

2022 年上海市嘉定区中考数学二模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 下列实数中，属于无理数的是()

- A. $\sqrt{4}$ B. 2.020020002 C. $\sqrt{11}$ D. $\frac{22}{7}$

2. (4 分) 下列关于 x 的一元二次方程中有两个不相等的实数根的是()

- A. $x^2 + 4 = 0$ B. $x^2 + 2x = 0$ C. $x^2 - 4x + 4 = 0$ D. $x^2 - x + 2 = 0$

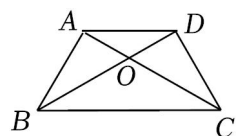
3. (4 分) 如果将抛物线 $y = (x+1)^2 - 1$ 向上平移 2 个单位，那么平移后抛物线的顶点坐标是()

- A. (0,2) B. (2,0) C. (1,1) D. (-1,1)

4. (4 分) 数据 1, 1, 1, 2, 4, 2, 2, 4 的众数是()

- A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. 1 或 2 或 4

5. (4 分) 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，那么下列结论一定成立的是()



- A. $\angle CAB = \angle CBA$ B. $\angle DAB = \angle ABC$ C. $\angle AOD = \angle DAB$ D. $\angle OAD = \angle ODA$

6. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 8$ ， $\tan A = 2$ ，以点 A 为圆心，半径为 8 的圆记作圆 A ，那么下列说法正确的是()

- A. 点 C 在圆 A 内，点 B 在圆 A 外 B. 点 C 在圆 A 上，点 B 在圆 A 外
C. 点 C 、 B 都在圆 A 内 D. 点 C 、 B 都在圆 A 外

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 计算： $2(1-2x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (4 分) 分解因式： $a^2 - 9a = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (4 分) 不等式 $\frac{1}{2}x - 2 > 1$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (4 分) 计算： $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

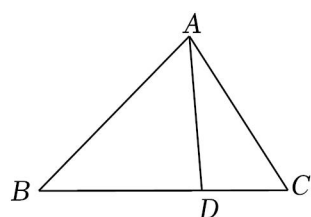
11. (4分) 用换元法解方程 $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$ 时, 如果设 $\frac{x}{x+2} = y$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是 ____.

12. (4分) 如果正比例函数 $y = (1-k)x$ 的图像经过点 $A(2, -4)$, 那么 k 的值是 ____.

13. (4分) 数据 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 的方差是 ____.

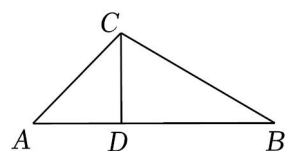
14. (4分) 在不透明的袋中装有 5 个红球、2 个白球和 1 个黑球, 它们除颜色外其它都相同, 如果从这透明的袋里随机摸出一个球, 那么所摸到的球恰好为白球的概率是 ____.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $BD = 2DC$, 设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{DA} =$ ____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

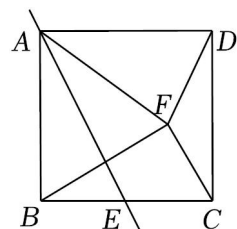


16. (4分) 已知圆 O_1 与圆 O_2 外切, 其中圆 O_2 的半径是 4cm , 圆心距 $O_1O_2 = 6\text{cm}$, 那么圆 O_1 的半径是 ____ cm .

17. (4分) 我们把两个三角形的重心之间的距离叫做重心距. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 中边 AB 上的高, 如果 $BC = 6$, 那么 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心距是 ____.



18. (4分) 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, 点 E 在边 BC 上, $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折后点 B 落到正方形 $ABCD$ 的内部点 F , 联结 BF 、 CF 、 DF , 如图, 如果 $\angle BFC = 90^\circ$, 那么 $DF =$ ____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

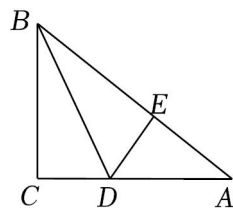
19. (10分) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} + \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - (\sqrt{2})^3$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 8, & \textcircled{1} \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0. & \textcircled{2} \end{cases}$$

21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$, 垂足为 E , 已知 $AE = 16$, $\sin A = \frac{3}{5}$.

(1) 求 CD 的长;

(2) 求 $\angle DBC$ 的余切值.



22. (10分) 已知直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 与双曲线都经过点 $A(2, m)$.

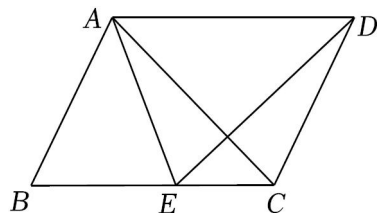
(1) 如果点 $B(-2, 6)$ 在直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 上, 求 m 的值;

(2) 如果第三象限的点 C 与点 A 关于原点对称, 点 C 的纵坐标是 -3 , 求双曲线的表达式.

23. (12分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 是对角线, $AC = AD$, 点 E 在边 BC 上, $AB = AE$, $\angle BAE = \angle CAD$, 联结 DE .

