

2024 学年第二学期期末学情诊断

初一数学试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟) 2025.6

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列数中是不等式 $2x + 3 > 9$ 的解的是 ()

- A. 0 B. 100 C. -3 D. -4

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了求不等式的解集.

求出不等式的解集判断即可.

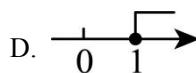
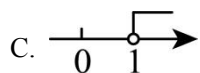
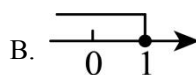
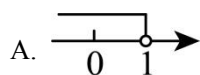
【详解】 解: 解不等式得 $x > 3$

因此, 解集为所有大于 3 的数.

只有选项 B 符合条件.

故选: B.

2. 不等式 $x < 1$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查在数轴上表示不等式的解集, 根据小于向左, 无等号为空心圆圈, 即可得出答案.

【详解】 解: $x < 1$, 折线向左, 用空心圆圈将 1 排除,

故选 A.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 92^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形
B. 直角三角形
C. 钝角三角形
D. 以上三种情况都有可能

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形的识别.

根据 $\angle A = 92^\circ$, 结合钝角三角形的定义即可判断.

【详解】解: $\because \angle A = 92^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形.

故选: C.

4. 下列有关不等式的解法中, 错误的是 ()

- A. $x - 2 \geq 2$, 两边同加 2, 得 $x \geq 4$
B. $x + 6 \leq 0$, 两边同减 6, 得 $x \leq -6$
C. $-x \geq -6$, 两边同乘 -1 , 得 $x \geq 6$
D. $-3x \geq -6$, 两边同除以 -3 , 得 $x \leq 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查不等式的基本性质.

根据不等式的基本性质逐一判断即可.

【详解】解: 选项 A: 解不等式 $x - 2 \geq 2$, 两边同加 2, 得 $x \geq 4$. 此操作符合不等式性质 (加减同一数不改变不等号方向), 正确, 不符合题意.

选项 B: 解不等式 $x + 6 \leq 0$, 两边同减 6, 得 $x \leq -6$. 此操作符合不等式性质 (加减同一数不改变不等号方向), 正确, 不符合题意.

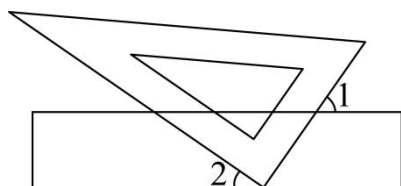
选项 C: 解不等式 $-x \geq -6$, 两边同乘 -1 时, 未改变不等号方向, 错误. 正确解法应为 $x \leq 6$, 符合题意.

选项 D: 解不等式 $-3x \geq -6$, 两边同除以 -3 时改变不等号方向, 得 $x \leq 2$, 正确, 不符合题意.

综上, 错误的解法是 C.

故选: C.

5. 小明将一块直角三角板摆放在直尺上, 如图, 若 $\angle 1 = 55^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



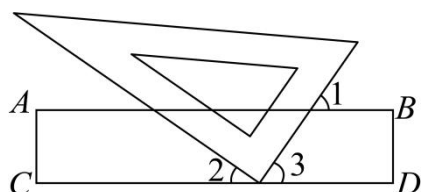
A. 25° B. 35° C. 45° D. 55°

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了平行线的性质，根据平行线的性质得到 $\angle 3 = \angle 1 = 55^\circ$ ，再利用平角的定义即可求出 $\angle 2$ 的度数.

【详解】解：如图，



$$\because \angle 1 = 55^\circ, AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 3 = 35^\circ,$$

故选：B

6. 如图，有一个圆锥形冰激凌，其底面直径为 6cm ，高为 15cm ．那么这个圆锥形冰激凌的体积是（ ）

A. $45\pi\text{cm}^3$ B. $135\pi\text{cm}^3$ C. $180\pi\text{cm}^3$ D. $540\pi\text{cm}^3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了圆锥的体积公式.
直接根据圆锥的体积公式计算即可.

$$\text{【详解】解：} V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 15 = 45\pi(\text{cm}^3).$$

故选：A.

