

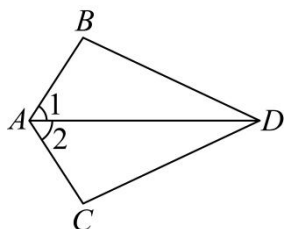
2024-2025 学年度第二学期期末考试七年级数学学科试卷

(考试时间: 90 分钟)

2025 年 6 月

一、单选题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, 要得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 还需从下列条件中补选一个, 则错误的选法是 ()



- A. $AB = AC$ B. $DB = DC$ C. $\angle ADB = \angle ADC$ D. $\angle B = \angle C$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定定理, 两个三角形全等共有五个定理, 即 AAS 、 ASA 、 SAS 、 SSS 及 HL , 注意: SSA 无法证明三角形全等. 先要确定现有已知在图形上的位置, 结合全等三角形的判定方法对选项逐一验证, 找出错误的选项即可得答案.

【详解】解: $\because \angle 1 = \angle 2$, $AD = AD$,

$\therefore$ 当 $AB = AC$ 时, 可利用 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 故 A 选项不符合题意,

当 $DB = DC$ 时, SSA 无法证明三角形全等, 故 B 选项符合题意,

当 $\angle ADB = \angle ADC$ 时, 可利用 ASA 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 故 C 选项不符合题意,

当 $\angle B = \angle C$ 时, 可利用 AAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 故 D 选项不符合题意,

故选: B.

2. 若用反证法证明命题“在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle B > \angle C$, 则 $AC > AB$ ”, 则应假设 ()

- A. $AC \leq AB$ B. $AC > AB$ C. $\angle B \leq \angle C$ D. $\angle B > \angle C$

【答案】A

【解析】

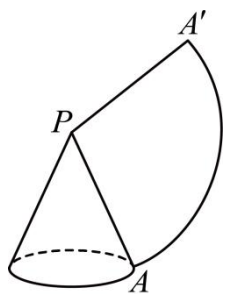
【分析】本题考查的是反证法, 反证法的一般步骤是: ①假设命题的结论不成立; ②从这个假设出发, 经过推理论证, 得出矛盾; ③由矛盾判定假设不正确, 从而肯定原命题的结论正确. 根据反证法的一般步骤解答即可.

【详解】解: 用反证法证明命题“在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle B > \angle C$, 则 $AC > AB$ ”,

第一步应是假设 $AC \leq AB$,

故选: A.

3. 如图, 圆锥底面圆的半径为 3, 则这个圆锥的侧面展开图中 $\widehat{A'A}$ 的长为 ()



- A. 4π B. 6π C. 8π D. 16π

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了圆锥的侧面展开图的弧长, 熟练掌握圆锥底面周长等于 $\widehat{A'A}$ 的长是解题的关键.

根据底面周长等于 $\widehat{A'A}$ 的长, 即可求解.

【详解】 解: 根据题意, $\widehat{A'A}$ 的长 $2\pi \times 3 = 6\pi$.

故选: B.

4. 一个三角形的两边长分别为 2 和 5, 第三边长为奇数, 则该三角形的周长为 ()

- A. 13 B. 12 C. 11 D. 10

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了三角形三边关系的应用;

根据三角形的三边关系求出第三边, 然后计算即可.

【详解】 解: $\because$ 一个三角形的两边长分别为 2 和 5,

$\therefore 5 - 2 < \text{第三边} < 2 + 5$, 即 $3 < \text{第三边} < 7$,

$\therefore$ 第三边长为奇数,

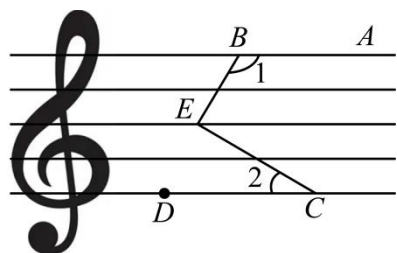
$\therefore$ 第三边长为 5,

$\therefore$ 该三角形的周长为 $2 + 5 + 5 = 12$,

故选: B.

