

2024 学年第二学期初三年级学业质量调研

数学试卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 3 倒数的是 (▲)

(A) 3; (B) -3; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $-\frac{1}{3}$.

2. 下列计算正确的是 (▲)

(A) $a + a^2 = a^3$; (B) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$;
(C) $(2a^2)^3 = 8a^5$; (D) $(ab)^2 = a^2b^2$.

3. 下列函数中, 函数值 y 随 x 的增大而减小的是 (▲)

(A) $y = \frac{3}{x}$; (B) $y = -x + 1$; (C) $y = x^2$; (D) $y = 3x$.

4. 某校足球社团共有 30 名成员, 他们的年龄在 12 岁至 16 岁之间, 在统计全体社团成员的年龄时, 14 岁和 15 岁的人数尚未统计完全, 并制作了如下的表格, 根据表格, 关于全体社团成员年龄的统计量能确定的是 (▲)

年龄 (单位: 岁)	12	13	14	15	16
人数 (单位: 名)	7	11			2

(A) 平均数和中位数; (B) 平均数和方差;
(C) 众数和中位数; (D) 众数和方差.

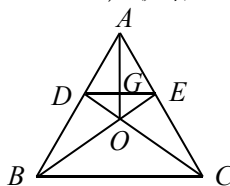
5. 正多边形的一个外角的大小 y (度) 随着它的边数 n 的变化而变化, 下列说法正确的是 (▲)

(A) y 与 n 之间是正比例函数关系; (B) y 与 n 之间是反比例函数关系;
(C) y 与 n 之间是一次函数关系; (D) y 与 n 之间是二次函数关系.

6. 如图, 在等边三角形 ABC 中, D 、 E 分别在 AB 、 AC 上, 联结 BE 、 CD 交于 O , 联结 AO 交 DE 于点 G . 有下列两个命题:

- ①如果 $DE \parallel BC$, 那么 G 为 DE 中点;
②如果 $AO \perp DE$, 那么 $DE \parallel BC$.

对于这两个命题判断正确的是 (▲)



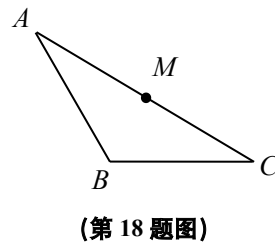
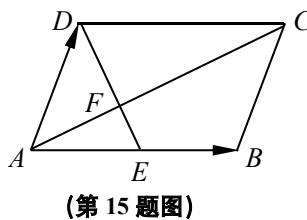
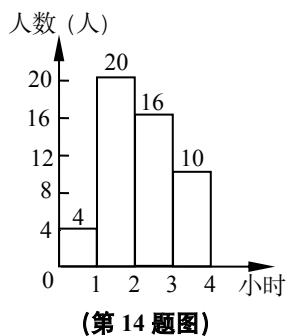
(第 6 题图)

- (A) ①②都是真命题; (B) ①是真命题, ②是假命题;
(C) ①是假命题, ②是真命题; (D) ①②都是假命题.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $4^{\frac{1}{2}} = \underline{\quad\quad\quad}$.
8. 因式分解: $ab^2 - 4a = \underline{\quad\quad\quad}$.
9. 根据电影发行方的数据, 截至 2025 年 2 月 18 日 12 时电影《哪吒 2》以 120.9 亿的票房高居春节档票房冠军, 数据 120.9 亿元用科学记数法表示为 $\underline{\quad\quad\quad}$ 元.
10. 函数 $y = \frac{x}{x+2}$ 的定义域是 $\underline{\quad\quad\quad}$.
11. 方程 $\sqrt{12+x} = -x$ 的解是 $\underline{\quad\quad\quad}$.
12. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是 $\underline{\quad\quad\quad}$.
13. 已知在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AD = 2$, $BC = 5$, 那么梯形 $ABCD$ 的周长为 $\underline{\quad\quad\quad}$.
14. 为了了解学生每周在家做家务情况, 某校对部分学生进行抽样调查, 并绘制了如图所示的频数分布直方图 (每组数据含最小值, 不含最大值). 如果该校有 1500 名学生, 估计该校平均每周做家务的时间不少于 2 小时的学生约有 $\underline{\quad\quad\quad}$ 名.
15. 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是边 AB 的中点, DE 与对角线 AC 相交于点 F . 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EF} = \underline{\quad\quad\quad}$. (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).
16. 一个不透明的布袋中原来装有大小相同的红色和白色小球共 8 个, 其中红色小球 3 个, 要想从中随机抽取一个, 使抽到红色小球的概率为 50%, 只需往布袋里加入 $\underline{\quad\quad\quad}$ 个红球.
17. 已知等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 8, 它的外接圆 $\odot O$ 半径为 5, 那么圆心 O 到腰 AB 的距离为 $\underline{\quad\quad\quad}$.
18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, 点 M 是 AC 的中点, 将线段 AM 绕点 M 逆时针旋转, 点 A 落在边 CB 延长线上的点 D 处, 联结 MD , 与边 AB 交于点 E , $AE = 3$, $DE = 2$, 那么 AC 的长为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

每周做家务时间的频数分布直方图



三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

先化简： $(1 - \frac{1}{x+2}) \div \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$ ，再求当 $x = \sqrt{2}$ 时此代数式的值.