7. 下列说法中，错误的是（ ）

A. 两个全等的三角形面积相等

B. 成轴对称的两个三角形全等

C. 成中心对称的两个三角形全等

D. 两个等边三角形全等

【答案】D

【解析】

【详解】本题考查全等三角形的判定和性质及对称变换的性质. 根据全等三角形的性质和判定方法, 逐一判断即可.

【分析】A. 全等三角形形状、大小完全相同, 面积必然相等, 正确.

B. 轴对称属于全等变换, 成轴对称的三角形经翻折后重合, 故全等, 正确.

C. 中心对称属于旋转变换 (旋转 180°), 不改变图形形状和大小, 故全等, 正确.

D. 等边三角形仅保证内角均为 60° 且三边相等, 但边长可能不同 (如边长 3 与边长 5 的等边三角形不全等), 因此不一定全等, 错误.

故选: D.

8. 有下列两个命题: ①如果 $|m| = |n|$, 那么 $m = n$; ②两角对应相等且其中一组等角的平分线相等的两个三角形全等. 对于这两个命题判断正确的是 ()

A. ①②都是真命题

B. ①是真命题, ②是假命题

C. ①是假命题, ②是真命题

D. ①②都是假命题

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了命题的真假判断. ①根据绝对值的性质判断命题真假; ②结合全等三角形的判定定理及角平分线性质的分析.

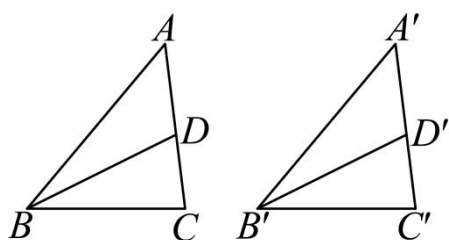
【详解】命题①: 若 $|m| = |n|$, 则 $m = n$.

绝对值相等的两个数可能相等或互为相反数, 例如 $|3| = |-3|$, 但 $3 \neq -3$. 因此命题①为假命题;

命题②: 两角对应相等且其中一组等角的平分线相等的两个三角形全等.

已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A = \angle A'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ABC$ 、 $\angle A'B'C'$ 的角平分线 $BD = B'D'$,

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



证明：∵ $\angle ABC = \angle A'B'C'$ 且 $\angle ABC$ 、 $\angle A'B'C'$ 的角平分线分别为 BD 和 $B'D'$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle A'B'D' = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle A'B'D' \text{ 中 } \begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle ABD = \angle A'B'D' \\ BD = B'D' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = A'B',$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle A'B'C' \text{ 中 } \begin{cases} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ \angle ABC = \angle A'B'C' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' (\text{AAS}).$$

因此命题②为真命题；

故选：C.

二、填空题（本大题共 10 题，每题 3 分，满分 30 分）

9. 用适当的不等式表示“ a^2 大于 $2a$ ”为_____.

【答案】 $a^2 > 2a$

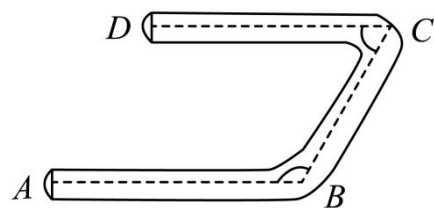
【解析】

【分析】 本题考查了列不等式，解题关键是掌握不等式的定义. 根据题意用“ $>$ ”，列出不等式即可.

【详解】 解：不等式表示“ a^2 大于 $2a$ ”为： $a^2 > 2a$

故答案为： $a^2 > 2a$.

10. 如图，一个芥形管道 $ABCD$ 的拐角 $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle BCD$ 的度数是_____.



【答案】 60° ##60 度

【解析】

【分析】 根据两直线平行，同旁内角互补即可得出结果.

【详解】 解：∵ $AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

故答案为： 60° .

【点睛】 本题考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B = 2\angle A$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，则 $\angle A =$ _____.

【答案】 40°

【解析】

【分析】 设 $\angle A = x$ ，则 $\angle B = 2x$ ，根据 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 得出方程 $60 + x + 2x = 180$ ，求出方程的解即可.

【详解】 在 $\triangle ABC$ 中， $\because \angle B = 2\angle A$ ，设 $\angle A = x$ ，则 $\angle B = 2x$.

$$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \therefore 60 + x + 2x = 180^\circ, \text{解得: } x = 40^\circ.$$

则 $\angle A = 40^\circ$.