5. 五线谱是一种记谱法, 通过在五根等距离的平行线上标以不同的音符构成旋律. 如图, AB 和 CD 是五

线谱上的两条线，点 E 在 AB ， CD 之间的一条平行线上，若 $\angle 1 = 120^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle BEC$ 的度数是 ()



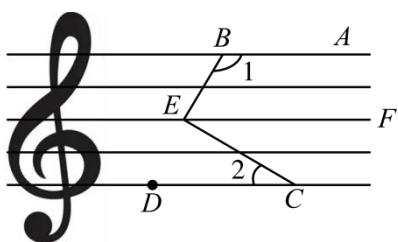
- A. 90° B. 100° C. 110° D. 120°

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了平行线的性质，解题的关键是熟练掌握平行线的性质．根据平行线的性质得到 $\angle BEF = 180^\circ - \angle 1 = 60^\circ$ ， $\angle FEC = \angle 2 = 30^\circ$ ，进而求解即可．

【详解】解：如图所示，



$$\begin{aligned} \because AB \parallel EF, \quad \angle 1 &= 120^\circ, \\ \therefore \angle BEF &= 180^\circ - \angle 1 = 60^\circ, \\ \because EF \parallel CD, \quad \angle 2 &= 30^\circ, \\ \therefore \angle FEC &= \angle 2 = 30^\circ, \\ \therefore \angle BEC &= \angle BEF + \angle FEC = 90^\circ. \end{aligned}$$

故选：A.

二、填空题 (每题 3 分，共 36 分)

6. 不等式的 $3x - 4 \leq 2 + x$ 非负整数解为_____.

【答案】0 或 1 或 2 或 3

【解析】

【分析】本题考查了求一元一次不等式的整数解．移项合并，最后系数化为 1，可求不等式的解集，进而可得非负整数解的个数．

【详解】解： $3x - 4 \leq 2 + x$ ，

$$2x \leq 6,$$

解得, $x \leq 3$,

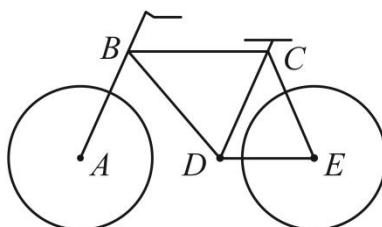
$\therefore$ 非负整数解为 0 或 1 或 2 或 3,

故答案为: 0 或 1 或 2 或 3.

7. 如图①, “二八大杠”传统老式自行车承载了一代人的回忆, 图②是它的几何示意图. 已知 $BC \parallel DE$, $AB \parallel CD$, 当 $\angle ABD = 70^\circ$, $\angle CBD = 44^\circ$ 时, $\angle CDE$ 的度数为_____.



图①



图②

【答案】 66° ##66 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质. 根据 $AB \parallel CD$, 可得 $\angle BDC = \angle ABD = 70^\circ$, 根据 $BC \parallel DE$, 可得 $\angle DBC + \angle BDE = 180^\circ$, 由此可得 $\angle BDE = 180^\circ - \angle DBC$, $\angle CDE = \angle BDE - \angle BDC$ 即可得解.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BDC = \angle ABD = 70^\circ,$$

$$\because BC \parallel DE,$$

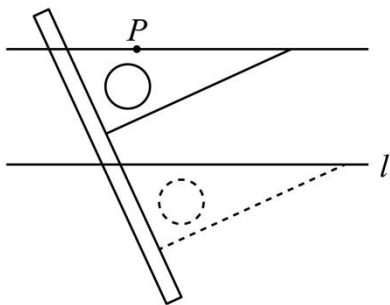
$$\therefore \angle DBC + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE - \angle BDC = 136^\circ - 70^\circ = 66^\circ,$$

故答案为: 66° .

8. 如图是利用直尺移动三角板过直线 l 外一点 P 作直线 l 的平行线的方法, 小明经过多次实践后发现只能作一条平行线, 这反映了_____.



【答案】过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行

【解析】

【分析】根据平行公理可得答案.

【详解】解：由图可得，过直线 l 外一点，能且只能画出一条平行线，

这反映了：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.

故答案为：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.

【点睛】本题考查平行公理，熟练掌握平行线的判定与性质是解答本题的关键.

9. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角的比为 $2:5:3$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是_____三角形. (填锐角、直角、钝角中的一个)

【答案】直角

【解析】

【分析】本题考查了三角形的内角和定理以及三角形的分类，先根据三角形的内角和定理求出 $\triangle ABC$ 中最大角的度数，然后根据三角形的分类求解即可.

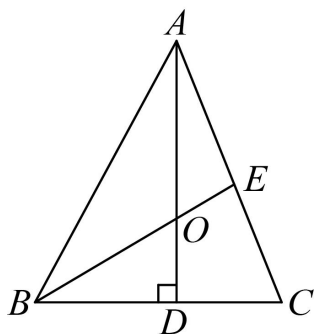
【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的三个内角的比为 $2:5:3$ ，

$$\therefore \triangle ABC \text{ 中最大角为 } \frac{5}{2+3+5} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的形状是直角三角形，

故答案为：直角.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， BE 是角平分线， AD ， BE 相交于点 O ， $\angle ABC = 50^\circ$ ，则 $\angle AOB =$ _____°.



【答案】115

【解析】

【分析】本题考查了角平分线，三角形的外角，三角形的高，解题的关键是熟练掌握以上知识点；根据角平分线的定义可得 $\angle CBE = 25^\circ$ ，再根据三角形的外角即可得解.

【详解】解：∵ BE 是角平分线， $\angle ABC = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ,$$

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle BDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BDO + \angle CBE = 90^\circ + 25^\circ = 115^\circ,$$

故答案为：115.

11. 若等腰三角形的一个外角为 80° ，则它的底角为_____°.

【答案】40

【解析】

【分析】利用等腰三角形的性质，得到两底角相等，结合三角形内角与外角的关系：三角形的任一外角等于和它不相邻的两个内角之和，可直接得到结果.

本题主要考查了等腰三角形的性质与三角形内角与外角的关系，熟练掌握等腰三角形的性质与三角形内角与外角的关系是解决问题的关键.

【详解】解：等腰三角形的一个外角为 80° ，

$$\text{故其相邻的内角为 } 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,$$

故其只能做顶角，

$$\text{故等腰三角形的底角为 } \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ,$$

故答案为：40.

12. 请写出定理“等边对等角”的逆定理：_____.

【答案】等角对等边

【解析】

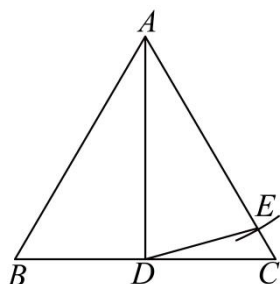
【分析】本题考查了定理和逆定理. 定理是经过推理证明得到的真命题，可以作为推理论证的依据，它的逆命题如果也是真命题，那么它的逆命题也是定理，即一个定理和它的逆定理的题设和结论正好相反.

等边对等角的题设是等边，结论是等角，故它的逆定理的题设是等角，结论是等边，由此即可得解.

【详解】解：定理“等边对等角”的逆定理是“等角对等边”.

故答案为：等角对等边.

13. 如图，在等边三角形 ABC 中， D 为边 BC 的中点，以点 A 为圆心， AD 为半径画弧，与 AC 边的交点为 E ，则 $\angle CDE$ 的度数为_____.



【答案】 15°

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的性质，等腰三角形的性质，熟练掌握等腰三角形的性质是解题的关键.

先根据等边三角形的性质得 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，再根据 $AD = AE$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 三角形 ABC 为等边三角形， D 为边 BC 的中点，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ, \quad AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$\because$ 以点 A 为圆心， AD 为半径画弧，与 AC 边的交点为 E ，

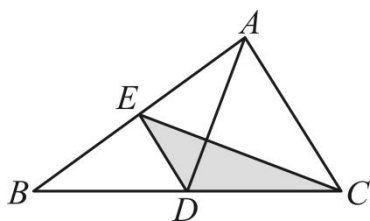
$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAC) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 15^\circ,$$

故答案为： 15° .

14. 如图， AD 、 CE 是 ABC 的中线，连接 ED ， ABC 的面积是 10，则 $\triangle EDC$ 的面积是_____.



