

实验中学 2024 学年七年级第二学期期中数学练习

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列长度的三根小木棒, 不能摆成三角形的是 ()

A. 6cm, 6cm, 13cm

B. 5cm, 7cm, 11cm

C. 9cm, 6cm, 8cm

D. 3cm, 4cm, 5cm

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了三角形三边的关系, 熟练掌握和运用三角形三边的关系是解决本题的关键. 三角形的三边关系: 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 据此逐一分析各项即可.

【详解】A. $\because 6+6=12<13$, $\therefore$ 不能构成三角形, 故选项符合题意;

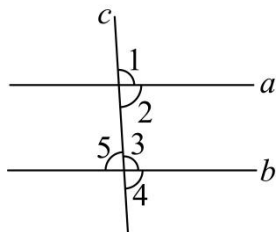
B. $\because 5+7=12>11$, $\therefore$ 能构成三角形, 故选项不符合题意;

C. $\because 6+8=14>9$, $\therefore$ 能构成三角形, 故选项不符合题意;

D. $\because 3+4=7>5$, $\therefore$ 能构成三角形, 故选项不符合题意;

故选: A.

2. 如图, 直线 a 、 b 被直线 c 所截, 下列选项中不一定能判定 $a \parallel b$ 的是 ()



A. $\angle 1 = \angle 3$

B. $\angle 2 = \angle 3$

C. $\angle 2 = \angle 4$

D. $\angle 2 = \angle 5$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查平行线的判定, 熟练掌握判定定理是解题的关键. 根据平行的判定进行判定即可.

【详解】解: $\angle 1 = \angle 3$, 根据同位角相等, 两直线平行, 可得 $a \parallel b$, 故选项 A 不符合题意;

$\angle 2 = \angle 3$ 不一定能判定 $a \parallel b$, 故选项 B 符合题意;

$\angle 2 = \angle 4$, 根据同位角相等, 两直线平行, 可得 $a \parallel b$, 故选项 C 不符合题意;

$\angle 2 = \angle 5$, 根据内错角相等, 两直线平行, 可得 $a \parallel b$, 故选项 D 不符合题意;

故选 B.

3. 对于命题“如果 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，那么 $\angle 1 = \angle 2$ ”，能说明它是假命题的反例是（ ）

A. $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$

B. $\angle 1 = 60^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$

C. $\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$

D. $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了假命题，熟练掌握假命题是解题的关键. 要说明命题“如果 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，那么 $\angle 1 = \angle 2$ ”是假命题，需找到满足条件但结论不成立的例子.

【详解】解： $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ，和为 180° 且两角相等，满足命题结论，不能作为反例，故选项 A 不符合题意；

$\angle 1 = 60^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，和为 180° ，但两角不相等，满足条件且结论不成立，故选项 B 符合题意；

$\angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$ ，和为 100° ，不满足条件，无法作为反例，故选项 C 不符合题意；

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，不满足条件，无法作为反例，故选项 D 不符合题意；

故选 B.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A - \angle B = 90^\circ$ ，那么 $\triangle ABC$ 是（ ）

A. 直角三角形

B. 钝角三角形

C. 锐角三角形

D. 锐角三角形或钝角三角形

【答案】B

【解析】

【分析】因为 $\angle A - \angle B = 90^\circ$ ，即 $\angle A = 90^\circ + \angle B$ ，那么 $\angle A$ 一定大于 90° ，即为钝角三角形.

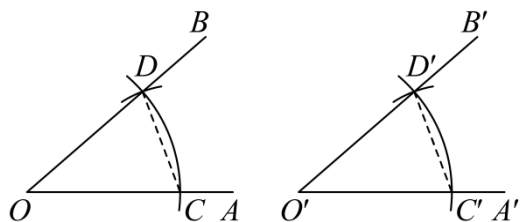
【详解】在 $\triangle ABC$ 中， $\because \angle A - \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 90^\circ + \angle B > 90^\circ$ ($\angle B$ 肯定大于 0)，那么 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.

故选 B.

【点睛】此题考查三角形内角和定理，解题关键在于得到 $\angle A$ 一定大于 90° .

