;

故答案为 8.

13. 若点  $P$  到  $\odot A$  上的所有点的距离中, 最大距离为 8, 最小距离为 2, 那么  $\odot A$  的半径为\_\_.

【答案】 3 或者 5

【解析】

【分析】 本题考查了点与圆的位置关系, 分点  $P$  在  $\odot A$  外和  $\odot A$  内两种情况讨论, 当点  $P$  在  $\odot A$  外时, 最大距离与最小距离之差等于直径; 当点  $P$  在  $\odot A$  内时, 最大距离与最小距离之和等于直径, 即可得.

【详解】 解: 点  $P$  在  $\odot A$  外时,

$\because \odot O$  外一点  $P$  到  $\odot O$  上所有的点的距离中, 最大距离是 8, 最小距离是 2,

$\therefore \odot O$  的半径长等于  $\frac{8-2}{2} = 3$ ;

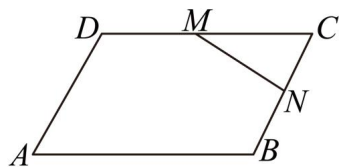
点  $P$  在  $\odot A$  内时,

$\because \odot O$  内一点  $P$  到  $\odot O$  上所有的点的距离中, 最大距离是 8, 最小距离是 2,

$\therefore \odot O$  的半径长等于  $\frac{8+2}{2} = 5$ ,

故答案为: 3 或者 5.

14. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $M$  是边  $CD$  中点, 点  $N$  是边  $BC$  的中点, 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ , 那么  $\overrightarrow{MN}$  可用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表示为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质和线段的中点, 可用  $\vec{a}$  表示出  $\overrightarrow{MC}$ , 用  $\vec{b}$  表示出  $\overrightarrow{CN}$ , 再根据

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ , 即可用  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  表示出  $\overrightarrow{MN}$ .

【详解】  $\because \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,

$\therefore \overrightarrow{CB} = -\vec{b}$ .

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,

$\because$  点  $M$  是边  $CD$  中点, 点  $N$  是边  $BC$  的中点,

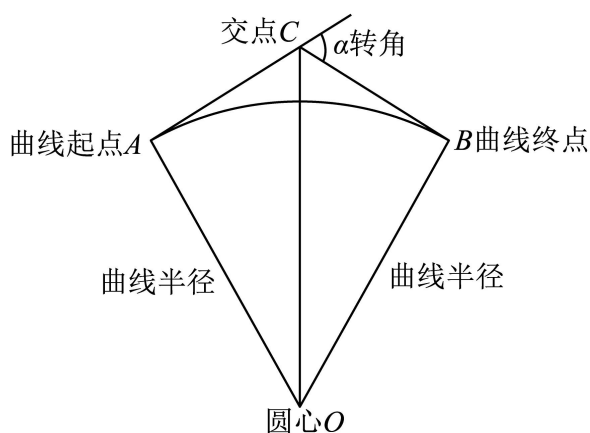
$$\therefore \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{a} + (-\frac{1}{2}\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

故答案为:  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

【点睛】本题考查平行四边形的性质，线段的中点和向量的线性运算．利用数形结合的思想是解答本题的关键．

15. 中国高铁的飞速发展, 已成为中国现代化建设的重要标志. 如图是高铁线路在转向处所设计的圆曲线 (即圆弧), 高铁列车在转弯时的曲线起点为  $A$ , 曲线终点为  $B$ , 过点  $A$ ,  $B$  的两条切线相交于点  $C$ , 列车在从  $A$  到  $B$  行驶的过程中转角  $\alpha$  为  $60^\circ$ . 若圆曲线的半径  $OA = 1.5\text{km}$ , 则这段圆曲线  $\widehat{AB}$  的长为 \_\_\_\_\_  $\text{km}$ .



【答案】  $\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了切线的性质，求弧长，根据题意得出  $\angle AOB = 60^\circ$ ，将已知数据代入弧长公式，即可求解．

【详解】解:  $\because$  过点  $A$ ,  $B$  的两条切线相交于点  $C$ , 列车在从  $A$  到  $B$  行驶的过程中转角  $\alpha$  为  $60^\circ$ .