(1) 求证: $BC = DE$;

(2) 当 $AC = BC$ 时, 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

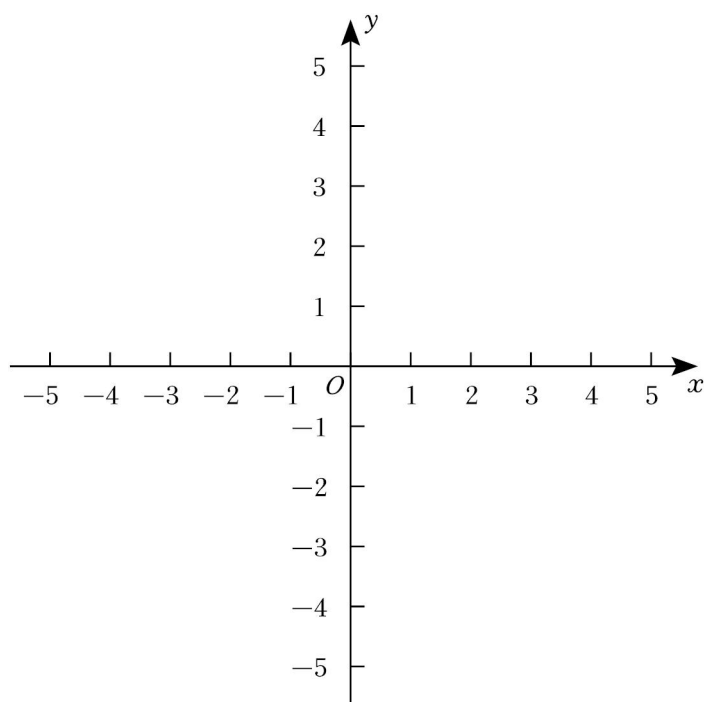


24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy (如图) 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(4, 1)$ 两点, 与 y 轴的交点为 C 点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 求四边形 $OABC$ 的面积;

(3) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴是直线 l , 点 D 与点 B 关于直线 l 对称, 在线段 BC 上是否存在一点 E , 使四边形 $ADCE$ 是菱形, 如果存在, 请求出点 E 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.



25. (14分) 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $DC \parallel AB$, $\angle DAB = 90^\circ$, $DC = 3$, $DA = 6$, $AB = 9$, 点 E 在射线 AB 上, 过点 E 作 $EF \parallel AD$, 交射线 DC 于点 F , 设 $AE = x$.

(1) 当 $x = 1$ 时, 直线 EF 与 AC 交于点 G , 如图 1, 求 GE 的长;

(2) 当 $x > 3$ 时, 直线 EF 与射线 CB 交于点 H .

①当 $3 < x < 9$ 时, 动点 M (与点 A 、 D 不重合) 在边 AD 上运动, 且 $AM = BE$, 联结 MH 交 AC 于点 N 如图 2, 随着动点 M 的运动, 试问 $CH:HN$ 的值有没有变化, 如果有变化, 请说明你的理由; 如果没有变化, 请你求出 $CH:HN$ 的值;

②联结 AH , 如果 $\angle HAE = \angle CAD$, 求 x 的值.

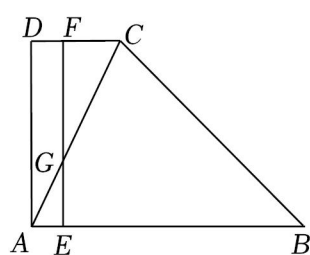


图1

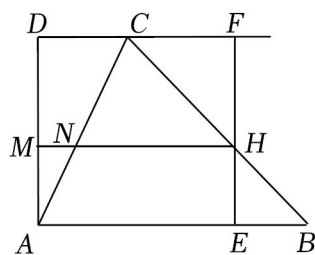
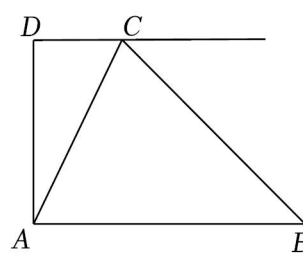


图2



备用图

2022 年上海市嘉定区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 下列实数中，属于无理数的是()

- A. $\sqrt{4}$ B. 2.020020002 C. $\sqrt{11}$ D. $\frac{22}{7}$

【分析】根据无理数的定义进行判断即可.

【解答】解：A、 $\sqrt{4}=2$ ，2 是整数，属于有理数，不是无理数，故此选项不符合题意；

B、2.020020002 是有限小数，属于有理数，不是无理数，故此选项不符合题意；

C、 $\sqrt{11}$ 是无理数，故此选项符合题意；

D、 $\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数，不是无理数，故此选项不符合题意.

故选：C.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数. 如 π ， $\sqrt{6}$ ，0.8080080008... (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式.

2. (4 分) 下列关于 x 的一元二次方程中有两个不相等的实数根的是()

- A. $x^2 + 4 = 0$ B. $x^2 + 2x = 0$ C. $x^2 - 4x + 4 = 0$ D. $x^2 - x + 2 = 0$

【分析】分别计算四个方程的根的判别式的值，然后根据根的判别式的意义判断方程根的情况即可.

