

2024 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷

(时间 90 分钟 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 一次函数 $y = -3x - 1$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 下列事件中, 是确定事件的是 ()

- A. 抛掷一枚质地均匀的硬币, 落地后反面朝上
B. 直线 $y = 2x + 1$ 与直线 $y = 2x$ 有公共点
C. 经过有交通信号灯的路口, 遇到黄灯
D. 射击运动员射击一次, 命中 9 环

3. 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ B. $x^2 - x + 1 = 0$
C. $\sqrt{x+1} = 0$ D. $x^2 + 2x + 1 = 0$

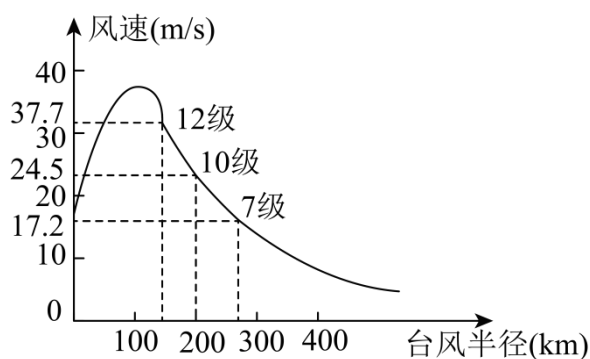
4. 下列命题中, 是假命题的是 ()

- A. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{a}| = 0$ B. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$
C. 若 $\vec{a} = \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$

5. 下列命题中, 不正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
B. 对角线相等的平行四边形是矩形;
C. 对角线相等的矩形是正方形
D. 对角线相等的菱形是正方形.

6. 台风影响着人们的生产和生活. 从函数角度研究地面风速随着离台风中心距离 (即台风半径) 变化而变化的规律, 以台风半径 $x(\text{km})$ 为横轴, 风速 $y(\text{m/s})$ 为纵轴的坐标系中画出了如图所示的函数图像, 并在图中标注了该台风的 12 级、10 级和 7 级风圈半径. 例如当离台风中心的距离约为 150km 时, 地面风速衰减至 37.7m/s, 此时 150km 为 12 级风圈半径. 那么以下关于这场台风的说法中, 正确的是 ()



- A. 越靠近台风中心位置, 风速越大
- B. 距台风中心 150km 处, 风速达到最大值
- C. 10 级风圈半径约为 280 km
- D. 在某个台风半径达到最大风速之后, 随台风半径的增大, 风速又逐渐衰减.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 方程 $x^3 - 1 = 0$ 的根是_____.

8. 方程 $\sqrt{x+12} = x$ 的解是_____.

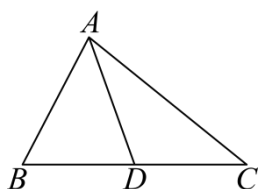
9. 用换元法解关于 x 的方程 $\frac{x^2-2}{x} = 3 + \frac{4x}{x^2-2}$, 如果设 $\frac{x^2-2}{x} = m$, 那么原方程可化为关于 m 的整式方程为_____.

10. 已知直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 经过点 $(-2, 0)$, 那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.

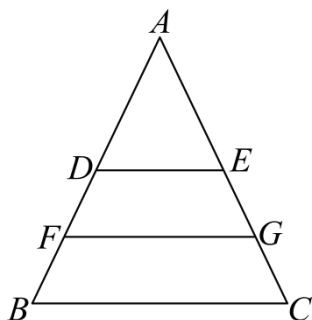
11. 如果从多边形的一个顶点出发的对角线有 4 条, 那么这个多边形的内角和为_____.

12. 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, 那么 BD 的长是_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 为_____.



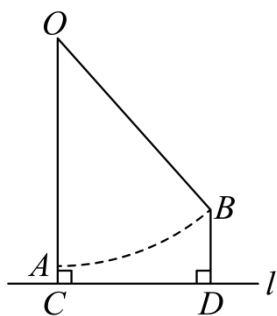
14. 如图, 在 ABC 中, D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点, 如果 $DE = 4$, 那么 $FG =$ _____.