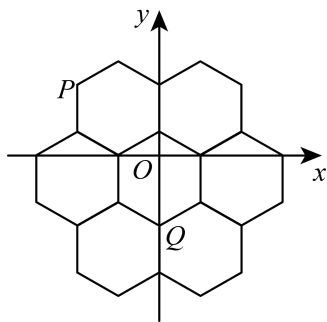
$$\therefore \angle CAO = \angle CBO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle ACB = \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{圆曲线 } \widehat{AB} \text{ 的长为 } \frac{60}{180} \times \pi \times \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2} (\text{km})$$

故答案为:  $\frac{\pi}{2}$ .

16. 蜂巢结构精巧, 其巢房横截面的形状均为正六边形. 如图是部分巢房的横截面图, 图中 7 个全等的正六边形不重叠且无缝隙, 将其放在平面直角坐标系中, 点  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  均为正六边形的顶点. 若点  $P$ ,  $Q$  的坐标分别为  $(-2\sqrt{3}, 3)$ ,  $(0, -3)$ , 则点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_.

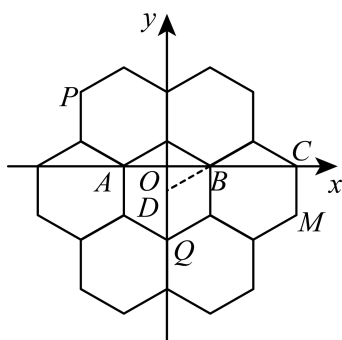


【答案】  $(3\sqrt{3}, -2)$

【解析】

【分析】 设中间正六边形的中心为  $D$ ，连接  $DB$ ．判断出  $OC$ ， $CM$  的长，可得结论． 本题考查正多边形与圆，解直角三角形等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．

【详解】 解： 设中间正六边形的中心为  $D$ ，连接  $DB$ ．



$\because$  点  $P$ ， $Q$  的坐标分别为  $(-2\sqrt{3}, 3)$ ， $(0, -3)$ ，图中是 7 个全等的正六边形，

$$\therefore AB = BC = 2\sqrt{3}, \quad OQ = 3,$$

$$\therefore OA = OB = \sqrt{3},$$

$$\therefore OC = 3\sqrt{3},$$

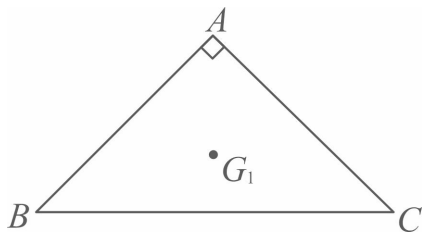
$$\because DQ = DB = 2OD,$$

$$\therefore OD = 1, \quad QD = DB = CM = 2,$$

$$\therefore M(3\sqrt{3}, -2),$$

故答案为：  $(3\sqrt{3}, -2)$

17. 如图， $\triangle ABC$  为等腰直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $G_1$  为  $\triangle ABC$  的重心， $E$  为线段  $AB$  上任意一动点，以  $CE$  为斜边作等腰  $\text{Rt}\triangle CDE$ （点  $D$  在直线  $BC$  的上方）， $G_2$  为  $\text{Rt}\triangle CDE$  的重心，设  $G_1$ 、 $G_2$  两点的距离为  $d$ ，那么在点  $E$  运动过程中  $d$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

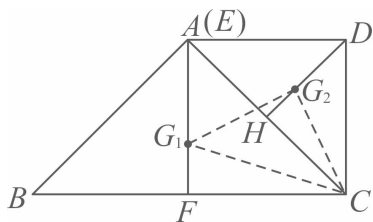


【答案】  $0 \leq d \leq \sqrt{10}$

【解析】

【分析】当点  $E$  与点  $B$  重合时， $d = 0$ ，当点  $E$  与点  $A$  重合时， $d$  的值最大，利用重心的性质以及勾股定理求得  $CG_1 = 2\sqrt{5}$ ， $CG_2 = \sqrt{10}$ ，证明  $\triangle CG_1G_2 \sim \triangle BCA$ ，推出  $\triangle CG_1G_2$  是等腰直角三角形，据此求解即可。