【解答】解：A. 因为 $\Delta = 0^2 - 4 \times 4 = -16 < 0$ ，则方程没有实数解，所以 A 选项不符合题意；

B. 因为 $\Delta = 2^2 - 4 \times 0 = 4 > 0$ ，则方程有两个不相等的实数解，所以 B 选项符合题意；

C. 因为 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$ ，则方程有两个相等的实数解，所以 C 选项不符合题意；

D. 因为 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$ ，则方程没有实数解，所以 D 选项不符合题意.

故选：B.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

3. (4分) 如果将抛物线 $y = (x+1)^2 - 1$ 向上平移 2 个单位, 那么平移后抛物线的顶点坐标是 ()

- A. (0,2) B. (2,0) C. (1,1) D. (-1,1)

【分析】先求出抛物线的顶点坐标, 再根据向上平移纵坐标加求出平移后的抛物线的顶点坐标即可.

【解答】解: 抛物线 $y = (x+1)^2 - 1$ 的顶点坐标为 $(-1, -1)$,

$\therefore$ 顶点坐标 $(-1, -1)$ 向上平移 2 个单位,

$\therefore$ 平移后的抛物线的顶点坐标为 $(-1, 1)$.

故选: D.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并用规律求函数解析式.

4. (4分) 数据 1, 1, 1, 2, 4, 2, 2, 4 的众数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. 1 或 2 或 4

【分析】根据众数的定义回答即可.

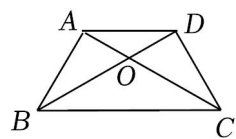
【解答】解: 数据 1 和 2 都出现了 3 次, 并列最多,

所以众数为 1 或 2,

故选: C.

【点评】考查了众数的定义, 了解众数的概念是解答本题的关键, 众数不唯一.

5. (4分) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 那么下列结论一定成立的是 ()



- A. $\angle CAB = \angle CBA$ B. $\angle DAB = \angle ABC$ C. $\angle AOD = \angle DAB$ D. $\angle OAD = \angle ODA$

【分析】根据等腰梯形的性质证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 进而可以解决问题.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$,

$\therefore AB = CD$, $AC = BD$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AD = DA \\ AB = DC, \\ BD = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD (SSS)$,

$\therefore \angle BDA = \angle CAD$,

$\therefore$ 结论一定成立的是 $\angle OAD = \angle ODA$.

故选 D .

【点评】 此题考查了等腰梯形的性质与全等三角形的判定与性质. 解此题的关键是注意数形结合思想的应用.

6. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 8$, $\tan A = 2$, 以点 A 为圆心, 半径为 8 的圆记作圆 A , 那么下列说法正确的是 ()

- A. 点 C 在圆 A 内, 点 B 在圆 A 外 B. 点 C 在圆 A 上, 点 B 在圆 A 外
C. 点 C 、 B 都在圆 A 内 D. 点 C 、 B 都在圆 A 外

【分析】 由解直角三角形求出 $AC = 4$, 由 AC 和 AB 与圆的半径的大小关系, 即可判断出点 C 和点 B 与 $\odot A$ 的位置关系, 即可得出答案.

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 8$, $\tan A = 2$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = 2, \text{ 即 } \frac{8}{AC} = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore AC < 8,$$

$\therefore$ 点 C 在 $\odot A$ 的内部,

$$\because AB > BC,$$

$$\therefore AB > 8,$$

$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 的外部,

故选: A .

【点评】 本题考查了解直角三角形, 点与圆的位置关系, 掌握解直角三角形和会判断点与圆的位置关系是解决问题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. (4分) 计算: $2(1-2x) = \underline{2-4x}$.

【分析】 根据去括号法则进行解答.

【解答】解： $2(1-2x) = 2-4x$.

故答案为： $2-4x$.

【点评】 本题考查了去括号. 解题的关键是掌握去括号的方法：去括号时，运用乘法的分配律，先把括号前的数字与括号里各项相乘，再运用括号前是“+”，去括号后，括号里的各项都不改变符号；括号前是“-”，去括号后，括号里的各项都改变符号.

8. (4分) 分解因式： $a^2-9a = \underline{a(a-9)}$.

【分析】 原式提取公因式 a 即可.

【解答】 解：原式 $= a(a-9)$.

故答案为： $a(a-9)$.

【点评】 此题考查了因式分解-提公因式法，熟练掌握提取公因式的方法是解本题的关键.

9. (4分) 不等式 $\frac{1}{2}x-2>1$ 的解集是 $\underline{x>6}$.

【分析】 根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、系数化为1可得.

【解答】 解：移项，得： $\frac{1}{2}x>1+2$,

合并，得： $\frac{1}{2}x>3$,

系数化为1，得： $x>6$,

故答案为： $x>6$.

【点评】 本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数不等号方向要改变.

10. (4分) 计算： $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \underline{1}$.

【分析】 根据分式的加减运算法则进行化简即可求出答案.

【解答】 解：原式 $= \frac{2x-x-1}{x-1}$

$= \frac{x-1}{x-1}$

$= 1$,

故答案为：1.

【点评】 本题考查分式的加减运算，解题的关键是熟练运用分式的加减运算法则，本题属于基础题型.

11. (4分) 用换元法解方程 $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$ 时，如果设 $\frac{x}{x+2} = y$, 那么原方程可化为关于 y

的整式方程是 $2y^2 - 3y + 1 = 0$.

【分析】 当分式方程比较复杂时, 通常采用换元法使分式方程简化, 可设 $y = \frac{x}{x+2}$.

【解答】 解: 设 $y = \frac{x}{x+2}$, 则 $\frac{1}{y} = \frac{x+2}{x}$.

则原方程可化为: $2y^2 - 3y + 1 = 0$.