故答案为 40° .

【点睛】 本题考查了三角形内角和定理的应用，注意：三角形的内角和等于 180° ，用了方程思想.

12. 将命题“在三角形中，大边对大角”改写成“如果……，那么……”的形式是_____.

【答案】 如果一个三角形中一边大于另一边，那么该边所对的角大于另一边所对的角

【解析】

【分析】 本题主要考查的知识点是如何将原命题写成条件与结论的形式，“如果”后面是命题的条件，“那么”后面是条件的结论，解题关键是找到命题中相应的条件和结论. 命题中的条件是一个三角形中一边大于另一边，放在“如果”的后面，结论是该边所对的角大于另一边所对的角，应放在“那么”的后面.

【详解】 解：如果一个三角形中一边大于另一边，那么该边所对的角大于另一边所对的角

故答案为：如果一个三角形中一边大于另一边，那么该边所对的角大于另一边所对的角.

13. 已知一个等腰三角形的两条边长分别为 2cm 和 4cm ，则它的底边长是_____ cm .

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系；本题应分为两种情况：① 2 为底， 4 为腰，② 4 为底， 2 为腰，根据三角形的三边关系即可求解.

【详解】 解： $\because$ 等腰三角形的两边分别是 2cm 和 4cm ,

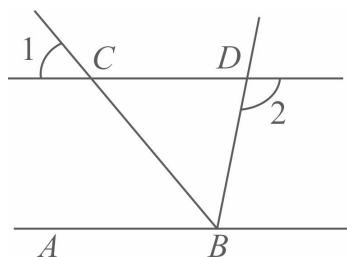
$\therefore$ 应分为两种情况：① 2 为底， 4 为腰，则 $2 + 4 + 4 = 10\text{cm}$ ；

② 4 为底， 2 为腰，则 $2 + 2 = 4$ 构不成三角形；

$\therefore$ 它的底边长是 2cm .

故答案为：2.

14. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， BC 平分 $\angle ABD$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的大小为_____.



【答案】 100° ## 100 度

【解析】

【分析】 根据两直线平行同位角相等得到 $\angle CBA = \angle 1 = 50^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle ABD = 2\angle CBA = 100^\circ$ ，最后根据两直线平行内错角相等即可求解.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 50^\circ$

$$\therefore \angle CBA = \angle 1 = 50^\circ$$

$\because BC$ 平分 $\angle ABD$

$$\therefore \angle ABD = 2\angle CBA = 100^\circ$$

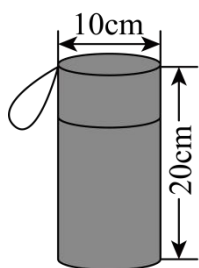
$\because AB \parallel CD$

$$\therefore \angle 2 = \angle ABD = 100^\circ$$

故答案为： 100°

【点睛】 本题考查了平行线、角平分线的性质；解题的关键是熟练运用性质求解.

15. 小海的圆柱形水壶有一个布套(如图，含侧面和两个底面)，其底面直径为 10cm ，母线长为 20cm . 他做这个布套至少用的布料为_____ cm^2 . (结果保留 π)



【答案】 250π

【解析】

【分析】 本题考查了求圆柱体的表面积，根据圆柱底面积和侧面积的计算方法进行计算即可得到答案.

【详解】 解： $2 \times \pi \times (10 \div 2)^2 + \pi \times 10 \times 20$

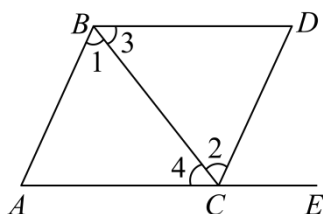
$$= 50\pi + 200\pi,$$

$$= 250\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

答：做这个布套至少需要布料 $205\pi\text{cm}^2$.

故答案为： 250π .

16. 给定如图所示的图形（不再添线），点 E 在 AC 的延长线上，请添加一个条件_____作为已知条件，通过推理能得到 $AB \parallel CD$ （只需填写一个满足的条件）



【答案】 $\angle 1 = \angle 2$ （或 $\angle A = \angle DCE$ 或 $\angle A + \angle ACD = 180^\circ$ 或 $\angle ABD + \angle D = 180^\circ$ ）

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的判定定理，根据平行线的判定定理，结合图形，即可求解.