【详解】解：当点  $E$  与点  $B$  重合时， $d = 0$ ，  
当点  $E$  与点  $A$  重合时， $d$  的值最大，如图，点  $F, H$  分别为  $BC, AC$  的中点，  
 $\because \triangle ABC$  为等腰直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $G_1$  为  $\triangle ABC$  的重心，



$$\therefore AF = BF = FC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore G_1F = \frac{1}{3}AF = \sqrt{2}, \quad CG_1 = \sqrt{CF^2 + G_1F^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{同理 } DH = AH = HC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore G_2H = \frac{1}{3}DH = 1, \quad CG_2 = \sqrt{CH^2 + G_2H^2} = \sqrt{10},$$

$$\angle BAC = \angle G_1CG_2 = 45^\circ, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{CG_2}{CG_1} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{即 } \frac{CG_2}{CG_1} = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \triangle CG_1G_2 \sim \triangle BCA,$$

$\therefore \triangle CG_1G_2$  是等腰直角三角形，

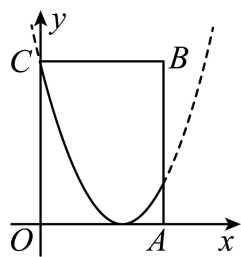
$$\therefore G_1G_2 = CG_2 = \sqrt{10},$$

$$\therefore 0 \leq d \leq \sqrt{10},$$

故答案为：  $0 \leq d \leq \sqrt{10}$  .

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，重心的性质，勾股定理，等腰直角三角形的判定和性质，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

18. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，一个图形上的点都在一边平行于  $x$  轴的矩形内部（包括边界），这些矩形中面积最小的矩形称为该图形的关联矩形. 例如：如图，函数  $y = (x - 2)^2$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) 的图象（抛物线中的实线部分），它的关联矩形为矩形  $OABC$ . 若二次函数  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) 图象的关联矩形恰好也是矩形  $OABC$ ，则  $b =$  \_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{7}{12}$  或  $-\frac{25}{12}$

【解析】

【分析】 根据题意求得点  $A(3,0)$ ， $B(3,4)$ ， $C(0,4)$ ，根据题意分两种情况，待定系数法求解析式即可求解.

【详解】 由  $y = (x - 2)^2$  ( $0 \leq x \leq 3$ )，当  $x = 0$  时， $y = 4$ ，

$\therefore C(0,4)$ ，

$\because A(3,0)$ ，四边形  $ABCO$  是矩形，

$\therefore B(3,4)$ ，

①当抛物线经过  $O$ ， $B$  时，将点  $(0,0)$ ， $B(3,4)$  代入  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  ( $0 \leq x \leq 3$ )，

$$\therefore \begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{4} \times 9 + 3b + c = 4 \end{cases}$$

解得：  $b = \frac{7}{12}$

②当抛物线经过点  $A$ ， $C$  时，将点  $A(3,0)$ ， $C(0,4)$  代入  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  ( $0 \leq x \leq 3$ )，

$$\therefore \begin{cases} c = 4 \\ \frac{1}{4} \times 9 + 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } b = -\frac{25}{12}$$

$$\text{综上所述, } b = \frac{7}{12} \text{ 或 } b = -\frac{25}{12},$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{12} \text{ 或 } -\frac{25}{12}.$$

【点睛】本题考查了待定系数法求抛物线解析式，理解新定义，最小矩形的限制条件是解题的关键.

### 三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } 8^{\frac{1}{3}} + |3 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} - 2} + (\pi - \sqrt{2})^0.$$

$$\text{【答案】 } 4 - 2\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】本题考查了实数的运算，熟练掌握运算是解题的关键；

原式第一项利用立方根的定义化简，第二项利用绝对值的代数意义化简，第三项分母有理化，最后一项利用零指数幂法则计算即可得到结果.

$$\text{【详解】 } 8^{\frac{1}{3}} + |3 - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3} - 2} + (\pi - \sqrt{2})^0$$

$$= 2 + 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 + 1$$

$$= 4 - 2\sqrt{3}.$$

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】利用因式分解法求  $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ ，得到  $x - 2y = 0$  或  $x - 3y = 0$ ，然后得到两个二元一次方程组，分别求出方程组的解即可.