故答案为: $2y^2 - 3y + 1 = 0$.

【点评】 当分式方程比较复杂时, 通常采用换元法使分式方程简化.

12. (4分) 如果正比例函数 $y = (1-k)x$ 的图像经过点 $A(2, -4)$, 那么 k 的值是 3 .

【分析】 利用一次函数图象上点的坐标特征, 可得出关于 k 的一元一次方程, 解之即可得出 k 的值.

【解答】 解: $\because$ 正比例函数 $y = (1-k)x$ 的图像经过点 $A(2, -4)$,

$$\therefore -4 = 2(1-k),$$

$$\therefore k = 3.$$

故答案为: 3.

【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y = kx + b$ 是解题的关键.

13. (4分) 数据 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 的方差是 2 .

【分析】 根据题目中的数据可以求得这组数据的平均数, 然后根据方差的计算方法可以求得这组数据的方差.

【解答】 解: 由题意可得,

$$\text{这组数据的平均数是: } \bar{x} = \frac{-2 + (-1) + 0 + 1 + 2}{5} = 0,$$

$$\therefore \text{这组数据的方差是: } s^2 = \frac{(-2-0)^2 + (-1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2}{5} = 2,$$

故答案为: 2.

【点评】 本题考查方差, 解题的关键是明确方差的计算方法.

14. (4分) 在不透明的袋中装有 5 个红球、2 个白球和 1 个黑球, 它们除颜色外其它都相同, 如果从这不透明的袋里随机摸出一个球, 那么所摸到的球恰好为白球的概率是 $\frac{1}{4}$.

【分析】 用白球的个数除以球的总数即可求得答案.

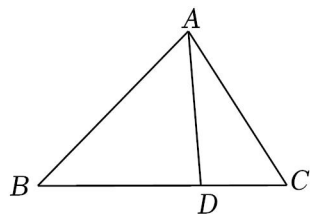
【解答】 解: $\because$ 不透明的袋中装有 5 个红球、2 个白球和 1 个黑球, 共 8 个球,

∴ 从这不透明的袋里随机摸出一个球，那么所摸到的球恰好为白球的概率是 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

【点评】 本题考查的是概率的求法．如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

15. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $BD = 2DC$ ，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DA} = \underline{-\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}}$ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)。

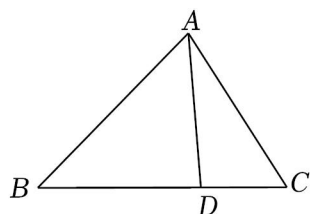


【分析】 首先由已知条件 $BD = 2DC$ 得到 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ；然后根据三角形法则求得答案。

【解答】 解：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD = 2DC$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则到 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

在 $\triangle ABD$ 中， $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = -\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

故答案是： $-\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ 。



【点评】 本题主要考查了平面向量，注意：平行向量既有大小又有方向。

16. (4 分) 已知圆 O_1 与圆 O_2 外切，其中圆 O_2 的半径是 4cm ，圆心距 $O_1O_2 = 6\text{cm}$ ，那么圆 O_1 的半径是 $\underline{2}\text{cm}$ 。

【分析】 利用两圆外切的性质解答即可。

【解答】 解：设圆 O_1 的半径是 $r\text{cm}$ ，

∵ 圆 O_1 与圆 O_2 外切，圆 O_2 的半径是 4cm ，圆心距 $O_1O_2 = 6\text{cm}$ ，

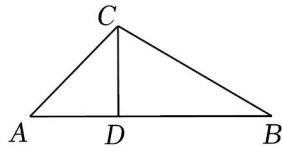
$$\therefore 4 + r = 6,$$

$$\therefore r = 2.$$

故答案为：2。

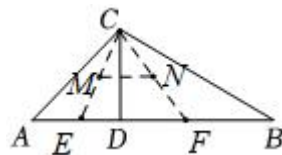
【点评】本题主要考查了相切两圆的性质，利用外切两圆的圆心距等于两圆半径之和列出关系式是解题的关键．

17. (4分) 我们把两个三角形的重心之间的距离叫做重心距．如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 中边 AB 上的高，如果 $BC = 6$ ，那么 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心距是 $1 + \sqrt{3}$ ．



【分析】设 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心分别为 M 、 N ，连接 CM 、 CN 交 AB 于 E 、 F 点，首先解直角三角形，可得 AB 的长，再根据重心的性质说明 $\triangle MCN \sim \triangle ECF$ ，得 $MN = \frac{2}{3}EF = 1 + \sqrt{3}$ ．

【解答】解：如图，设 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心分别为 M 、 N ，连接 CM 、 CN 交 AB 于 E 、 F 点，



在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中， $\because \angle B = 30^\circ$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 3, \quad BD = \sqrt{3}CD = 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\because \angle A = 45^\circ$ ，

$$\therefore AD = CD = 3,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 3 + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2},$$

$\because \triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心分别为 M 、 N ，

$$\therefore \frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CF} = \frac{2}{3},$$

$$\because \angle MCN = \angle ECF,$$

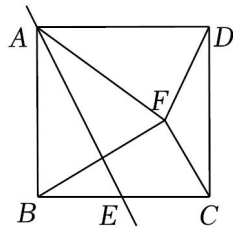
$$\therefore \triangle MCN \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore MN = \frac{2}{3}EF = 1 + \sqrt{3},$$