5. 如图，用直尺和圆规作一个角 $\angle A'O'B'$ 等于已知角 $\angle AOB$ ，根据所学的三角形全等的有关知识，得出 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 的依据是（ ）



A. AAS

B. SAS

C. SSS

D. ASA

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查三角形全等的判定，熟练掌握三角形全等的判定定理是解题的关键。根据全等三角形的判定定理进行判断即可。

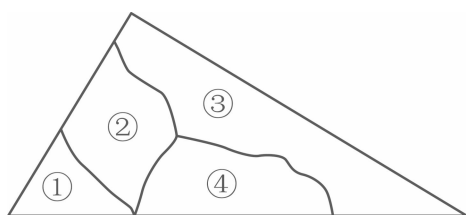
【详解】解：由题意可知， $DC = D'C'$ ， $OD = OD'$ ， $OC = OC'$ ，

故 $\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$ (SSS)，

故选 C。

6. 如图，小明不慎把三角形玻璃打碎成四块，他只要带哪一块去即可定制出和原来一样的三角形玻璃？

()



A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定定理，熟练掌握全等三角形的判定定理是解题的关键。根据全等三角形的判定定理进行判定即可。

【详解】解：①只能确定一个角，不能确定全等三角形；

②边和角都不能确定，故不能确定全等三角形；

③能确定两个角及其夹边，能确定全等三角形；

④边和角都不能确定，故不能确定全等三角形；

根据全等三角形的判定定理，ASA 进行判定即可定制出和原来一样的三角形玻璃。

故选 C。

二、填空题 (每题 3 分，共 36 分)

7. 已知直线 a 、 b 、 c 在同一平面内，如果 $a \parallel c$ ， $b \perp c$ ，那么直线 a 、 b 的位置关系是_____。

【答案】 $a \perp b$ (或垂直)。

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质以及垂线的性质，解题的关键是根据平行和垂直的传递性判断直线 a 、 b

的位置关系.

利用平行线的性质和垂线的定义, 通过分析直线 a 、 b 与直线 c 的关系, 得出直线 a 、 b 的位置关系.

【详解】 $\because a \perp c, b \perp c,$

$\therefore b \perp a$, 即直线 a 、 b 的位置关系是垂直.

故答案为: $a \perp b$ (或垂直).

8. 一个三角形的两个内角分别为 23° 和 67° , 那么这个三角形的第三个内角度数为_____.

【答案】 90°

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和定理, 解题的关键是掌握三角形内角和为 180° .

利用三角形内角和定理, 用 180° 减去已知的两个内角的度数, 即可求出第三个内角的度数.

【详解】 第三个内角 $= 180^\circ - 23^\circ - 67^\circ = 90^\circ$,

故答案为: 90° .

9. 已知等腰三角形周长等于 19, 其中一边长 7, 那么该等腰三角形的底边等于_____.

【答案】 5 或 7

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系; 由于长为 7 的边可能为腰, 也可能为底边, 故应分两种情况讨论求出底边长即可.

【详解】 解: 当腰为 7 时, 另一腰也为 7, 则底为 $19 - 7 - 7 = 5$,

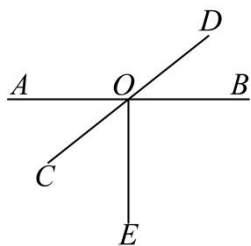
$\because 7 + 5 > 7$, 符合题意,

当底为 7 时, 腰为 $\frac{19-7}{2} = 6$, 符合题意,

$\therefore$ 该三角形的底边长为 5 或 7.

故答案为: 5 或 7.

10. 如图, 直线 AB 和 CD 相交于点 O , $\angle BOE = 90^\circ$, $\angle DOE = 120^\circ$, 那么直线 AB 和 CD 的夹角为_____.



【答案】 30°

【解析】

【分析】本题考查了角度的计算，解题的关键是利用已知角的度数，通过角的和差关系求出直线 AB 和 CD 的夹角.

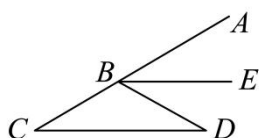
先根据 $\angle BOE$ 与 $\angle DOE$ 的度数求出 $\angle DOB$ 的度数， $\angle DOB$ 就是直线 AB 和 CD 的夹角.