【详解】解：由 (1) 得  $x - 2y = 0$  或  $x - 3y = 0$ ,

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=12 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=12 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得: } \begin{cases} x_1=8 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=9 \\ y_2=3 \end{cases},$$

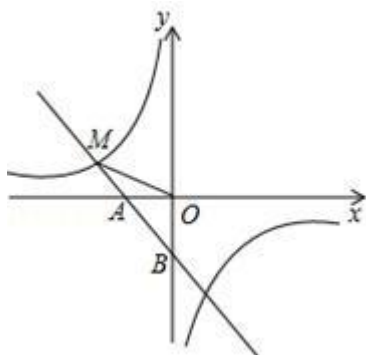
$$\text{则原方程组的解为 } \begin{cases} x_1=8 \\ y_1=4 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x_2=9 \\ y_2=3 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查解二元二次方程组，解此题的关键在于利用因式分解法将第一个方程求解，然后得到新的方程组.也可以利用代入消元法进行求解.

21. 如图，一次函数  $y_1 = -x - 1$  的图象与  $x$  轴交于点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $B$ ，与反比例函数  $y_2 = \frac{k}{x}$  图象的一个交点为  $M(-2, m)$ .

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 求点  $B$  到直线  $OM$  的距离.



【答案】(1)  $y_2 = -\frac{2}{x}$  (2)  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ .

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数解析式求出  $M$  点的坐标，再把  $M$  点的坐标代入反比例函数解析式即可；

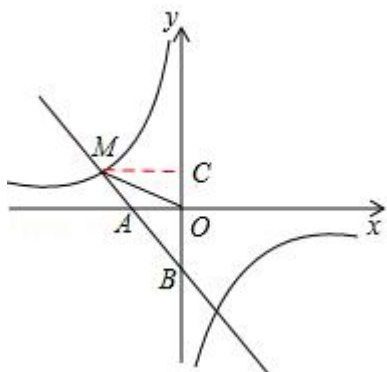
(2) 设点  $B$  到直线  $OM$  的距离为  $h$ ，过  $M$  点作  $MC \perp y$  轴，垂足为  $C$ ，根据一次函数解析式表示出  $B$  点坐标，利用  $\triangle OMB$  的面积  $= \frac{1}{2} \times BO \times MC$  算出面积，利用勾股定理算出  $MO$  的长，再次利用三角形的面积公式可得  $\frac{1}{2} OM \cdot h$ ，根据前面算的三角形面积可算出  $h$  的值.

【详解】解：(1)  $\because$  一次函数  $y_1 = -x - 1$  过  $M(-2, m)$ ， $\therefore m = 1$ ， $\therefore M(-2, 1)$ .

把  $M(-2, 1)$  代入  $y_2 = \frac{k}{x}$  得：  $k = -2$ .

$\therefore$  反比例函数为  $y_2 = -\frac{2}{x}$ .

(2) 设点  $B$  到直线  $OM$  的距离为  $h$ ，过  $M$  点作  $MC \perp y$  轴，垂足为  $C$ .



∵一次函数  $y_1 = -x - 1$  与  $y$  轴交于点 B,

∴点 B 的坐标是  $(0, -1)$ .

$$\therefore S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1.$$

在  $Rt\triangle OMC$  中,  $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ,

$$\therefore S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot h = \frac{\sqrt{5}}{2} h = 1, \therefore h = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{5}.$$

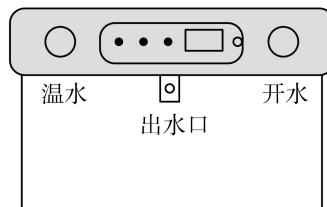
∴点 B 到直线 OM 的距离为  $\frac{2}{5} \sqrt{5}$ .