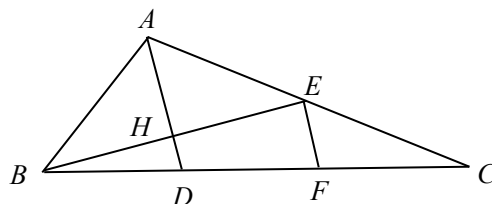
20. (本题满分 10 分)

$$\text{解不等式组} \begin{cases} 2x+3 > 4(x-2), & \text{①} \\ \frac{2x-1}{3} - 2 \leq \frac{x-2}{2}; & \text{②} \end{cases}$$

21. (本题共 2 小题，第 (1) 小题 4 分，第 (2) 小题 6 分，满分 10 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 为中线， AD 平分 $\angle BAC$ ，且 $AD \perp BE$ ，分别交 BE 、 BC 于点 H 、 D ， $EF \perp BE$ ，交 BC 于点 F ， $AB=5$ ， $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$.

- (1) 求 BE 的长；
- (2) 求 $\tan \angle EBC$ 的值.



(第 21 题图)

22. (本题共 2 小题，第 (1) 小题 3 分，第 (2) 小题 7 分，满分 10 分)

一个数学兴趣小组尝试探究一次函数图像与两坐标轴所围成三角形面积的问题. 为了较为全面地研究这个问题，他们准备把它分成两种类型问题来分别进行研究：

类型 I：一条直线 $y=kx+b$ (k 、 b 都不为 0) 与两条坐标轴所围成的三角形面积大小；

类型 II：两条直线 $l_1: y_1=k_1x+b_1$ 和 $l_2: y_2=k_2x+b_2$ ($k_1 \neq k_2$ 、 $b_1 \neq b_2$ ，且都不为零) 与坐标轴所围成的三角形的面积、直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积、直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积之间的关系.

小组成员认为第一类问题只要将直线与两坐标轴的交点坐标分别求出来，就能解决；而第二类的问题需要根据两个函数 k 和 b 符号的不同情况，分别进行研究，才能得出相应的结论.

- (1) 如图 1，请你帮助小组求出 $\triangle ABO$ 的面积 S (用含 k 和 b 的式子表示).

(2) 将直线 l_1 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_1 , 直线 l_2 与两条坐标轴所围成的三角形面积记为 S_2 , 直线 l_1 、 l_2 和 x 轴所围成的三角形面积记为 S_x , 它们和 y 轴所围成的三角形面积记为 S_y .

i) 在图 2 中已经画出了直线 l_1 和 l_2 大致图像的一种情况, 那么关于这两个一次函数的 k 和 b 符号选项正确的是 ▲ .

(A) $k_1 > 0, b_1 > 0, k_2 > 0, b_2 > 0$;

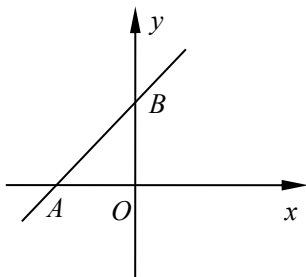
(B) $k_1 > 0, b_1 > 0, k_2 < 0, b_2 < 0$;

(C) $k_1 > 0, b_1 < 0, k_2 < 0, b_2 > 0$;

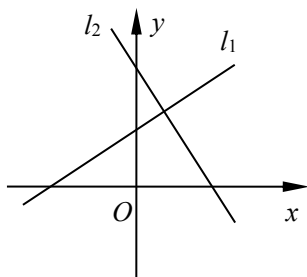
(D) $k_1 > 0, b_1 > 0, k_2 < 0, b_2 > 0$.

此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是 ▲ .

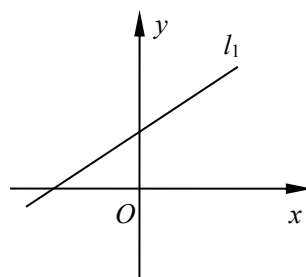
ii) 如图 3, 保持直线 l_1 不变, 改变直线 l_2 中 k_2 和 b_2 的符号 (不考虑 $|k_2|$ 和 $|b_2|$ 的大小), 请在图中画出直线 l_2 的大致图像, 此时 S_1 、 S_2 、 S_x 和 S_y 之间的关系式是 ▲ .