【详解】解： $\angle DOB = \angle DOE - \angle BOE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$,

$\therefore$ 直线 AB 和 CD 的夹角为 30° .

故答案为： 30° .

11. 如图， BE 平分 $\angle ABD$ ，且 $BE \parallel CD$ ，如果 $\angle C = 30^\circ$ ，那么 $\angle D =$ _____.



【答案】 30°

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质，角平分线的定义，根据角平分线的定义和平行线的性质得到 $\angle D = \angle ABE = \angle DBE = \angle C$ ，即可解题.

【详解】解： $\because BE$ 平分 $\angle ABD$,

$\therefore \angle ABE = \angle DBE$,

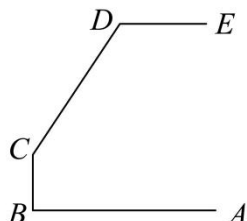
又 $\because BE \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle C$, $\angle EBD = \angle D$,

$\therefore \angle D = \angle C = 30^\circ$,

故答案为： 30° .

12. 近几年中学生近视的现象越来越严重，为保护视力，某公司推出了护眼灯，其侧面示意图（台灯底座高度忽略不计）如图所示，其中 $BC \perp AB$ ， $DE \parallel AB$ ，经使用发现，当 $\angle DCB = 144^\circ$ 时，台灯光线最佳，则此时 $\angle CDE$ 的度数为_____.



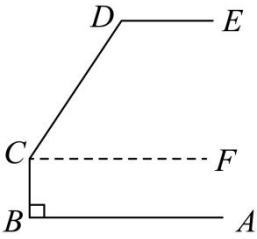
【答案】 126° ## 126度

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质与判定，垂线的定义，过点 C 作 $CE \parallel AB$ ，先由垂线的定义得到

$\angle ABC = 90^\circ$ ，再证明 $DE \parallel AB \parallel CF$ ，由平行线的性质求出 $\angle DCF$ ， $\angle BCF$ 的度数即可得到答案.

【详解】解：如图所示，过点 C 作 $CF \parallel AB$ ，



$\because BC \perp AB$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\because DE \parallel AB$,

$\therefore DE \parallel AB \parallel CF$,

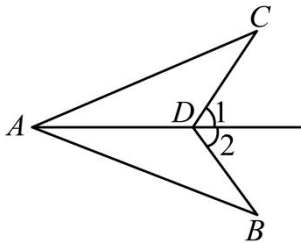
$\therefore \angle DCF = 180^\circ - \angle CDE$, $\angle BCF = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$,

$\because \angle BCD = \angle DCF + \angle BCF = 144^\circ$,

$\therefore \angle CDE = (180^\circ - \angle DCF) + 90^\circ = 270^\circ - 144^\circ = 126^\circ$

故答案为： 126° .

13. 如图， $\angle 1 = \angle 2$ ，请你添加一个适当的条件，使得 $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ ：_____ (只需填写一个).



【答案】 $DC = DB$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定，解题的关键是熟悉全等三角形的判定定理 (SSS、SAS、ASA、AAS、HL)，根据已有条件结合定理添加合适条件.

已知 $\angle 1 = \angle 2$ ，可得 $\angle ADC = \angle ADB$ ，且 AD 为公共边，根据全等三角形判定定理，添加一组对应边相等或一组对应角相等的条件即可.

【详解】 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，而 $\angle 1 + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle ADB = 180^\circ$,

$\therefore \angle ADC = \angle ADB$.

同时， AD 是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 的公共边，即 $AD = AD$,

①添加 $DC = DB$ (SAS 判定):

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle ADC = \angle ADB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$;

②添加 $\angle C = \angle B$ (AAS 判定):

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle ADB \\ \angle C = \angle B \\ AD = AD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$;

③添加 $\angle CAD = \angle BAD$ (ASA 判定):

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 中,

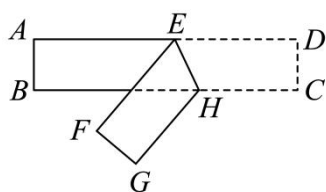
$$\begin{cases} \angle ADC = \angle ADB \\ AD = AD \\ \angle CAD = \angle BAD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$.