【答案】 2.5

【解析】

【分析】 本题考查了三角形中位线定理，三角形的面积，熟练掌握三角形中线的性质是解题的关键. 根据 CE 是 AB 边上的中线，得到 $S_{AEC} = S_{BEC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 5$ ，根据 AD 是 BC 边上的中线，

$$S_{BDE} = S_{CDE} = \frac{1}{2}S_{EBC} = 2.5 \text{ 解答即可.}$$

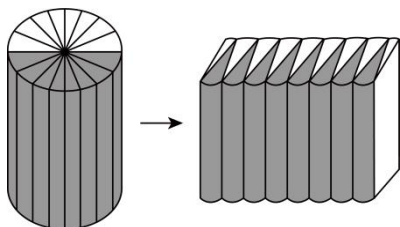
【详解】 解： $\because AD$ 、 CE 是 ABC 的中线，连接 ED ， ABC 的面积是 10，

$$\therefore S_{AEC} = S_{BEC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 5,$$

$$\therefore S_{BDE} = S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{EBC} = 2.5,$$

故答案为：2.5.

15. 如图，将一个半径为 3 分米，高为 8 分米的圆柱等分成若干份拼成一个近似的长方体，长方体表面积比圆柱体表面积增加_____平方分米.



【答案】48

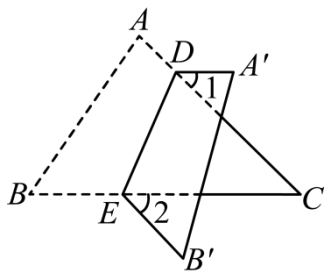
【解析】

【分析】本题主要考查了圆柱和长方体的关系，根据几何体的变化情况求出长方体表面积比圆柱体表面积增加量即可.

【详解】解：由题意可得，长方体表面积比圆柱体表面积增加 $= 3 \times 8 \times 2 = 48$ (平方分米).

故答案为：48.

16. 将 ABC 按如图所示的方式折叠，点 A 的对应点是点 A' ，点 B 的对应点是点 B' ， DE 为折痕. 若 $\angle A + \angle B = 135^\circ$ ，则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为_____.

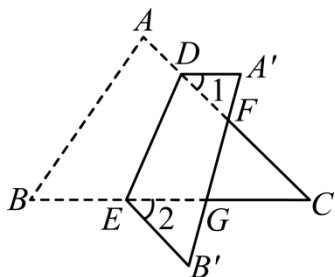


【答案】 90° ## 90 度

【解析】

【分析】本题考查图形的折叠和三角形的内角和定理的应用，根据折叠的性质得出 $\angle B = \angle B'$ ， $\angle A = \angle A'$ ，然后根据三角形的内角和定理和对顶角相等即可得出结论. 解题的关键是明确题意，列出相等关系的式子.

【详解】解：设 $A'B'$ 交 CD 于点 F ，交 CE 于点 G ，



由折叠得: $\angle B = \angle B'$, $\angle A = \angle A'$,

$\therefore \angle C + \angle CFG + \angle CGF = 180^\circ$, 且 $\angle CFG = \angle A'FD$, $\angle CGF = \angle EGB'$,

$\therefore \angle C + \angle A'FD + \angle EGB' = 180^\circ$,

$\therefore \angle A'FD = 180^\circ - \angle 1 - \angle A'$, $\angle EGB' = 180^\circ - \angle 2 - \angle B'$,

$\therefore \angle C + (180^\circ - \angle 1 - \angle A) + (180^\circ - \angle 2 - \angle B) = 180^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle A + \angle B = 135^\circ$,

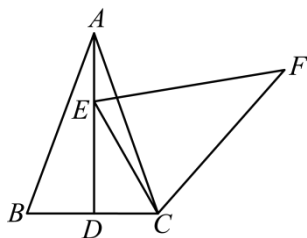
$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 45^\circ$,

$\therefore \angle C + \angle C - \angle 1 + 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ$,

$\therefore 2\angle C = \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

故答案为: 90° .