故答案为： $1 + \sqrt{3}$ ．

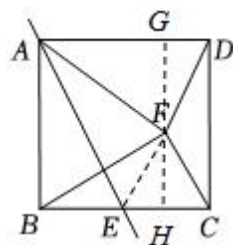
【点评】 本题主要考查了重心的性质，三角形相似的判定与性质，解直角三角形等知识，熟练掌握重心的性质是解题的关键．

18. (4 分) 在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， 点 E 在边 BC 上， $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折后点 B 落到正方形 $ABCD$ 的内部点 F ， 联结 BF 、 CF 、 DF ， 如图， 如果 $\angle BFC = 90^\circ$ ， 那么 $DF = \sqrt{10}$ ．



【分析】 连接 EF ， 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H ， 延长 HF 交 AD 于点 G ， 先证明四边形 $GHCD$ 是矩形， 可得 $GD = CH$ ， $GH = CD$ ， 根据翻折可得 $\angle AFE = \angle ABE$ ， $BE = FE$ ， 再根据 $\angle BFC = 90^\circ$ ， 可得 E 是 BC 的中点， 根据正方形的性质， 易证 $\triangle AGF \sim \triangle FHE$ ， 可得 $\frac{AG}{FH} = \frac{GF}{EH} = \frac{AF}{EF} = 2$ ， 设 $EH = m$ ， $FH = n$ ， 列二元一次方程组， 求出 m 和 n 的值， 再根据勾股定理可得 DF 的长．

【解答】 解： 连接 EF ， 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H ， 延长 HF 交 AD 于点 G ， 如图所示：



$$\therefore \angle GHC = 90^\circ,$$

在正方形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GHCD$ 是矩形，

$$\therefore GH = CD, \quad GD = HC,$$

根据翻折， 可得 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ ，

$$\therefore \angle AFE = \angle ABE, \quad BE = FE,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle EFB,$$

$$\because \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC + \angle FCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle ECF,$$

$$\therefore FE = CE,$$

$$\therefore BE = CE,$$

在正方形 $ABCD$ 中, $\angle ABE = 90^\circ$, $AB = BC = CD = AD = 5$, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ, \quad \frac{AF}{EF} = \frac{AB}{BE} = 2,$$

$$\therefore \angle AFG + \angle EFH = 90^\circ,$$

$$\because \angle EFH + \angle FEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle FEH,$$

$$\because FH \perp BC, \text{ 且 } AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle FHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle FHE,$$

$$\therefore \frac{AG}{FH} = \frac{GF}{EH} = \frac{AF}{EF} = 2,$$

设 $EH = m$, $FH = n$, 则 $GF = 2m$, $AG = 2n$,

$$\because EC = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2},$$

$$CH = \frac{5}{2} - m,$$

$$\because GD = CH, \quad GH = CD,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{5}{2} - m = 5 - 2n \\ 2m + n = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\therefore GF = 2m = 3, \quad GD = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1,$$

根据勾股定理, 得 $DF = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

故答案为: $\sqrt{10}$.

【点评】 本题考查了正方形的性质, 矩形的判定和性质, 折叠的性质, 直角三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理等, 本题综合性较强, 属于中考常考题型.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. (10 \text{ 分}) \text{ 计算: } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - (\sqrt{2})^3.$$

【分析】 先算负整数指数幂, 二次根式的乘法, 分母有理化和乘方运算, 再合并即可.

【解答】解：原式 $= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2}$

$$= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2}$$

$$= 1.$$

【点评】本题考查二次根式的混合运算，解题的关键是掌握二次根式的混合运算的相关法则。

20. (10分) 解方程组：
$$\begin{cases} x - 2y = 8, & \text{①} \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

【分析】由②得出 $(x+6y)(x-y)=0$ ，求出 $x+6y=0$ ， $x-y=0$ ③，由①和③组成两个二元一方程组，再求出方程组的解即可。

【解答】解：
$$\begin{cases} x - 2y = 8 & \text{①} \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 & \text{②} \end{cases},$$

由②得： $(x+6y)(x-y)=0$ ，

即 $x+6y=0$ ， $x-y=0$ ③，

则由①和③组成两个方程组
$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + 6y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

解之得：
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -8 \\ y = -8 \end{cases},$$

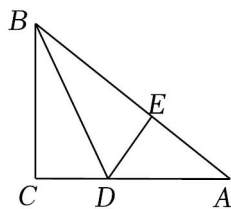
即原方程组的解是
$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = -8 \end{cases}.$$

【点评】本题考查了解高次方程组，能把高次方程组转化成二元一次方程组（低次方程组）是解此题的关键。

21. (10分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，已知 $AE = 16$ ， $\sin A = \frac{3}{5}$ 。

(1) 求 CD 的长；

(2) 求 $\angle DBC$ 的余切值。



【分析】(1) 设 $DE = 3x$ ，由于 $\sin A = \frac{3}{5}$ ，所以 $AD = 5x$ ，再由勾股定理列出方程即可求出 x

的值.

(2) 设 $BC = y$, 根据 $\sin A = \frac{3}{5}$ 可求出 $y = 24$, 然后根据余切定义即可求出答案.