$\therefore$ 可添加的条件为 $DC = DB$ (或 $\angle C = \angle B$ 或 $\angle CAD = \angle BAD$ 等, 答案不唯一), 这里以 $DC = DB$ 为例.

故答案为: $DC = DB$ (答案不唯一).

14. 现有一张长方形纸片 $ABCD$, 将它按如图所示的方式进行折叠, 如果 $\angle BHG = 50^\circ$, 那么 $\angle BHE$ 的度数为_____.



【答案】 65°

【解析】

【分析】 根据四边形 $ABCD$ 是长方形, 可得 $AD \parallel BC$, 根据平行线的性质可得 $\angle DEH = \angle BHE$, $\angle DEH + \angle EHC = 180^\circ$, 再根据折叠可得, $\angle CHE = \angle EHG$, 等量代换后即可得结果.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DEH = \angle BHE$, $\angle DEH + \angle EHC = 180^\circ$,

根据折叠可知:

$$\angle CHE = \angle EHG,$$

$$\therefore \angle EHC = \angle BHE + \angle BHG,$$

$$\therefore \angle BHE + \angle BHE + \angle BHG = 180^\circ,$$

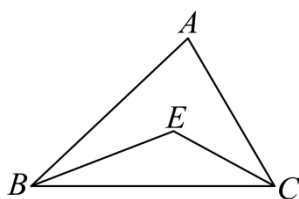
$$\therefore 2\angle BHE = 180^\circ - 130^\circ,$$

$$\therefore \angle BHE = 65^\circ.$$

故答案为: 65° .

【点睛】 本题考查了平行线的性质, 解决本题的关键是熟练掌握平行线的性质.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACB$, 如果 $\angle A = 82^\circ$, 那么 $\angle BEC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 131

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和定理, 角平分线的定义, 掌握三角形内角和定理是解题的关键.

利用三角形内角和定理求出 $\angle ABC + \angle ACB$, 再根据三等分线的定义求出 $\angle EBC + \angle ECB$, 即可求出 $\angle BEC$.

【详解】 $\because \angle A = 82^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 98^\circ,$$

$\because BE$ 平分 $\angle ABC, CE$ 平分 $\angle ACB$,

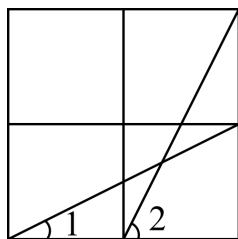
$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle ECB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle EBC + \angle ECB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} \times 98^\circ = 49^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - (\angle EBC + \angle ECB) = 131^\circ,$$

故答案为: 131.

16. 如图, 已知方格纸中是 4 个相同的小正方形, 则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为 _____.



【答案】 90°

【解析】

【分析】 首先证明三角形全等，根据全等三角形的性质可得对应角相等，再由余角的定义和等量代换可得 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的和为 90° .

【详解】 解：如图，根据方格纸的性质，
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 中

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle B = \angle B, \\ BD = BE \end{cases}$$

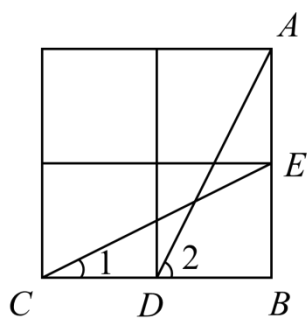
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBE$ (SAS),

$\therefore \angle 1 = \angle BAD$,

$\therefore \angle BAD + \angle 2 = 90^\circ$,

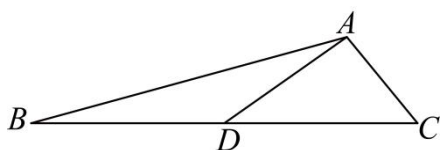
$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

故答案为： 90° .



【点睛】 此题主要考查了全等图形，关键是掌握全等三角形的判定和性质.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 1$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 设 AD 长为 x , 那么 x 的取值范围是_____.