22. 如图, 某校的饮水机有温水、开水两个按钮, 温水和开水共用一个出水口. 温水的温度为  $30^\circ\text{C}$ , 流速为  $20\text{ml/s}$ ; 开水的温度为  $100^\circ\text{C}$ , 流速为  $15\text{ml/s}$ . 某学生先接了一会儿温水, 又接了一会儿开水, 得到一杯  $280\text{ml}$  温度为  $60^\circ\text{C}$  的水 (不计热损失), 求该学生分别接温水和开水的时间.

#### 物理常识

开水和温水混合时会发生热传递, 开水放出的热量等于温水吸收的热量, 可以转化为:

开水的体积  $\times$  开水降低的温度 = 温水的体积  $\times$  温水升高的温度。



**【答案】** 该学生接温水的时间为  $8\text{s}$ , 接开水的时间为  $8\text{s}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查一元一次方程的实际应用, 设该学生接温水的时间为  $x\text{s}$ , 则接温水  $20x\text{ml}$ , 开水  $(280 - 20x)\text{ml}$ , 由物理常识的公式可得方程, 解方程即可.

**【详解】** 解: 设该学生接温水的时间为  $x\text{s}$ ,

根据题意可得:  $20x \times (60 - 30) = (280 - 20x) \times (100 - 60)$ ,

解得  $x = 8$ ,

∴  $20 \times 8 = 160(\text{ml})$ ,

$$\therefore 280 - 160 = 120(\text{ml}),$$

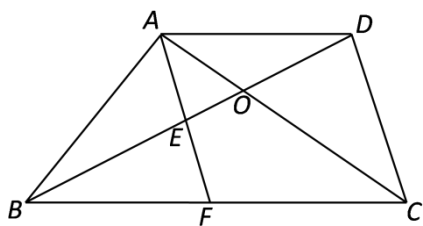
$$\therefore 120 \div 15 = 8(\text{s}),$$

$\therefore$  该学生接温水的时间为 8s, 接开水的时间为 8s.

23. 如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ , 点  $E$  在线段  $OB$  上,  $AE$  的延长线与  $BC$  相交于点  $F$ ,  $OD^2 = OB \cdot OE$ .

(1) 求证: 四边形  $AFCD$  是平行四边形;

(2) 如果  $BC = BD$ ,  $AE \cdot AF = AD \cdot BF$ , 求证:  $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ .



**【答案】** (1) 证明见解析; (2) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 由题意, 得到  $\frac{OE}{OD} = \frac{OB}{OD}$ , 然后由  $AD \parallel BC$ , 得到  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ , 则  $\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD}$ , 即可得到  $AF \parallel CD$ , 即可得到结论;

(2) 先证明  $\angle AED = \angle BCD$ , 得到  $\angle AEB = \angle ADC$ , 然后证明得到  $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}$ , 即可得到  $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ .

**【详解】** 证明: (1)  $\because OD^2 = OE \cdot OB$ ,

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{OB}{OD}.$$

$\because AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD}.$$

$\therefore AF \parallel CD$ .

$\therefore$  四边形  $AFCD$  是平行四边形.

(2)  $\because AF \parallel CD$ ,

$$\therefore \angle AED = \angle BDC, \quad \frac{BE}{BD} = \frac{BF}{BC}.$$

$\because BC = BD$ ,

$$\therefore BE = BF, \quad \angle BDC = \angle BCD$$

$$\therefore \angle AED = \angle BCD.$$

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle AED, \quad \angle ADC = 180^\circ - \angle BCD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADC.$$

$$\therefore AE \cdot AF = AD \cdot BF,$$

$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{AD}{AF}.$$

$\therefore$  四边形 AFCD 是平行四边形,

$$\therefore AF = CD.$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}.$$

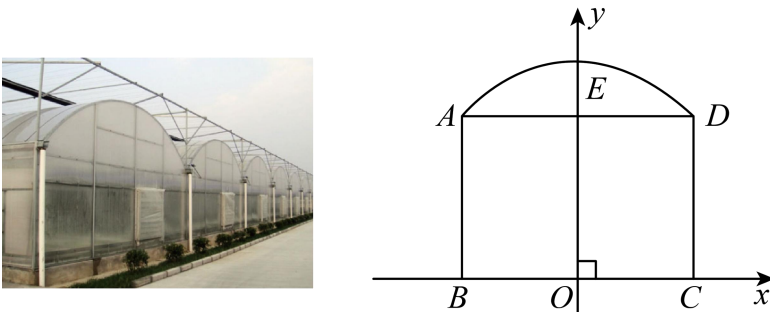
$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADC.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例，平行四边形的判定和性质，以及平行线的性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定方法，正确找到证明三角形相似的条件.