【解答】 解: (1) 设 $DE = 3x$,

$$\because \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AD = 5x,$$

$$\text{由勾股定理可知: } 25x^2 = 9x^2 + 16^2,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore DE = 12,$$

$\because \angle C = 90^\circ$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$,

$$\therefore CD = DE = 12.$$

(2) 设 $BC = y$,

$$\therefore BC = BE = y,$$

$$\therefore AB = 16 + y,$$

$$\because \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{y}{16 + y} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore y = 24,$$

$$\therefore \cot \angle DBC = \frac{BC}{CD} = 2.$$

【点评】 本题考查解直角三角形, 解题的关键是根据题意求出 DE 与 BC 的长度, 本题属于中等题型.

22. (10 分) 已知直线 $y = kx + 4 (k \neq 0)$ 与双曲线都经过点 $A(2, m)$.

(1) 如果点 $B(-2, 6)$ 在直线 $y = kx + 4 (k \neq 0)$ 上, 求 m 的值;

(2) 如果第三象限的点 C 与点 A 关于原点对称, 点 C 的纵坐标是 -3 , 求双曲线的表达式.

【分析】 (1) 把点 $B(-2, 6)$ 的坐标代入直线 $y = kx + 4$, 可求出 k 的值, 进而确定直线的关系式, 再根据 A 是两个函数图象的交点, 可确定点 A 的坐标, 确定 m 的值;

(2) 关于原点对称的点坐标的变化关系可求出点 C 的坐标, 进而确定点 A 的坐标, 确定反比例函数的关系式.

【解答】解：（1） $\because$ 点 $B(-2, 6)$ 在直线 $y = kx + 4 (k \neq 0)$ 上，

$$\therefore 6 = -2k + 4,$$

解得 $k = -1$ ，

$\therefore$ 直线的关系式为 $y = -x + 4$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = -2 + 4 = 2$ ，

即 $m = 2$ ；

（2）第三象限的点 C 与点 A 关于原点对称，点 $A(2, m)$ ，点 C 的纵坐标是 -3 ，

$\therefore C(-2, -3)$ ， $A(2, 3)$ ，

又 $\because$ 双曲线经过点 $A(2, 3)$ ．

$\therefore k = 6$ ，

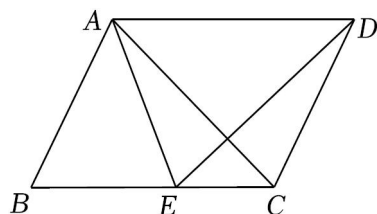
$\therefore$ 反比例函数的关系式为 $y = \frac{6}{x}$ ．

【点评】本题考查反比例函数与一次函数的交点，将点的坐标代入相应的函数关系式是解决问题常用的方法．

23. (12 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 是对角线， $AC = AD$ ，点 E 在边 BC 上， $AB = AE$ ， $\angle BAE = \angle CAD$ ，联结 DE ．

（1）求证： $BC = DE$ ；

（2）当 $AC = BC$ 时，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．



【分析】（1）证 $\triangle ABC \cong \triangle AED (SAS)$ ，即可得到结论；

（2）证 $BC = AD = DE$ ，则 $\angle EAD = \angle AED$ ，再证 $\angle AEB = \angle B$ ，则 $\angle EAD = \angle AEB$ ，得 $AD \parallel BC$ ，然后由平行四边形的判定即可得出结论．

【解答】证明：（1） $\because \angle BAE = \angle CAD$ ，

$$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAD + \angle EAC,$$

即 $\angle BAC = \angle EAD$ ．

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAC = \angle EAD \\ AC = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED (SAS)$.

$\therefore BC = DE$;

(2) 由(1)可知, $\triangle ABC \cong \triangle AED$,

$\therefore \angle B = \angle AED$, $BC = DE$, $AC = AD$,

$\because AC = BC$,

$\therefore BC = AD = DE$,

$\therefore \angle EAD = \angle AED$,

$\therefore \angle B = \angle EAD$,

$\because AB = AE$,

$\therefore \angle AEB = \angle B$,

$\therefore \angle EAD = \angle AEB$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

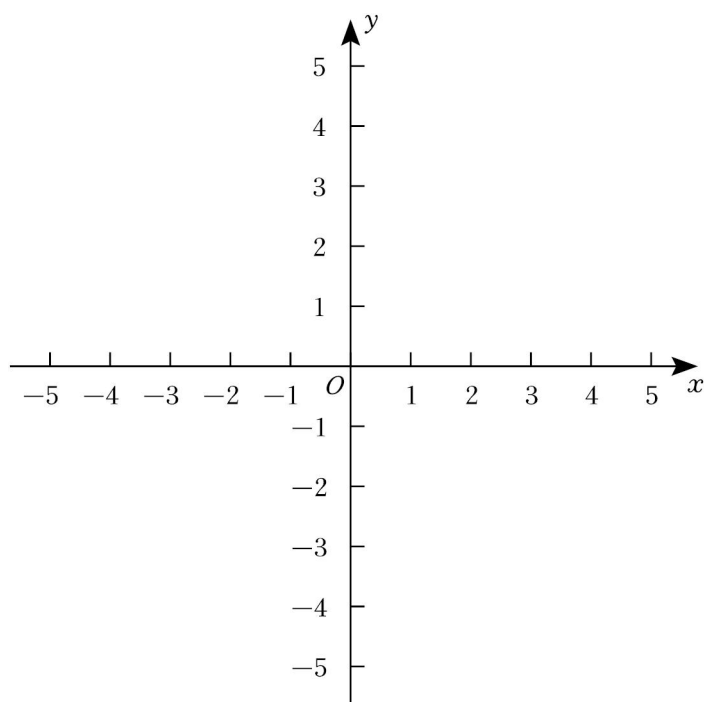
【点评】 本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、平行线的判定等知识, 熟练掌握平行四边形的判定, 证明三角形全等是解题关键.