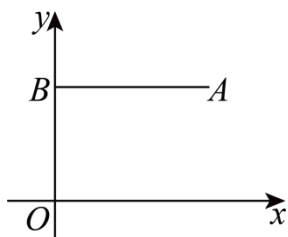
15. 晚上在清洗三只除颜色外完全相同的有盖茶杯时, 忽然停电, 爸爸摸黑将三个杯盖随机盖在三个茶杯上, 运用枚举法可以求出三只茶杯和杯盖搭配完全正确的概率为 _____.

16. 我国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题: 平地秋千未起, 踏板离地一尺. 送行二步与人齐, 五尺人高曾记. 良工高士素好奇, 算出索长有几? (1 步 = 5 尺)

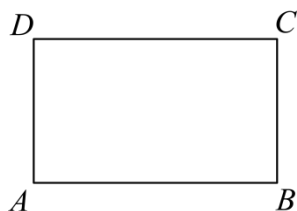
这段话的意思是: 秋千静止时, 踏板离地面 1 尺高; 将秋千的踏板向前推动 2 步 10 尺时, 踏板就和推秋千的人一样高, 同为 5 尺. 小明根据上述信息画出了如图所示的示意图, 则可求秋千的绳索长为 _____ 尺.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(4,3)$, $AB \perp y$ 轴于点 B . 以 AB 为边作菱形 $ABCD$, 若点 C 在 x 轴上, 则点 D 的坐标为 _____.



18. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $AD = 3$, E 是射线 DC 上一点, 将矩形沿着直线 AE 翻折, 点 D 的对应点 F 恰好和点 B 、 E 在一条直线上, 则 DE 的长为 _____.

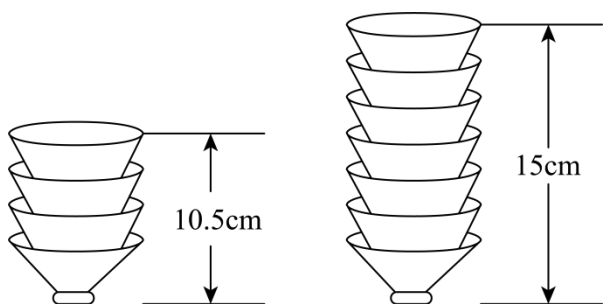


三、(本大题共 7 题, 第 19-20 题每题 7 分; 第 21 题 8 分; 第 22 题 9 分; 第 23 题 10 分; 第 24 题 11 分; 第 25 题 12 分; 满分 64 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

20. 解方程组: $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 16 \textcircled{1} \\ x^2 + 3xy = 0 \textcircled{2} \end{cases}$.

21. 如图, 两摞相同规格的饭碗整齐地叠放在桌面上, 请根据图中给的数据信息, 解答下列问题:

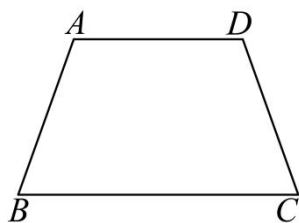


(1) 像这样规格的饭碗整齐地叠放在桌面上时, 求一摞饭碗的高度 y (cm) 与饭碗数 x (个) 之间的函数解析式;

(2) 把图中这两摞饭碗整齐地摆成一摞时, 这摞饭碗的高度是多少 cm?

(3) 如果一摞饭碗的高度超过 25cm 时容易发生侧翻, 请问一摞最多能放多少个碗?

22. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD = CD$, $\angle B = \angle C$.



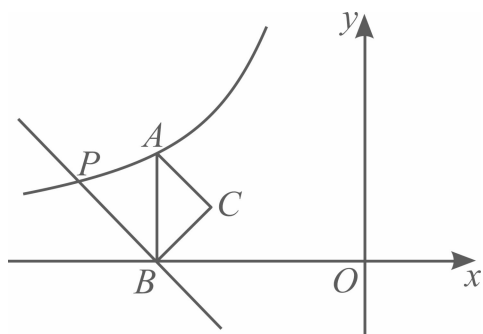
(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

(2) 当 $BD \perp DC$ 时, 求 $\angle B$ 的度数.