【详解】 解： $\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore AB \parallel CD$;

$\because \angle A = \angle DCE$,

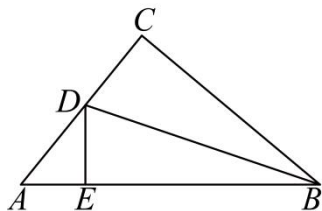
$\therefore AB \parallel CD$;

$\because \angle A + \angle ACD = 180^\circ$ 或 $\angle ABD + \angle D = 180^\circ$

$\therefore AB \parallel CD$;

故答案为： $\angle 1 = \angle 2$ （或 $\angle A = \angle DCE$ 或 $\angle A + \angle ACD = 180^\circ$ 或 $\angle ABD + \angle D = 180^\circ$ ）.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上， $AB = 8\text{cm}$ ， $BC = 6\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$. 若 $\triangle CBD \cong \triangle EBD$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长为_____ cm .



【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质，根据全等三角形的性质可得 $BE = BC = 6\text{cm}$ ， $CD = DE$ ，进而求得 $AE = 2\text{cm}$ ，根据三角形的周长公式，即可求解.

【详解】解：∵ $\triangle CBD \cong \triangle EBD$ ， $AB = 8\text{cm}$ ， $BC = 6\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$

∴ $BE = BC = 6\text{cm}$ ， $CD = DE$ ，

∴ $AE = 2\text{cm}$ ，

∴ $\triangle ADE$ 的周长为 $AD + DE + AE = AD + DC + AE = AC + AE = 5 + 2 = 7(\text{cm})$

故答案为：7.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，点 D 在边 AB 上且 $AC = AD$ ，连接 CD ，点 G 在线段 CD 上（不与点 C 、 D 重合），直线 l 过点 D ，将 $\triangle ABC$ 沿着直线 l 翻折（点 G 关于直线 l 的对称点为点 P ）. 若点 P 在过点 G 且与 AB 平行的直线上，那么 $\angle ADP$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

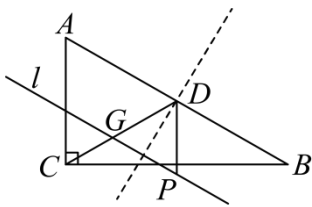
【答案】120

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质，等边三角形的判定与性质，三角形的内角和定理，平行线的性质等知识.

先求 $\angle A$ ，然后证明 $\triangle ADC$ 为等边三角形，再由平行线的性质得到 $\angle DGP = 60^\circ$ ，根据折叠的性质证明 $\triangle DGP$ 为等边三角形，再由角度和差计算求解.

【详解】解：如图：



∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

∴ $\angle A = 180^\circ - \angle B - 90^\circ = 60^\circ$ ，

∴ $AD = AC$ ，

∴ $\triangle ADC$ 为等边三角形，

∴ $\angle ADC = 60^\circ$ ，

∵ 翻折，

∴ $DG = DP$ ，

∵ $PG \parallel AB$ ，

∴ $\angle DGP = \angle ADC = 60^\circ$ ，

∴ $\triangle DGP$ 为等边三角形，

$$\angle GDP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle ADC + \angle GDP = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为：120.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 46 分)

19. 解不等式组
$$\begin{cases} 2x+1 > 3 & \textcircled{1} \\ x-1 \leq \frac{5-x}{3} & \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】 $1 < x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组，分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

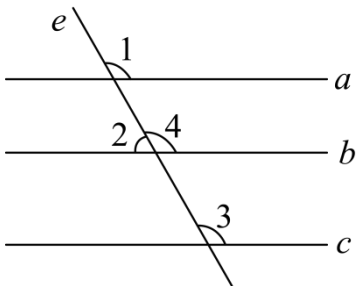
【详解】 解:
$$\begin{cases} 2x+1 > 3 & \textcircled{1} \\ x-1 \leq \frac{5-x}{3} & \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①得: $x > 1$

解不等式②得: $x \leq 2$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $1 < x \leq 2$.