【答案】 $2 < AD < 3$

【解析】

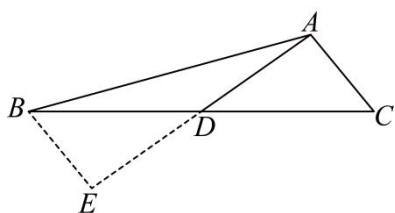
【分析】 本题考查了三角形三边关系和全等三角形的判定与性质，解题的关键是通过构造全等三角形，将已知边和所求线段转化到同一个三角形中.

延长 AD 到 E ，使 $DE = AD$ ，证明 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS)，得到 $AC = BE = 1$ ，再利用三角形三边关系确定 AD 的取值范围.

【详解】 解： 延长 AD 到 E ，使 $DE = AD$ ，

$\therefore AD$ 是 ABC 的中线

$\therefore DC = DB$



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中,

$$\begin{cases} AD = ED \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS)

$\therefore AC = BE = 1$,

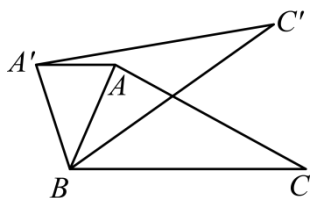
在 $\triangle ABE$ 中, $BE = 1$, $AB = 5$,

$\therefore 5 - 1 < AE < 5 + 1$, 即 $4 < 2AD < 6$,

则 $2 < AD < 3$.

故答案为: $2 < AD < 3$.

18. 如图, 已知 $\triangle ABC \cong \triangle A'BC'$, $AA' \parallel BC$, $\angle ABC = 65^\circ$, 那么 $\angle CBC' =$ _____.



【答案】 50° ## 50度

【解析】

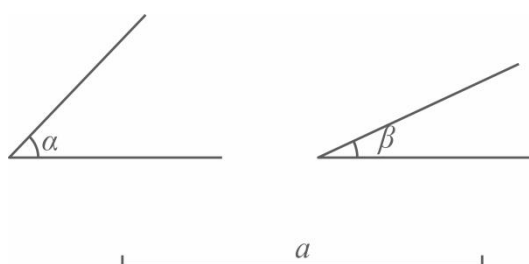
【分析】 本题考查的是全等三角形的性质，平行线的性质，等边对等角，掌握全等三角形的对应边相等、

对应角相等是解题的关键. 根据平行线的性质得到 $\angle A'AB = \angle ABC = 65^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $BA = BA'$, $\angle A'BC' = \angle ABC = 65^\circ$, 计算即可.

【详解】解: $\because AA' \parallel BC$,
 $\therefore \angle A'AB = \angle ABC = 65^\circ$,
 $\because \triangle ABC \cong \triangle A'BC'$,
 $\therefore BA = BA'$, $\angle A'BC' = \angle ABC = 65^\circ$,
 $\therefore \angle A'AB = \angle AA'B = 65^\circ$,
 $\therefore \angle A'BA = 180^\circ - \angle A'AB - \angle AA'B = 50^\circ$,
 $\therefore \angle CBC' = \angle A'BC - \angle A'BC' = 50^\circ + 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$,
 故答案为: 50° .

三、解答题 (第 19 题 6 分, 第 20, 21, 22 题每题 5 分, 第 23 题 6 分, 第 24 题 9 分, 第 25 题 10 分)

19 如图, 已知 $\angle\alpha$ 、 $\angle\beta$ 和线段 a .



- (1) 求作 $\triangle ABC$, 使 $\angle A = \angle\alpha$, $AB = a$, $\angle B = \angle\beta$ (不写作法, 保留作图痕迹);
- (2) 在第 (1) 题所作的 $\triangle ABC$ 中, 画出 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高 AD .

【答案】(1) 作图见解析 (2) 作图见解析

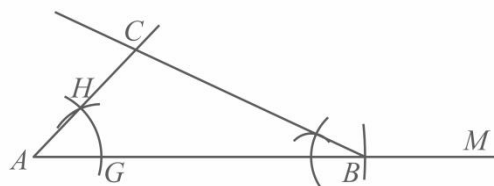
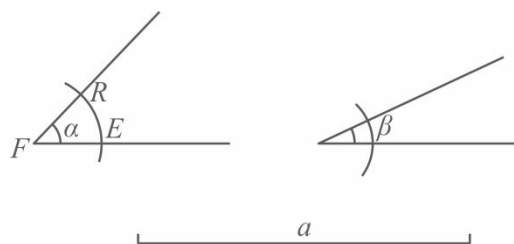
【解析】