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$, 垂足为 D , 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转, 得到 $\triangle FEC$, 点 B 的对应点 E 落在 AD 上, 若 $\angle ACE = 10^\circ$, 则 $\angle AEF$ 的度数为 $\underline{\quad\quad}$ $^\circ$.

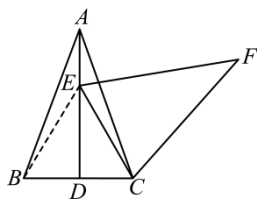


【答案】 80°

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质, 等边三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 等腰三角形的性质. 先证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形, 再求得 $\angle FEC = \angle ACB = 70^\circ$, 据此求解即可.

【详解】解: 连接 EB ,



$\therefore AB = AC$, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$, AD 是线段 BC 的垂直平分线,

$\therefore EB = EC$,

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转, 得到 $\triangle FEC$,

$\therefore BC = EC$, $\angle ABC = \angle FEC = \angle ACB$,

$\therefore BC = EC = EB$,

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle EBC = \angle ECB = 60^\circ$, $\angle DEC = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACE = 10^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 10^\circ + 60^\circ = 70^\circ$,

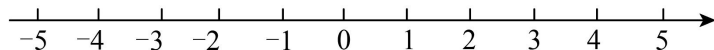
$\therefore \angle FEC = \angle ACB = 70^\circ$,

$\therefore \angle AEF = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$,

故答案为: 80° .

三、简答题 (第 19 题 6 分, 第 20 题 4 分, 共 10 分)

18. 解不等式组 $\begin{cases} 3(x+1) > 5x-1 \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{2x-1}{3} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-1 \leq x < 2$, 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组, 在数轴上表示不等式的解集; 分别求出两个不等式的解集, 即可求得两个解集的公共部分, 最后在数轴上表示出解集即可.

【详解】 解: $\begin{cases} 3(x+1) > 5x-1 \text{ ①} \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{2x-1}{3} \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式 ①, 得 $x < 2$,

解不等式 ②, 得 $x \geq -1$,

所以原不等式组的解集是 $-1 \leq x < 2$;

在数轴上表示为:



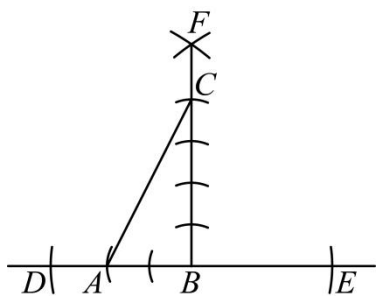
19. 用尺规作图作直角三角形 ABC 且 $\angle B = 90^\circ$ ， BA 边的长为 2 倍的单位长度， BC 边的长为 4 倍的单位长度.

【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了尺规作图的基本技能，特别是利用垂直平分线和圆弧截取特定长度的方法构造直角三角形. 解题的关键是通过作垂线确定直角，并利用圆规精确截取 2 单位和 4 单位长度，最终连接斜边完成三角形.

【详解】如图，任画一条直线，在线上取点 B ，以 B 为圆心画弧交直线于两点 D 、 E ；



分别以 D 、 E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的等长半径画弧，交于点 F ；

连接 BF ，得直角 $\angle FBE = 90^\circ$ （依据线段垂直平分线性质）.

在 BF 上，以 B 为圆心、固定长度 1 为半径，圆规依次截取 4 单位长度画弧交 BF 于 C ，则 BC 边的长为 4 倍的单位长度；

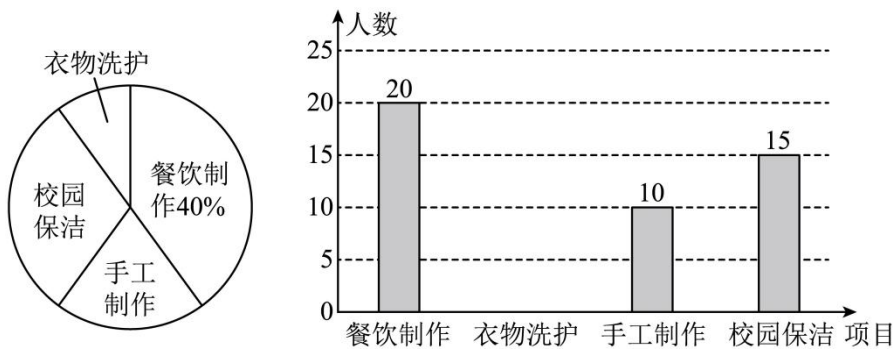
在直线 DE 上，以 B 为圆心、固定长度 1 为半径，圆规依次截取 2 单位长度画弧交 DE 于 A ，则 BA 边的长为 2 倍的单位长度；

最后用直尺连接 A 、 C 两点.