20. 如图, 已知直线 a 、 b 、 c 被直线 e 所截. 若 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 1 = 120^\circ$, 且 $b \parallel c$, 求 $\angle 3$ 的度数. 把以下解答过程补充完整.



解: 如图, 将与 $\angle 2$ 相邻的补角记为 $\angle 4$.

$$\because \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ, \quad \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4.$$

$$\therefore a \parallel b (\text{同位角相等, 两直线平行}).$$

$$\because b \parallel c,$$

$$\therefore \underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}} (\text{同位角相等, 两直线平行}).$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 (\text{_____})$$

$$\because \angle 1 = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \text{_____}^\circ.$$

【答案】同位角相等，两直线平行； a ； c ；平行于同一直线的两条直线互相平行；两直线平行，同位角相等；120

【解析】

【分析】此题考查了平行线的判定与性质，熟记平行线的判定定理与性质定理是解题的关键。根据平行线的判定定理与性质定理求解即可。

【详解】解：如图，将与 $\angle 2$ 相邻的补角记为 $\angle 4$ 。

$$\because \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ, \quad \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4.$$

$$\therefore a \parallel b (\text{同位角相等，两直线平行}).$$

$$\because b \parallel c,$$

$$\therefore a \parallel c (\text{平行于同一直线的两条直线互相平行})$$

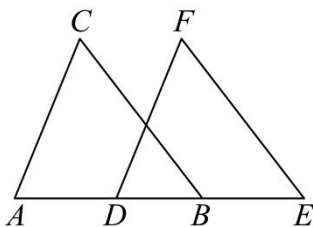
$$\therefore \angle 1 = \angle 3 (\text{两直线平行，同位角相等})$$

$$\because \angle 1 = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 120^\circ.$$

故答案为：同位角相等，两直线平行； a ； c ；平行于同一直线的两条直线互相平行；两直线平行，同位角相等；120.

21. 如图，点 A 、 D 、 B 、 E 在同一条直线上， $AD = BE$ ， $AC = DF$ ， $BC = EF$ 。



(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(2) 若 $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle E = 50^\circ$ ，求证： $EF = ED$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，等边对等角，三角形内角和定理的应用，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解决问题的关键.

(1) 先根据 $AD = BE$ 得 $AB = DE$ ，进而证明；

(2) 由 (1) 得 $\angle A = \angle FDE = 55^\circ$ ，进而根据三角形内角和定理可得， $\angle FDE = \angle F$ ，进而根据等角对等边，即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD = BE$ ，

$\therefore AD + BD = BE + BD$ ，

即 $AB = DE$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS)；

【小问 2 详解】

证明： $\because \angle A = 65^\circ$ ， $\angle E = 50^\circ$ ，

由 (1) 可知： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，

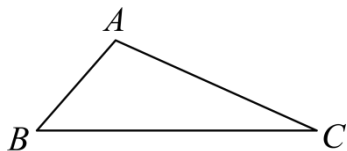
$\therefore \angle A = \angle FDE = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle F = 180^\circ - (\angle FDE + \angle E) = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ) = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle FDE = \angle F$ ，

$\therefore EF = ED$

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线与 BC 交于点 D .



(1) 尺规作图：请用无刻度的直尺和圆规，在线段 BC 上作点 D (要求：不写作法，保留作图痕迹)；

(2) 连接 AD 。如果 $\angle ADC = 96^\circ$ ， $\angle CAD$ 与 $\angle DAB$ 的度数之比为 $5:4$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数是多少？

【答案】(1) 见解析 (2) 108°

【解析】

【分析】本题考查作垂直平分线、线段垂直平分线的性质，等边对等角，三角形的外角的性质，熟练掌握

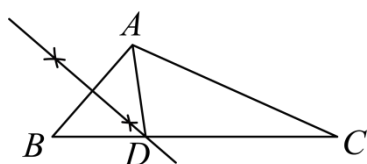
线段垂直平分线的性质是解答本题的关键.

(1) 根据线段垂直平分线的作图方法作线段 AB 的垂直平分线, 交 BC 于点 D , 则点 D 即为所求.