【分析】本题主要考查了尺规作一个角等于已知角, 尺规作线段等于已知线段, 尺规作线段的垂直平分线, 对于 (1), 作射线 AM , 以点 F 为圆心, EF 为半径画弧, 再以点 A 为圆心, EF 为半径画弧, 再以点 G 为圆心, ER 为半径画弧, 两弧交于点 H , 作射线 AH , 然后在射线 AM 上截取 $AB = a$, 同理作 $\angle ABC = \angle\beta$, 交 AH 于点 C , 可知 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形;

对于 (2), 以点 A 为圆心, 以 AI 为半径画弧, 交 BC 的延长线于点 I, J , 再以点 I, J 为圆心, 以 IJ 为半径画弧, 两弧交于点 L , 作射线 AL , 交 BC 的延长线于点 D , 则 AD 即为所求作.

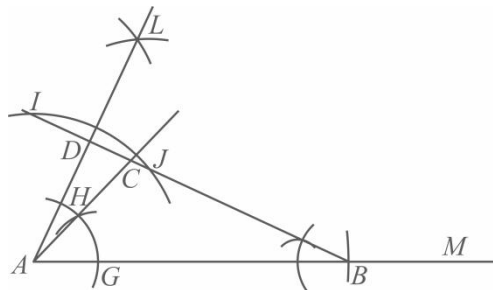
【小问 1 详解】

解：如图所示， ABC 即为所求作的三角形；



【小问 2 详解】

解：如图所示， AD 即为所求作。



20. 如图已知： $EF \parallel AD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle BAC = 72^\circ$ ，求 $\angle AGD$ 的度数。

解： $\because EF \parallel AD$ ，

$\therefore \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ()

又 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，

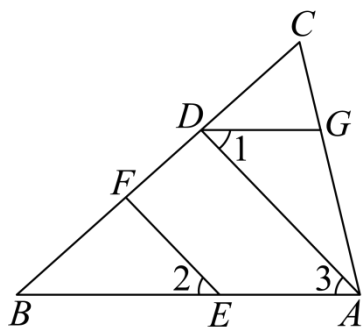
$\therefore \angle 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore AB \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ ()

$\therefore \angle BAC + \underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ$ ，()

$\because \angle BAC = 72^\circ$ ，

$\therefore \angle AGD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\angle 3$ ，两直线平行，同位角相等； $\angle 3$ ； DG ，内错角相等，两直线平行； $\angle DGA$ ，两直线平行，同旁内角互补； 108°

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质和判定，熟练掌握平行线的性质和判定是解题的关键；

根据平行线性质推出 $\angle 2 = \angle 3$ ，根据平行线判定推出 $AB \parallel DA$ ，根据平行线判定推出 $\angle BAC + \angle DGA = 180^\circ$ ，求出即可。

【详解】解： $\because EF \parallel AD$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ （两直线平行，同位角相等）

又 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

$\therefore AB \parallel DG$ （内错角相等，两直线平行）

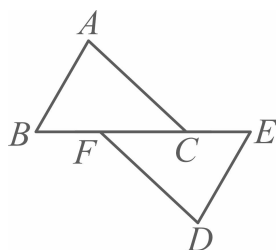
$\therefore \angle BAC + \angle DGA = 180^\circ$ ，（两直线平行，同旁内角互补）

$\because \angle BAC = 72^\circ$ ，

$\therefore \angle AGD = 108^\circ$ ；

故答案为： $\angle 3$ ，两直线平行，同位角相等； $\angle 3$ ； DA ，内错角相等，两直线平行； $\angle DGA$ ，两直线平行，同旁内角互补； 108°

21. 已知：如图，已知点 B 、 F 、 C 、 E 在同一直线上， $AB \parallel DE$ ， $\angle ACE = \angle DFB$ ， $BF = EC$ 。求证： $AB = DE$ 。



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的性质和判定，解题的关键是熟练掌握全等三角形的性质和判定定理。根据平行得到 $\angle B = \angle E$ ，再通过 $BF = EC$ 得到 $BC = EF$ ，就可以证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ （ASA），由全等三角形的性质得证 $AB = DE$ 。