则直角三角形 ABC 就是所作的三角形.

四、解答题（第 21 题 6 分，第 22~24 题每题 8 分，第 25 题 6 分，共 36 分）

20. 习近平总书记在全面教育大会上提出教育要“五育并举”. 某学校开展了丰富多彩的“劳动教育”实践活动. 聪聪将他们的劳动实践的情况绘制了条形统计图，根据统计图回答.



- (1) 请计算出聪聪班共有多少名学生？
- (2) 通过计算，把条形统计图补充完整.
- (3) 校园保洁的人数比手工制作的人数多百分之几？

【答案】 (1) 聪聪班共有 50 名学生；

(2) 见解析 (3) 校园保洁的人数比手工制作的人数多百分之五十.

【解析】

【分析】 本题主要考查了条形统计图及扇形统计图，熟知条形统计图及扇形统计图的特征是解题的关键.

(1) 根据扇形统计图中“餐饮制作”学生人数所占比例及条形统计图中“餐饮制作”的学生人数即可解决问题.

(2) 根据聪聪班学生人数减去“餐饮制作”“手工制作”和“校园保洁”求得“衣物洗护”的人数，即可解决问题.

(3) 根据“校园保洁”和“手工制作”的学生人数即可解决问题.

【小问 1 详解】

解： $20 \div 40\% = 50$ (人)

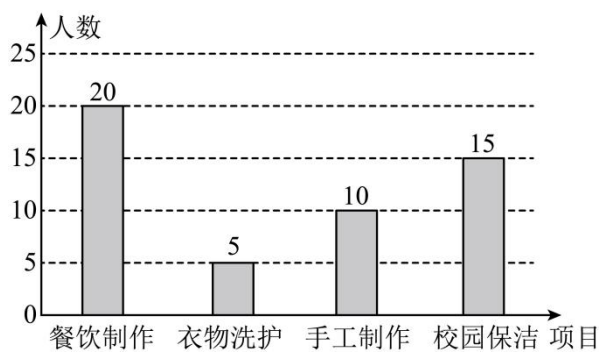
答：聪聪班共有 50 名学生；

【小问 2 详解】

解： $50 - (20 + 10 + 15) = 5$,

所以衣物洗护的学生人数为 5,

条形统计图如下,

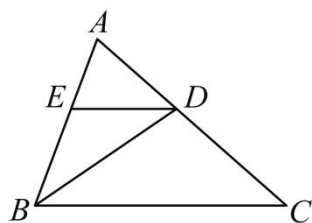


【小问 3 详解】

解: $(15-10) \div 10 \times 100\% = 50\%$,

答: 校园保洁的人数比手工制作的人数多百分之五十.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 且 $BE = ED$.



(1) 求证: $ED \parallel BC$;

(2) 当 $\angle A = 70^\circ$, $\angle ADE = 30^\circ$ 时, 求 $\angle EDB$ 的度数.

【答案】(1) 见详解 (2) 40°

【解析】

【分析】本题考查了平行线的判定与性质, 角平分线定义, 三角形内角和定理, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 由 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线可知 $\angle DBC = \angle EBD$, 由 $BE = ED$ 得 $\angle EDB = \angle EBD$, 等量代换可得到一组内错角相等, 则结论可证;

(2) 由三角形内角和定理可推出 $\angle AED = 80^\circ$, 由平行的性质可知 $\angle ABC = \angle AED = 80^\circ$, 再利用角平分线和平行的性质, 可得 $\angle DBC = \angle EDB = 40^\circ$.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore \angle DBC = \angle EBD$,