(2) 由线段垂直平分线的性质可得 $AD = BD$, 则 $\angle B = \angle BAD$. 根据 $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2\angle BAD = 96^\circ$, 可得 $\angle BAD = 48^\circ$, 则 $\angle CAD = 60^\circ$, 则可得 $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 48^\circ + 60^\circ = 108^\circ$.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作线段 AB 的垂直平分线, 交 BC 于点 D ,
则点 D 即为所求.



【小问 2 详解】

$\because AB$ 的垂直平分线与 BC 交于点 D ,

$\therefore AD = BD$,

$\therefore \angle B = \angle BAD$.

$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2\angle BAD = 96^\circ$,

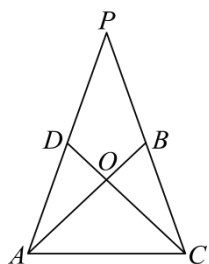
$\therefore \angle BAD = 48^\circ$.

$\because \angle CAD$ 与 $\angle DAB$ 的度数之比为 $5:4$,

$\therefore \angle CAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 48^\circ + 60^\circ = 108^\circ$.

23. 如图, 已知: 在 $\triangle PAC$ 中, 点 D 、 B 分别在边 PA 、 PC 上, AB 与 CD 相交于点 O , $\angle ADC = \angle ABC$, $AD = BC$.



(1) 求证: $PA = PC$;

(2) 连接 PO 并延长交 AC 于点 E , 求证: $PE \perp AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键；

(1) 证明 $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (AAS) 得出 $\angle DAO = \angle BCO$ ， $OA = OC$ ，根据等边对等角可得 $\angle OAC = \angle OCA$ ，进而得出 $\angle PAC = \angle PCA$ ，根据等角对等边，即可得证；

(2) 证明 $\triangle APO \cong \triangle CPO$ (SSS) 得出 PE 平分 $\angle APC$ ，根据三线合一的性质，即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle AOD = \angle COB$ ， $\angle ADC = \angle ABC$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$ (AAS)

$\therefore \angle DAO = \angle BCO$ ， $OA = OC$

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$

$\therefore \angle OAC + \angle DAO = \angle BCO + \angle OCA$ ，即 $\angle PAC = \angle PCA$

$\therefore PA = PC$ ；

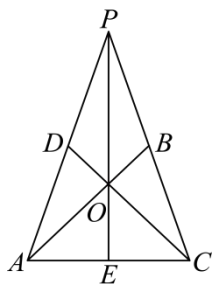
【小问 2 详解】

$\because PA = PC$ ， $AO = CO$ ， $PO = PO$

$\therefore \triangle APO \cong \triangle CPO$ (SSS)

$\therefore \angle APO = \angle CPO$ ，即 PE 平分 $\angle APC$

$\therefore PE \perp AC$



24. 某数学学习小组成员康康、小海、欢欢和乐乐等同学继续对课本18.3等边三角形开展了深入探究.

问题回顾: 课本中有例题, 证明: 有一个内角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形. 如图1. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$. 需要对三个内角分别等于 60° 的各种情况进行讨论, 其中 $\angle B = 60^\circ$ 和 $\angle C = 60^\circ$ 是类似的, 故只要分两种情况讨论.

①当 $\angle B = 60^\circ$ 时, 那么可以证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形;

②当 $\angle A = 60^\circ$ 时, 那么可以证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

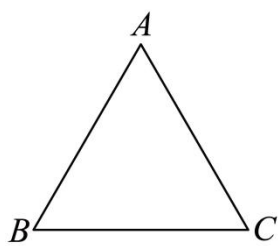


图1

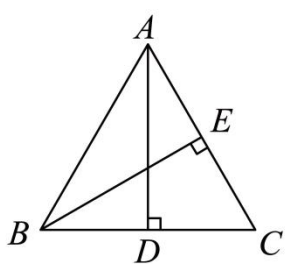
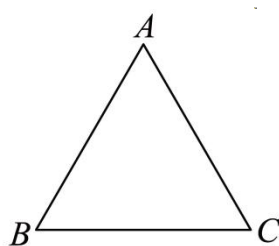


图2



备用图

(1) 请写出情况①的证明过程;

问题探究:

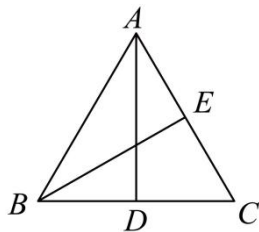
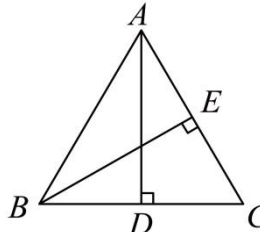
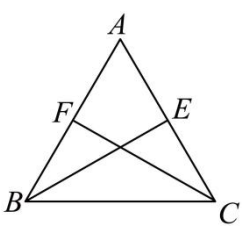
于是, 康康提出了一个问题: 我们将上题中的条件“有一个内角等于 60° ”替换为“底边上的高和腰上的高对应相等”, 如图 2. 即: 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, 垂足分别为点 D 、 E , 且 $AD = BE$, 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) 请写出证明过程;

问题拓展:

由此启发, 该小组猜想: 在等腰三角形中, 如果以“一边(底边或腰)上的高”“一边(底边或腰)上的中线”或“一角(顶角或底角)的角平分线”中的两个条件, 加以组合(也就是形成一组须同时满足的关系), 使它们对应相等, 是否还能新构成一个能判定一个等腰三角形是等边三角形的条件?

基于此, 小组成员小海、欢欢、乐乐进行了探索, 并分别提供了自己的已知、求证和图形.

小海	欢欢	乐乐
已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 中线 $AD =$ 中线 BE. 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形. 	已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 角平分线 $AD =$ 高 BE. 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形. 	已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 角平分线 $BE =$ 角平分线 CF. 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形. 

(3) 你认为_____ (填小海、欢欢、乐乐其中一个) 的探究是正确的, 并写出该证明过程.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析; (3) 欢欢, 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质, 等边三角形的判定, 全等三角形的性质与判定, 熟练掌握等边三

角形的性质判定定理，全等三角形的判定定理是解题的关键；

(1) 根据三角形内角和定理以及已知条件得出 $\angle A = \angle C$ ，进而得出 $AB = BC$ ，则 $AB = AC = BC$ ，即可得证；

(2) 证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ (AAS) 得出 $AB = BC$ ，则 $AB = AC = BC$ ，即可得证；

(3) 根据 (2) 的方法证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ，只有欢欢的可以证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ，即可求解.

【详解】 (1) 证明：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\because \angle B = 60^\circ$$

$$\therefore \angle C = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle C$$

$$\therefore AB = BC$$

$$\therefore AB = AC = BC$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形；

(2) 证明： $\because AD \perp BC$ ， $BE \perp AC$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ,$$

又 $\because \angle BCE = \angle ACD$ ， $AD = BE$ ，

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD \text{ (AAS)}$$

$$\therefore AC = BC$$

$$\because AB = AC$$

$$\therefore AB = AC = BC$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形；

(3) 欢欢的探究是正确的，证明如下，

$\because AB = AC$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$$\therefore AD \perp BC$$

$\because BE$ 是 AC 边上的高，

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$$

又 $\because \angle BCE = \angle ACD$ ， $AD = BE$ ，

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD \text{ (AAS)}$$

$$\therefore AC = BC$$

$$\therefore AB = AC$$

$$\therefore AB = AC = BC$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形；

小海：已知中线 $AD = BE$ ， $\angle BCE = \angle ACD$ ，不能证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ，则不能得出 $AC = BC$ ，故不正确；

乐乐：角平分线 $BE =$ 角平分线 CF ，不能证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ，则不能得出 $AC = BC$ ，故不正确；

故答案为：欢欢.

25. 设平面上的三个点 A 、 B 、 C ，需确定点 P 的位置，使 $PA + PB + PC$ 最小.

当点 A 、 B 、 C 共线时，点 P 应取三点中居中的点. 当点 A 、 B 、 C 不共线时，分成两类： $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 和 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° . 约 1640 年，法国数学家费马 (Pierre de Fermat, 1601—1665) 提出了这个问题，此问题中求得的点 P 也称为费马点，并由意大利数学家托里拆利首次证明.