(第 22 题图 1)



(第 22 题图 2)



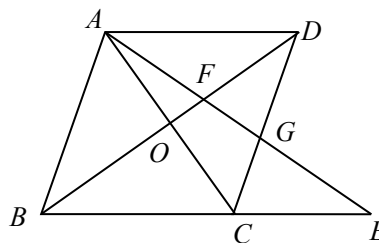
(第 22 题图 3)

23. (本题共 2 小题, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 7 分, 满分 12 分)

已知, 如图: 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 点 E 是边 BC 延长线上一点, 联结 AE , 交 BD 于点 F , 交 CD 于点 G .

(1) 求证: $AF^2 = FG \cdot FE$;

(2) 联结 CF , 如果 $\angle DAE = \angle FCD$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第 23 题图)

24. (本题共 3 小题, 每小题 4 分, 满分 12 分)

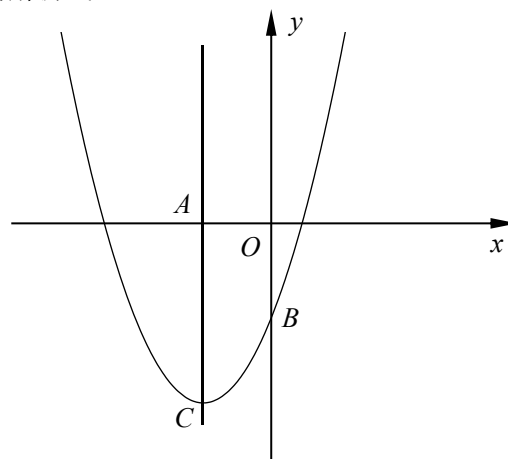
定义: 如果一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的顶点坐标满足条件 (t, at^2) , 那么称该抛物线为“优雅”抛物线. 例如: 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 4$ 的顶点坐标为 $(1, 2)$, 此时由于 $t=1, a=2$, 顶点坐标符合定义的条件, 所以这条抛物线是“优雅”抛物线.

(1) 如果抛物线 $C_1: y = x^2 + 4x + m$ 是“优雅”抛物线, 求 m 的值.

(2) 如图, 把 (1) 中的抛物线 C_1 向下平移得到抛物线 C_2 , 抛物线 C_2 与 y 轴负半轴交于点 B , 顶点为点 C , 对称轴与 x 轴交于点 A .

①点 E 在 CB 延长线上, 点 D 是 x 轴上一点, 且四边形 $ABDE$ 是矩形, 求点 E 的坐标.

②如果抛物线 $C_3: y = 2x^2 + px + q$ 为“优雅”抛物线, 它的顶点 G 在 x 轴上, 抛物线 C_2 与 C_3 交于点 M , 且 $AM \parallel BC$, 求抛物线 C_2 的解析式.



(第 24 题图)

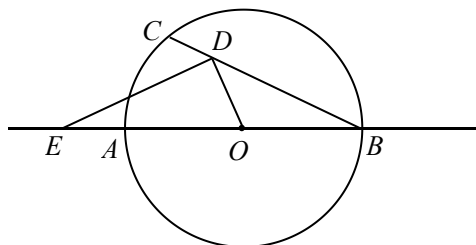
25. (本题满分 14 分, 其中第 (1) 小题 3 分, 第 (2) 小题 6 分, 第 (3) 小题 5 分)

如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 长为 $4\sqrt{5}$, 弦 BC 的长为 8, 点 D 是 BC 上一点, 过点 D 作 OD 的垂线交直线 AB 于点 E .

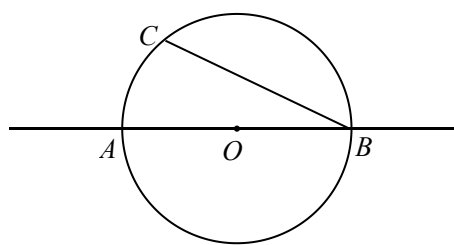
(1) 求 $\angle CBO$ 的正切值.

(2) 当 $\triangle BOD$ 与 $\triangle BDE$ 相似时, 求 BD 的长.

(3) 以点 E 为圆心, ED 长为半径画 $\odot E$, 试根据线段 BD 的长度情况探究 $\odot E$ 和 $\odot O$ 的位置关系.



(第 25 题图)



(第 25 题备用图)