【详解】证明： $\because AB \parallel DE$ ，

$\therefore \angle B = \angle E$ ，

$\because BF = EC$ ，

$\therefore BF + CF = EC + CF$ ，即 $BC = EF$ ，

$\because \angle ACE = \angle DFB$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle DFE$ ，

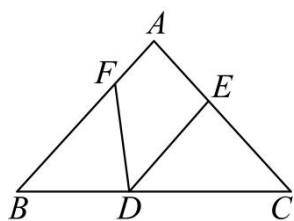
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ BC = EF \\ \angle ACB = \angle DFE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA),

$\therefore AB = DE$.

22. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AC 、 AB 上, 且 $DF = ED$, $\angle FDE = \angle B$. 求证: $BD = CE$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查等边对等角, 三角形的外角的性质, 全等三角形的判定和性质, 熟练掌握相关知识点, 是解题的关键. 等边对等角, 得到 $\angle B = \angle C$, 三角形的外角, 推出 $\angle BFD = \angle EDC$, 进而证明 $\triangle BFD \cong \triangle CDE$, 即可得证.

【详解】证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

$\because \angle FDC = \angle FDE + \angle EDC = \angle B + \angle BFD$, $\angle FDE = \angle B$,

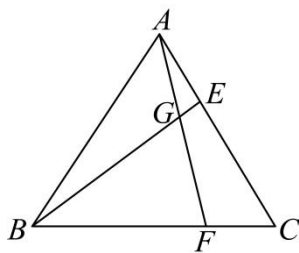
$\therefore \angle BFD = \angle EDC$,

又 $\because DF = ED$,

$\therefore \triangle BFD \cong \triangle CDE$,

$\therefore BD = CE$.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle C = 60^\circ$, 点 E 、 F 分别在边 AC 、 BC 上, 且 $AE = CF$, 连接 AF 和 BE 相交于点 G .



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CAF$;

(2) 求 $\angle BGF$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) $\angle BGF = 60^\circ$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定、全等三角形的判定和性质、三角形的外角性质等知识, 熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题的关键;

(1) 根据 $\angle ABC = \angle C = 60^\circ$ 可得 $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$, 然后即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle CAF$ (SAS);

(2) 根据全等三角形的性质可得 $\angle ABE = \angle CAF$, 再利用三角形的外角性质结合 $\angle BAC = 60^\circ$ 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ABC = \angle C = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$,

则在 $\triangle ABE, \triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAC = \angle C = 60^\circ, \\ AE = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (SAS);

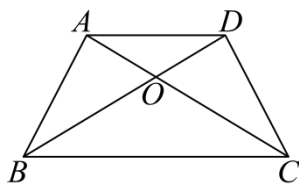
【小问 2 详解】

解: $\because \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (SAS),

$\therefore \angle ABE = \angle CAF$,

$\therefore \angle BGF = \angle ABE + \angle BAF = \angle BAF + \angle CAF = \angle BAC = 60^\circ$.

24. 已知: 如图 $\angle ABC = \angle DCB$, BD 、 AC 分别平分 $\angle ABC$, $\angle DCB$.



(1) 求证: $\triangle ABO \cong \triangle DCO$;

(2) 求证: $AD \parallel BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质、三角形的内角和、平行线的判定等知识, 证明三角形全等是解题的关键;

(1) 根据角平分线的定义结合 $\angle ABC = \angle DCB$, 即可推出 $\angle ACB = \angle DBC = \angle ABD = \angle DCA$, 进而可得 $OB = OC$, 再根据角边角即可证得结论;

(2) 根据全等三角形的性质可得 $OA = OD$, 可得 $\angle OAD = \angle ODA$, 然后根据三角形的内角和定理结合对顶角相等可得 $\angle OAD = \angle OCB$, 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD$ 、 AC 分别平分 $\angle ABC$, $\angle DCB$,

$$\therefore \angle DBC = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle ACB = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DBC = \angle ABD = \angle DCA,$$

$$\therefore OB = OC,$$

在 $\triangle ABO$ 、 $\triangle DCO$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle DCO \\ OB = OC \\ \angle AOB = \angle DOC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle DCO (\text{ASA});$$

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle ABO \cong \triangle DCO$,

$$\therefore OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\therefore \angle OAD + \angle ODA + \angle AOD = 180^\circ = \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC, \text{ 且 } \angle AOD = \angle BOC,$$

$$\angle ACB = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OCB,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$

25. 【初步探索】

(1) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $EF = BE + FD$, 探究图中 $\angle BAE$, $\angle FAD$, $\angle EAF$ 之间的数量关系.