下面来探究当点 A 、 B 、 C 不共线时的情况：

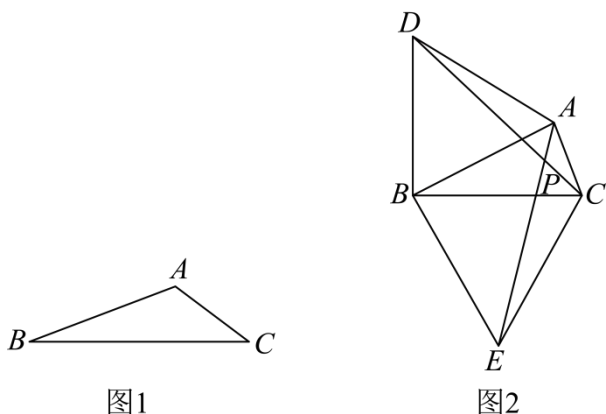


图1

图2

(1) 如图 1，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ 时，—— 点 A 为所求费马点.

(2) 如图 2，已知：在 $\triangle ABC$ 中，最大角 $\angle BAC < 120^\circ$ 时，

我们可以快速找到这类三角形的费马点，作法如下：分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 为边向外作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE ，此时 CD 和 AE 交于一点 P ，点 P 就是所求的费马点.

①请找出图中与 AE 相等的线段，并说明理由；

②为了验证作图中找到的点 P 就是费马点，连接 BP .

求证： $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$.

【答案】(1) 点 A

(2) ① DC ，理由见解析；②见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，三角形外角的性质，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键；

(1) 当点 P 和点 A 重合时 $PA + PB + PC = AB + AC$ 取得最小值，即可求解；

(2) ①证明 $\triangle DBC \cong \triangle ABE$ (SAS)，根据全等三角形的性质，即可求解；

②设 AE, BC 交于点 Q ，连接 BP ，在 AE 上取点 F 使得 $PF = PC$ ，根据 $\triangle DBC \cong \triangle ABE$ ，得出

$\angle BCD = \angle BEA$ ，则 $\angle QPC = \angle EBC = 60^\circ$ ，进而证明 $\triangle PFC$ 是等边三角形，证明 $\triangle BPC \cong \triangle EFC$ (SAS)

得出 $\angle BPC = \angle EFC = 120^\circ$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ 时，点 A 为所求费马点.

$\therefore$ 当点 P 和点 A 重合时 $PA + PB + PC = AB + AC$ 取得最小值，

$\therefore$ 点 A 为所求费马点.

故答案为：点 A .

【小问 2 详解】

解：① $AE = DC$ ，理由如下，

$\because \triangle ABD, \triangle CBE$ 是等边三角形，

$\therefore BE = BC, AB = DB, \angle EBC = \angle ABD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBA + \angle ABC = \angle EBC + \angle ABC$ ，即 $\angle DBC = \angle ABE$ ，

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ABE$ (SAS)，

$\therefore AE = DC$ ；

②如图，设 AE, BC 交于点 Q ，连接 BP ，在 AE 上取点 F 使得 $PF = PC$ ，

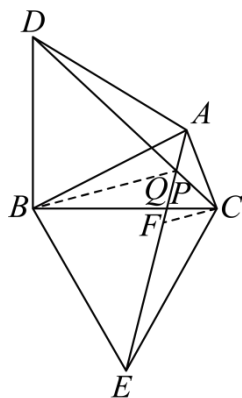


图2

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ABE$ ，

$$\therefore \angle BCD = \angle BEA,$$

又 $\because \angle CQE = \angle CBE + \angle BEA = \angle QPC + \angle BCD$, $\triangle CBE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle QPC = \angle EBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = 180^\circ - \angle QPC = 120^\circ,$$

又 $\because PF = PC$,

$\therefore \triangle PFC$ 是等边三角形,

$\therefore PC = CF$, $\angle PCF = \angle BCE = 60^\circ$, 则 $\angle EFC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle PCB = \angle FCE,$$

在 $\triangle BPC, \triangle EFC$ 中,

$$\begin{cases} PC = FC \\ \angle PCB = \angle FCE, \\ BC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPC \cong \triangle EFC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BPC = \angle EFC = 120^\circ,$$

又 $\because \angle APC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle APB = 360^\circ - \angle BPC - \angle APC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ.$$