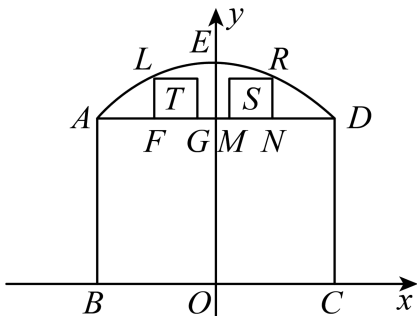
24. 蔬菜大棚是一种具有出色的保温性能的框架覆膜结构，它出现使得人们可以吃到反季节蔬菜. 一般蔬菜大棚使用竹结构或者钢结构的骨架，上面覆上一层或多层保温塑料膜，这样就形成了一个温室空间，如图，某个温室大棚的横截面可以看作矩形  $ABCD$  和抛物线  $AED$  构成，其中  $E$  点为抛物线的拱顶且高  $4\text{m}$ ， $AB = 3\text{m}$ ， $BC = 4\text{m}$ ，取  $BC$  中点  $O$ ，过点  $O$  作线段  $BC$  的垂直平分线  $OE$  交抛物线  $AED$  于点  $E$ ，若以  $O$  点为原点， $BC$  所在直线为  $x$  轴， $OE$  为  $y$  轴建立如图所示平面直角坐标系.

解决下列问题：

(1) 如图，求抛物线的解析式；

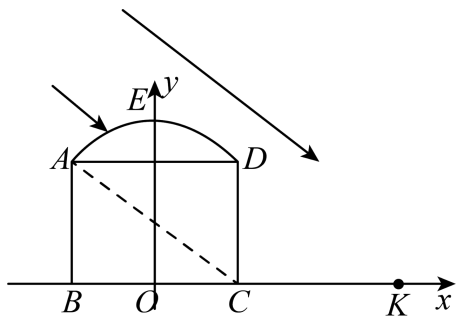


(2) 如图，为了保证蔬菜大棚的通风性，该大棚要安装两个正方形孔的排气装置  $LFGT$ ， $SMNR$ ，若  $FL = NR = 0.75\text{m}$ ，求两个正方形装置的间距  $GM$  的长；



(3) 如图，在某一时刻，太阳光线（太阳光线为平行线）透过  $A$  点恰好照射到  $C$  点，此时大棚截面的阴影

为，求  $BK$  的长.



【答案】(1)  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ;

(2) 0.5m;

(3)  $\frac{97}{12}$  m

【解析】

【分析】(1) 根据题意得到  $E$  的坐标，设函数解析式为  $y = ax^2 + 4$ ，求出点  $A$  坐标，待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 根据正方形性质得到  $HL = HF + FL = 3.75\text{m}$ ，求出  $y = 3.75$  时，对应的自变量的值，得到  $FN$  的长，再减去两个正方形的边长即可得解；

(3) 设直线  $AC$  的解析式为  $y = kx + b$ ，根据题意求出直线  $AC$  的解析式，进而设出过点的光线解析式为  $y = -\frac{3}{4}x + m$ ，利用光线与抛物线相切，求出  $m$  的值，进而求出点  $K$  坐标，即可得出  $BK$  的长.