$\because BE = ED$,

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$,

$\therefore \angle EDB = \angle CBD$,

$\therefore ED \parallel BC$;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle A = 70^\circ, \angle ADE = 30^\circ,$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle A - \angle ADE = 80^\circ,$$

$\because ED \parallel BC,$

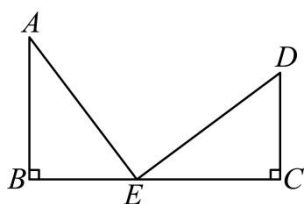
$$\therefore \angle ABC = \angle AED = 80^\circ \text{ 且 } \angle DBC = \angle EDB,$$

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle DBC = \angle EBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle DBC = 40^\circ.$$

22. 如图, $AB \perp BC, DC \perp BC$, 垂足分别是点 B, C , 点 E 是线段 BC 上一点, 且 $AE \perp ED, AE = ED$.



(1) 求证: $AB = EC$;

(2) 若 $BE = 3, AB + BC = 11$, 求 AB 的长.

【答案】(1) 见解析;

(2) 4.

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质和判定, 三角形的内角和定理, 同角的余角相等.

(1) 利用同角的余角相等求出 $\angle A = \angle DEC, \angle B = \angle C = 90^\circ$, 根据 AAS 证 $\triangle ABE \cong \triangle ECD$ 即可;

(2) 推出 $AB = CE$, 求出 $AB + BC = 2AB + BE$, 把 $BE = 3$ 代入求出 AB 即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB \perp BC, DC \perp BC,$

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle BEA = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp ED,$$

$$\therefore \angle BEA + \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle CED,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ECD$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle C = 90^\circ \\ \angle A = \angle CED \\ AE = ED \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECD (\text{AAS}).$$

$$\therefore AB = EC;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because BE = 3,$$

$$\text{由 (1) 得: } \triangle ABE \cong \triangle ECD,$$

$$\therefore BE = CD = 3, \quad AB = CE,$$

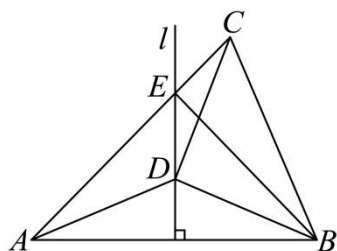
$$\therefore BC = BE + CE = 3 + AB,$$

$$\therefore AB + BC = 11,$$

$$\therefore AB + 3 + AB = 11,$$

$$\therefore AB = 4.$$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, l 是 AB 的垂直平分线, 与边 AC 交于点 E , 点 D 在 l 上, 且 $DB = DC$, 连接 AD .



(1) 求证: 点 D 在边 AC 的垂直平分线上;

(2) 连接 BE , 若 $BD \perp CD$, 求证: $BE \perp AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的性质与判定、等边对等角、三角形内角和定理等知识. 解题的关键是熟练运用垂直平分线的性质和判定, 结合三角形内角和定理推导角度关系.

(1) 利用垂直平分线性质的 $DA = DB$, 结合 $DB = DC$ 推出 $DA = DC$, 进而证明 D 在 AC 的垂直平分线上.

(2) 连接 AD 得到 $DA = DB = DC$, 设角并结合 $BD \perp CD$ 求出相关角度, 得出 $\angle BAE = 45^\circ$, 再利用垂直平分线性质的角度关系证明 $BE \perp AC$.

【小问 1 详解】

证明: $\because l$ 是 AB 的垂直平分线, 点 D 在 l 上,

$$\therefore DA = DB,$$

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore DA = DC.$$

$\therefore$ 点 D 在 AC 的垂直平分线上.