23. 在平面直角坐标系中, 如图所示, 已知点 A 在反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ($x < 0$) 的图像上. 过 A 作 $AB \perp x$

轴, 垂足为点 B. 在 AB 的右侧, 以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC, 再过点 B 作 $BP \parallel AC$ 交反比例

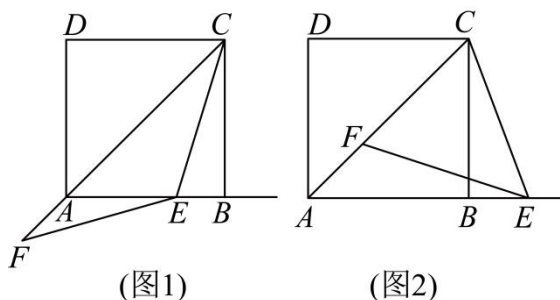
函数 $y = -\frac{8}{x}$ ($x < 0$) 的图像于点 P .



(1) 当点 A 的横坐标为 -4 时, 求点 C 的坐标和直线 BP 的表达式;

(2) 当四边形 $ACBP$ 是正方形时, 求点 A 的坐标.

24. 已知, 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 点 E 为射线 AB 上一个动点, 连接 CE , 以点 E 为圆心, CE 为半径画弧与直线 CA 交于点 F , 连接 EF , 且规定 $0^\circ < \angle BCE < 45^\circ$.



(1) 如图 1, 当点 E 在边 AB 上时, 求证: $\angle BCE = \angle AEF$;

(2) 如图 2, 当点 E 在边 AB 的延长线上时, 求解下列问题:

① 设 BE 的长为 x , AF 的长为 y , 试求 y 关于 x 的函数解析式及 x 的取值范围;

② 当 $\angle BEC = 3\angle BCE$ 时, 求 BE 的长.

25. 综合与探究

新定义: 至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫做邻等对补四边形.

请运用研究特殊四边形的经验, 对“邻等对补四边形”进行探究.

(1) 概念理解: 用分别含有 30° 和 45° 角的直角三角形纸板拼出如图 1 所示的 4 个四边形, 其中是邻等对补四边形的有 _____ (填序号).

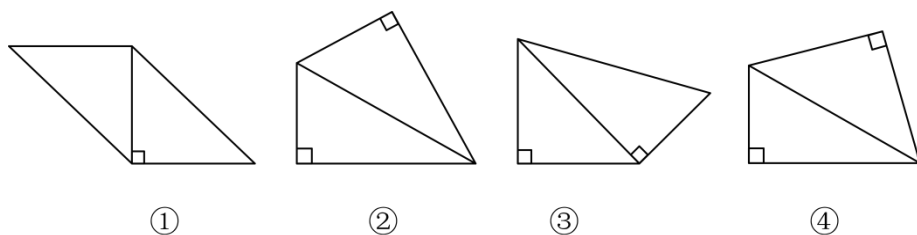


图1

(2) 性质探究:

小明从特殊到一般, 围绕邻等对补四边形的对角线展开研究, 首先根据图 1②中的特殊情况得到一个结论:

若邻等对补四边形中, 两组邻边均相等, 则必有一条对角线平分一组对角;

于是他画出了如图 2 的更一般的邻等对补四边形, 并从对角线的维度得到了以下猜想:

若邻等对补四边形中, 仅有一组邻边相等, 则必有一条对角线平分一个内角;

请根据图 2, 改写命题, 写出已知条件和求证, 并进行证明.

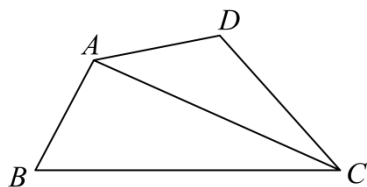


图2

(3) 综合应用:

如图 3, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB < BC$. 分别在边 BC , AC 上取点 E , F , 使四边形 $ABEF$ 是邻等对补四边形.

若 $\angle A = m$, 请画出所有符合条件的图形, 并直接写出或用含 m 的代数式表示 $\angle ABF$.

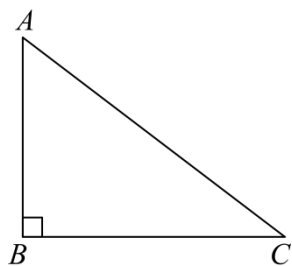


图3