【小问 1 详解】

解：由题知， $E$  点为抛物线顶点坐标为  $(0, 4)$ ，

设抛物线的解析式为  $y = ax^2 + 4$ ，

$\because$  四边形  $ABCD$  为矩形， $OE$  为  $BC$  的中垂线， $BC = 4\text{m}$ ，

$\therefore AD = BC = 4\text{m}$ ， $OB = 2\text{m}$ ，

$\therefore AB = 3\text{m}$ ，

$\therefore A(-2, 3)$ ，

将其代入  $y = ax^2 + 4$  中，

有  $3 = 4a + 4$ ，

$\therefore a = -\frac{1}{4}$ ，

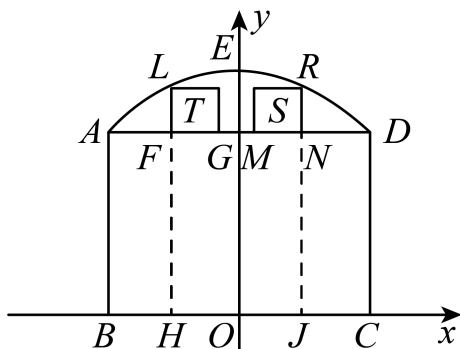
$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  四边形  $LFGT$  和  $SMNR$  为正方形,  $FL = NR = 0.75\text{m}$ ,

$\therefore MN = FG = FL = NR = 0.75\text{m}$ ,

延长  $LF$  交  $BC$  于点  $H$ , 延长  $RN$  交  $BC$  于点  $J$ , 易知四边形  $FHJN$  和  $ABFH$  为矩形,



$\therefore FH = AB = 3\text{m}$ ,  $FN = HJ$ ,

$\therefore HL = HF + FL = 3.75\text{m}$ ,

$\because y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ,

当  $y = 3.75$  时,  $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = 3.75$ , 解得  $x = \pm 1$ ,

$\therefore H(-1, 0)$ ,  $J(1, 0)$ ,

$\therefore FN = HJ = 2\text{m}$ ,

$\therefore GM = FN - FG - MN = 0.5\text{m}$ ;

【小问 3 详解】

解:  $\because OE$  为  $BC$  的中垂线,  $BC = 4\text{m}$ ,

$OB = OC = 2\text{m}$ ,

$\therefore B(-2, 0)$ ,  $C(2, 0)$ ,

设直线  $AC$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\text{则} \begin{cases} 2k + b = 0 \\ -2k + b = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AC$  的解析式为  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ,

$\because$  太阳光为平行线,

设过点  $K$  且平行于直线  $AC$  的解析式为  $y = -\frac{3}{4}x + m$ ,

由题意得  $y = -\frac{3}{4}x + m$  与抛物线相切, 即只有一个交点,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + m \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \end{cases},$$

整理得  $x^2 - 3x + 4m - 16 = 0$ ,

则  $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(4m - 16) = 0$ , 解得  $m = \frac{73}{16}$ ,

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{73}{16},$$

当  $y = 0$  时,  $x = \frac{73}{12}$ ,

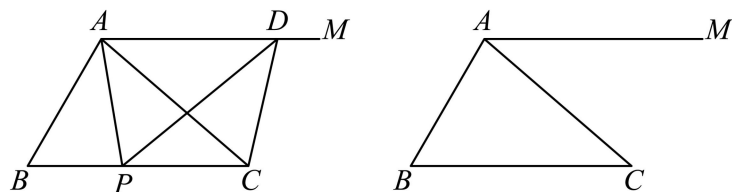
$$\therefore K\left(\frac{73}{12}, 0\right),$$

$\therefore B(-2, 0)$ ,

$$\therefore BK = 2 + \frac{73}{12} = \frac{97}{12} \text{ m}.$$

【点睛】 本题考查二次函数的实际应用, 坐标与图形, 中垂线性质, 待定系数法求出函数解析式, 正方形的性质, 矩形的性质和判定. 读懂题意, 正确的求出二次函数解析式, 利用数形结合的思想进行求解, 是解题的关键.

25. 如图, 已知在  $\triangle ABC$  中, 射线  $AM \parallel BC$ ,  $P$  是边  $BC$  上一动点,  $\angle APD = \angle B$ ,  $PD$  交射线  $AM$  于点  $D$ , 连接  $CD$ .  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $\angle B = 60^\circ$ .