小明同学探究此问题的方法是: 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$. 连接 AG , 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论, 则他的结论应是_____.

【灵活运用】

(2) 如图 2, 若在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $EF = BE + FD$, 上述结论是否仍然成立, 并说明理由;

【拓展延伸】

(3) 如图 3, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $AB = AD$, 若点 E 在 CB 的延长线上, 点 F 在 CD 的延长线上, 且仍然满足 $EF = BE + FD$, 请直接写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系.

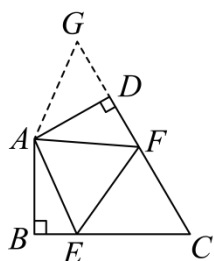


图1

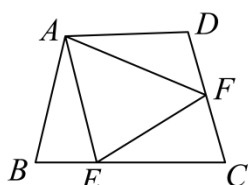


图2

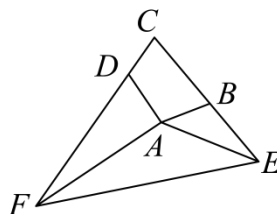


图3

【答案】 (1) $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$ (2) 仍成立, 理由见解析 (3) $\angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB$

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定以及性质的综合应用, 解决问题的关键是作辅助线构造全等三角形, 根据全等三角形的对应角相等进行推导变形. 解题时注意: 同角的补角相等.

(1) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 可判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$, 据此得出结论;

(2) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$;

(3) 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 得出 $\angle FAE = \angle FAG$, 最后根据 $\angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ$, 推导得到 $2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ$, 即可得出结论.

【详解】 解: (1) 结论: $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$.

理由：如图1，延长 FD 到点 G ，使 $DG = BE$ ，连接 AG ，

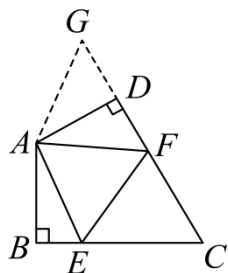


图1

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle ADG = 90^\circ, \\ BE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG, \quad AE = AG,$$

$$\therefore EF = BE + DF,$$

$$\therefore EF = DF + DG = FG,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中，

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF, \\ EF = GF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF.$$

故答案为： $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$ ；

(2) 仍成立，理由：

如图2，延长 FD 到点 G ，使 $DG = BE$ ，连接 AG ，

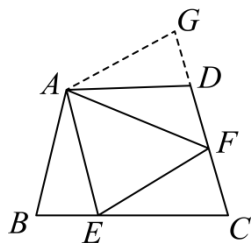


图2

$$\therefore \angle B + \angle ADF = 180^\circ, \quad \angle ADG + \angle ADF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADG,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle B = \angle AG, \\ BE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG, \quad AE = AG,$$

$$\because EF = BE + DF,$$

$$\therefore EF = DG + DF = GF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF, \\ EF = GF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF;$$

$$(3) \text{ 结论: } \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB.$$

理由: 如图3, 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG = BE$, 连接 AG ,

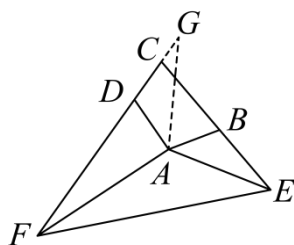


图3

$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABE,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADG, \\ BE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = AE, \quad \angle DAG = \angle BAE,$$

$$\because EF = BE + DF ,$$

$$\therefore EF = DG + DF = FG ,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF , \\ EF = GF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF (SSS) ,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FAG ,$$

$$\because \angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ ,$$

$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle BAE) = 360^\circ ,$$

$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle DAG) = 360^\circ ,$$

$$\text{即 } 2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ ,$$

$$\therefore \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB .$$