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 可知 $DA = DB = DC$, 由“等边对等角”,

设 $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$, $\angle DCA = \angle DAC = \beta$,

$\because BD \perp CD$,

$\therefore$ 在 $\triangle BDC$ 中, $\angle DBC + \angle DCB = 180^\circ - \angle BDC = 90^\circ$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$,

即 $\angle DBC + \angle DCB + \alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$,

$\therefore 90^\circ + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, 则 $\alpha + \beta = 45^\circ$,

即 $\angle BAE = 45^\circ$,

$\therefore$ 点 E 在边 AB 的垂直平分线上,

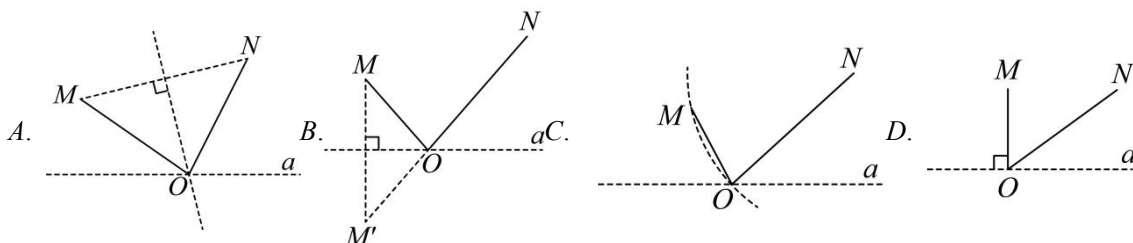
$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle BAE = 45^\circ,$$

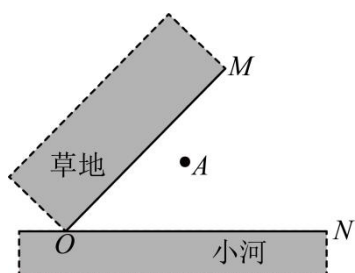
$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle EBA - \angle EAB = 90^\circ$, 则 $BE \perp AC$.

24. “白日登山望烽火, 黄昏饮马傍交河”, 这是唐代诗人李颀《古从军行》里的一句诗, 由此却引申出一系列非常有趣的数学问题, 通常称为“将军饮马”问题.

(1) 如图. 直线 a 是一条输气管道, M , N 是管道同侧的两个村庄, 现计划在直线 a 上修建一个供气站 O , 向 M , N 两村庄供应天然气. 在下面四种方案中, 铺设管道最短的是 ()



(2) 如图, 草地边缘 OM 与小河河岸 ON 在点 O 处形成夹角, 牧马人从 A 地出发, 先让马到草地吃草, 然后再去河边饮水, 最后回到 A 地. 请在图中设计一条路线, 使其所走的路径最短, 并说明理由.



【答案】(1) B

(2) 最短路径如图，理由见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了轴对称的最短路线问题，熟练掌握以上知识是解题的关键.

(1) 作点 M 关于直线 a 的对称点 M' ，连接 MM' ，根据轴对称和垂直平分线的性质可得正确选项.

(2) 作点 A 关于直线 OM 和 ON 的对称点 B 和 C ，连接 AB 和 AC ，连接 BC ，分别交直线 OM 和 ON 于点 D 和 E ，连接 DA 和 EA ，根据轴对称和垂直平分线的性质可得最短路径.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 作点 M 关于直线 a 的对称点 M' ，连接 MM' ，故直线 a 是 MM' 的垂直平分线，

$$\therefore MO = M'O,$$

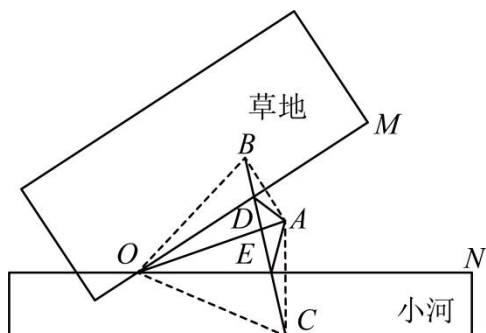
$$\therefore MO + ON = M'O + ON,$$

$\therefore$ 铺设管道最短的是选项 B，

故选: B.

【小问 2 详解】

解: 作点 A 关于直线 OM 和 ON 的对称点 B 和 C ，连接 AB 和 AC ，连接 BC ，分别交直线 OM 和 ON 于点 D 和 E ，连接 DA 和 EA ，如图:



根据对称的性质可得直线 OM 和 ON 分别是 AB 和 AC 的垂直平分线，

$$\therefore AD = BD, \quad AE = EC$$

$$\therefore AE + DE + AD = BD + DE + CE = BC,$$

根据两点之间线段最短，即可得出路径最短为 AD, ED, EA .