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy (如图) 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(4, 1)$ 两点, 与 y 轴的交点为 C 点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 求四边形 $OABC$ 的面积;

(3) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴是直线 l , 点 D 与点 B 关于直线 l 对称, 在线段 BC 上是否存在一点 E , 使四边形 $ADCE$ 是菱形, 如果存在, 请求出点 E 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.



【分析】（1）把点 A 、 B 的坐标代入函数解析式，利用待定系数法求二次函数解析式解答；

（2）将四边形 $OABC$ 的面积分解为 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OAB$ 的面积和，即可求解；

（3）求出点 D 的坐标，可得 $AD = CD$ ，利用待定系数法求 AD 、 BC 、 CD 的解析式，可 $AD \parallel BC$ ，求出 AE 的解析式，再求 AE 、 BC 的交点坐标即可．

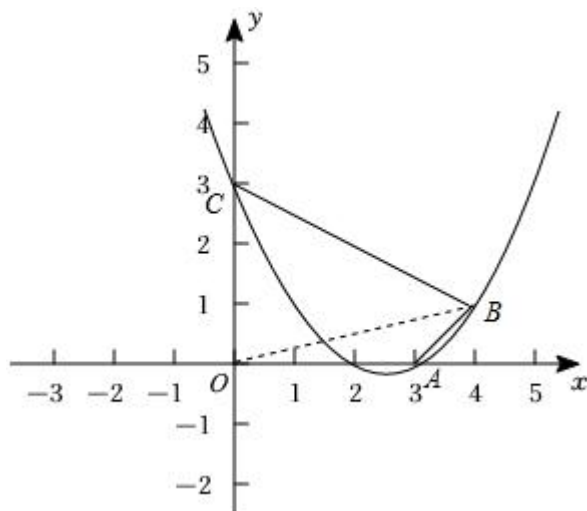
【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 经过 $A(3,0)$ ， $B(4,1)$ 两点，

$$\therefore \begin{cases} 9a + 3b + 3 = 0 \\ 16a + 4b + 3 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的关系式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3;$$

（2）如图，连接 OB ，



$\because y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$ 与 y 轴的交点为 C 点,

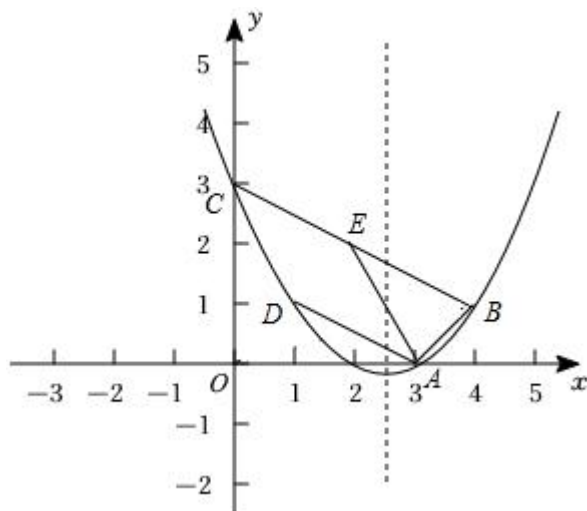
$\therefore C(0, 3)$,

$\because A(3, 0)$ 、 $B(4, 1)$,

$\therefore OC = 3$, $OA = 3$,

$\therefore S_{\text{四边形}OABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{15}{2}$;

(3) 如图,



$\because y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $l: x = -\frac{-\frac{5}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$,

∵点 D 与点 $B(4,1)$ 关于直线 l 对称,

$$\therefore D(1,1),$$

$$\therefore A(3,0), \quad C(0,3),$$

$$\therefore AD = \sqrt{(3-1)^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad CD = \sqrt{(3-1)^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore AD = CD,$$

设直线 AD 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} 3m + n = 0 \\ m + n = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{同理: 直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$\text{直线 } CD \text{ 的解析式为 } y = -2x + 3,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

当 $AE \parallel CD$ 时, 四边形 $ADCE$ 是菱形,

设直线 AE 的解析式为 $y = -2x + a$,

$$\therefore A(3,0),$$

$$\therefore -6 + a = 0, \text{ 解得 } a = 6,$$

$$\therefore \text{直线 } AE \text{ 的解析式为 } y = -2x + 6,$$

$$\text{联立直线 } BC: y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 得,}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (2,2).$$

$$\therefore \text{存在一点 } E, \text{ 使四边形 } ADCE \text{ 是菱形, 点 } E \text{ 的坐标为 } (2,2).$$

【点评】 本题是二次函数综合题型, 主要考查了待定系数法求二次函数解析式, 待定系数法求一次函数解析式, 面积的计算, 菱形的判定与性质, 两直线相交或平行问题, 综合性较强, 难度较大, 熟练掌握各性质是解题的关键.