备用图

- (1) 求证:  $AP^2 = AD \cdot BP$ ;
- (2) 如果以  $AD$  为半径的圆  $A$  与以  $BP$  为半径的圆  $B$  相切, 求线段  $BP$  的长度;
- (3) 将  $\triangle ACD$  绕点  $A$  旋转, 如果点  $D$  恰好与点  $B$  重合, 点  $C$  落在点  $E$  的位置上, 求此时  $\angle BEP$  的余切值.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 2      (3)  $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 先由平行线证明  $\angle APB = \angle DAP$ ，再由已知条件  $\angle APD = \angle B$ ，证明  $\triangle ABP \sim \triangle DPA$ ，得出对应边成比例  $\frac{AP}{DA} = \frac{BP}{AP}$ ，即可得出结论；

(2) 设  $BP = x$ ，作  $AH \perp BC$  于  $H$ ，先根据勾股定理求出  $AH$ ，再由勾股定理得出

$AP^2 = PH^2 + AH^2$ ，由两圆外切时， $AB = |AD \pm BP|$ ，得出方程，解方程即可；

(3) 作  $PG \perp AB$  于  $G$ ；先根据题意得出  $AD = AB = \frac{x^2 - 4x + 16}{x} = 4$ ，解方程求出  $BP$ ，再证明  $\triangle ABP$

为等边三角形求出  $PG$ ，然后证明四边形  $ADCH$  为矩形得出  $BE = CD = AH = 2\sqrt{3}$ ，  
 $\angle ABE = \angle ADC = 90^\circ$ ，求出  $BF$ ，即可求  $\angle BEP$  的余切值，

【小问 1 详解】

$\because AM \parallel BC$ ，

$\therefore \angle APB = \angle DAP$ ，

$\because \angle APD = \angle B$ ，

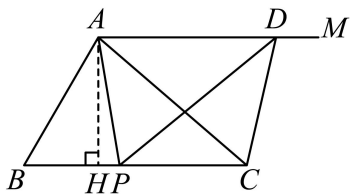
$\therefore \triangle ABP \sim \triangle DPA$ ，

$\therefore \frac{AP}{DA} = \frac{BP}{AP}$ ，

$\therefore AP^2 = AD \cdot BP$ ；

【小问 2 详解】

设  $BP = x$ ，作  $AH \perp BC$  于  $H$ ，如图所示：



$\because \angle B = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore \angle BAH = 30^\circ$ ，

$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = 2$ ，

根据勾股定理得： $AH = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$AP^2 = PH^2 + AH^2 = (x - 2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 16$ ，

$$\therefore AD = \frac{AP^2}{BP} = \frac{x^2 - 4x + 16}{x},$$

两圆相切时,  $AB = |AD \pm BP|$ ,

$$\text{即 } 4 = \left| x \pm \frac{x^2 - 4x + 16}{x} \right|,$$

解得:  $x = 2$ ,

$\therefore BP$  的长度为 2;

【小问 3 详解】

$$\text{根据题意得: } AD = AB = \frac{x^2 - 4x + 16}{x} = 4.,$$

解得:  $x = 4$ ,

$$\therefore BP = 4,$$

$$\because \angle ABP = 60^\circ, \quad AB = BP = 4$$

$\therefore \triangle ABP$  为等边三角形,

$$AD = AB = 4, \quad CH = BC - BH = 4, \quad AD \parallel CH, \quad \angle AHC = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $ADCH$  为矩形,

$$\therefore BE = CD = AH = 2\sqrt{3}, \quad \angle ABE = \angle ADC = 90^\circ,$$

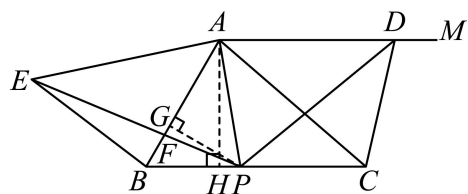
作  $PG \perp AB$  于  $G$ , 如图所示:

$$\text{则 } PG \parallel BE, \quad PG = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore PG = BE,$$

$$\therefore BF = FG = \frac{1}{2}BG = 1,$$

$$\therefore \cot \angle EBP = \frac{BE}{BF} = 2\sqrt{3}.$$



【点睛】本题是相似形综合题, 考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理、两圆外切的条件、等边三角形的判定与性质、三角函数等知识; 通过作辅助线运用勾股定理和证明等边三角形、矩形是解题的关键.