25. (14 分) 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $DC \parallel AB$, $\angle DAB = 90^\circ$, $DC = 3$, $DA = 6$, $AB = 9$,

点 E 在射线 AB 上, 过点 E 作 $EF \parallel AD$, 交射线 DC 于点 F , 设 $AE = x$.

(1) 当 $x = 1$ 时, 直线 EF 与 AC 交于点 G , 如图 1, 求 GE 的长;

(2) 当 $x > 3$ 时, 直线 EF 与射线 CB 交于点 H .

①当 $3 < x < 9$ 时, 动点 M (与点 A 、 D 不重合) 在边 AD 上运动, 且 $AM = BE$, 联结 MH 交 AC 于点 N 如图 2, 随着动点 M 的运动, 试问 $CH:HN$ 的值有没有变化, 如果有变化, 请说明你的理由; 如果没有变化, 请你求出 $CH:HN$ 的值;

②联结 AH , 如果 $\angle HAE = \angle CAD$, 求 x 的值.

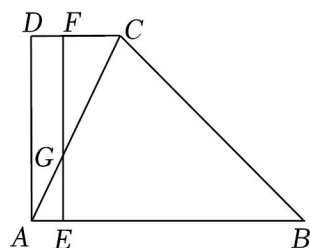


图1

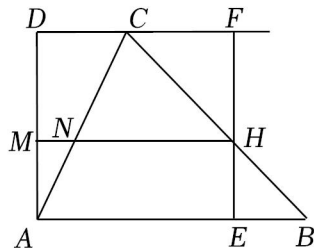
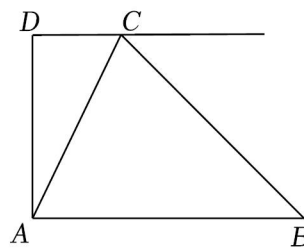


图2



备用图

【分析】 (1) 证明四边形 $AEFD$ 是平行四边形, 由平行四边形的性质得出 $DF = AE$,

$AD = EF$, 由比例线段 $\frac{FC}{AE} = \frac{FG}{EG}$ 可得出答案;

(2) ①过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G , 证明 $\triangle CNH \sim \triangle CAB$, 由相似三角形的性质得出

$\frac{CH}{HN} = \frac{CB}{AB}$, 则可得出答案;

②当 $3 < x < 9$ 时, 由①得 $HE = BE$, 由锐角三角函数的定义得出 $\frac{1}{2} = \frac{9-x}{x}$, 则可得出答案;

当 $x > 9$ 时, 同理可得 $BE = EH$, $EH = x - 9 = BE$, 列出方程求出答案即可.

【解答】 解: (1) $\because DC \parallel AB$,

$$\therefore \frac{FC}{AE} = \frac{FG}{EG},$$

$\because EF \parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

$$\therefore DF = AE, \quad AD = EF,$$

$$\because AE = x = 1,$$

$$\therefore DF = 1,$$

$$\because CD = 3,$$

$$\therefore CF = 2,$$

$$\text{又} \because AD = 6,$$

$$\therefore EF = 6,$$

$$\therefore FG = 6 - EG ,$$

$$\therefore \frac{2}{1} = \frac{6 - EG}{EG} ,$$

$$\therefore EG = 2 ;$$

(2) ① $CH : HN$ 的值没有变化.

过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G ,

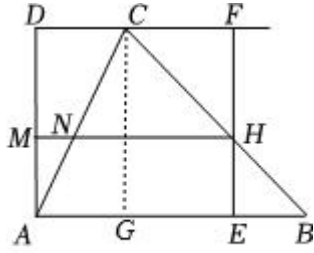


图2

$$\therefore CG = AD = 6 , \quad DC = AG = 3 ,$$

$$\because AB = 9 ,$$

$$\therefore GB = 6 ,$$

$\therefore \triangle CGB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CB^2 = CG^2 + GB^2 ,$$

$$\therefore CB = 6\sqrt{2} ,$$

$$\because \angle B = 45^\circ , \quad \angle HEB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EHB = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = \angle EHB ,$$

$$\therefore HE = BE ,$$

$$\because AM = BE ,$$

$$\therefore AM = HE ,$$

$$\because AM \parallel HE ,$$

$\therefore$ 四边形 $AMHE$ 是平行四边形,

$$\therefore MH \parallel AB ,$$

$$\therefore \triangle CNH \sim \triangle CAB ,$$

$$\therefore \frac{CH}{HN} = \frac{CB}{AB} ,$$

$$\because AB = 9 ,$$

$$\therefore \frac{CH}{HN} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

②当 $3 < x < 9$ 时, 由①得 $HE = BE$,

$$\therefore HE = 9 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDA \text{ 中, } \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEH \text{ 中, } \tan \angle HAE = \frac{HE}{AE} = \frac{9-x}{x},$$

$$\because \angle CAD = \angle HAE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{9-x}{x},$$

$$\therefore x = 6,$$

当 $x > 9$ 时, 同理可得 $BE = EH$,

$$\therefore EH = x - 9 = BE,$$

$$\text{同理 } \frac{EH}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{x-9}{x} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = 18,$$

综上所述, x 的值为 6 或 18.

【点评】 本题是四边形综合题, 考查了平行四边形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质, 勾股定理, 锐角三角函数的定义, 熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题的关键.