

2023 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷

(时间 90 分钟 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 24 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是 ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. 下列关于 x 的方程中, 其中说法正确的是 ()
A. 方程 $x^2 + a^3x - 1 = 0$ 是一元三次方程
B. 方程 $4x^3 + 81 = 0$ 是一元三次方程
C. 方程 $x = a^2 - 2a - 3$ 是一元二次方程
D. 方程 $3a + 2x = 5x - \frac{1}{a}$ 是分式方程
3. 用换元法解关于 x 的方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{7}{2}$, 如果设 $\frac{x^2-1}{x} = t$, 那么原方程可化为 ()
A. $2t^2 - 7t + 6 = 0$ B. $2t^2 + 7t - 6 = 0$
C. $t^2 - 7t + 3 = 0$ D. $t^2 + 7t + 3 = 0$
4. 已知关于 x 的一次函数 $y = (k^2 + 1)x + b$, 那么它的图像一定经过 ()
A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第二、三象限 D. 第二、四象限
5. 下列命题中, 真命题是 ()
A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = 0$ B. 若 $\vec{a} = \vec{0}$ 则 $|\vec{a}| = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $-\vec{a} = \vec{0}$

D. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{-a}| = \vec{0}$

6. 已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , $AB \parallel CD$, 那么下列命题中错误的是 ()

A. 如果 $AB = CD$, $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形 B. 如果 $OB = OD$, $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形

C. 如果 $AB = CD$, $OA = OD$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形 D. 如果 $AD = BC$, $OA = OB$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形

二. 填空题 (本大题共 10 题, 每题 3 分, 满分 30 分)

7. 方程 $x^3 - 8 = 0$ 的根是_____.

8. 方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的解是_____.

9. 已知直线 $y = kx + b$ ($k < 0$) 经过点 $(-1, 0)$, 那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.

10. 在分别标有 1、2、3、4、6 的五张卡片中随机抽取 2 张卡片, 那么抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率是_____.

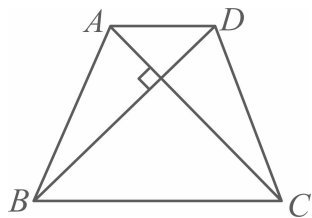
11. 某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元, 如果这三年中每年的增长率相同, 在求这三年中每年的增长率时, 如果设这三年中每年的增长率为 x , 那么可以列出的方程是_____.

12. 已知一个多边形的每个内角都是 160° , 则这个多边形的边数是_____.

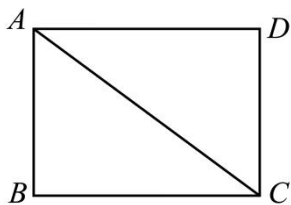
13. 在直角坐标平面内, 如果 $ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合, 已知点 $A(3, 2)$, 那么点 C 的坐标是_____.

14. 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , 已知 $\angle AOB = 120^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, 那么 BD 的长是_____.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, 已知 $AC = m$, $BD = n$, 那么梯形 $ABCD$ 的中位线长是_____ (用含 m, n 的式子表示).



16. 如图, AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, 已知 $AB = 6$, $AC = 10$, 点 E 在边 BC 上, 将矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 翻折, 如果点 B 恰好落在对角线 AC 上, 那么 CE 的长是_____.



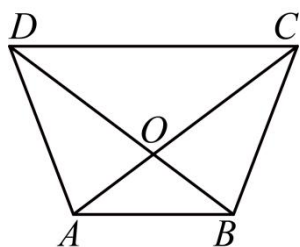
三. (本大题共 8 题, 第 17—18 题每题 5 分; 第 19—22 题每题 7 分; 第 23 题 8 分; 第 24 题 12 分; 满分 58 分)

17. 解方程: $x + \sqrt{2x - 3} = 3$.

18. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$$
.

19. 某街道因路面经常严重积水, 需改建排水系统, 市政公司准备安排甲乙两个工程队承接这项工程, 据评估, 如果甲乙两队合作施工, 那么 12 天可完成; 如果甲队先做 10 天, 剩下的工程由乙队单独承担, 还需 15 天完工. 求甲乙两队单独完成此项工程各需要多少天?

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 与 BD 交于点 O , 且 $OD = OC$.



(1) 求证: $AD = BC$;

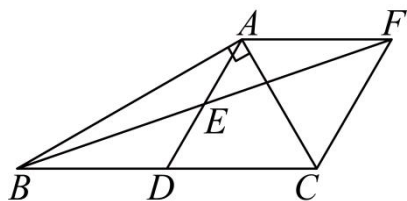
(2) 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 当 $CD = 2AB$ 时, 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$.

21. 某小区为美化小区环境, 购买了两种规格的桂花树苗进行栽种, 其中 A 种桂花树苗的价格为每株 75 元, B 种桂花树苗的价格为每株 100 元, 如果购买这两种桂花树苗共 45 株, 其中 A 种桂花树苗的数量不超过 B 种桂花树苗数量的 2 倍. 设购买 A 种桂花树苗 x 株, 购买 A 、 B 两种桂花树苗的总费用是 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式;

(2) 根据 (1) 的结论, 请你设计一种最省钱的购买方案, 并求出此种方案的总费用.

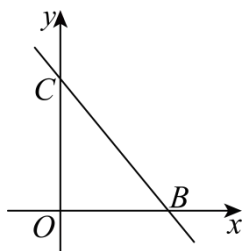
22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F , 连结 CF .



(1) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 如果 $AC = 6$ ，四边形 $ADCF$ 的面积是 30，求 AB 的长.

23. 在平面直角坐标系中，已知直线 $y = kx - k (k < 0)$ 经过定点 P .

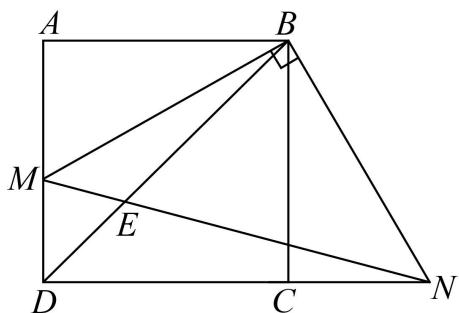


(1) 求点 P 的坐标;

(2) 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的图像分别与 x 轴、 y 轴交于点 B 、 C (如图)，如果直线 $y = kx - k (k \neq 0)$ 将 $\triangle BOC$ 的面积平分，求 k 的值;

(3) 在 (2) 的条件下，将直线 $y = kx - k (k \neq 0)$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l ，点 A 是直线 l 上的点，如果 $AO = AC$ ，求点 A 的坐标.

24. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点，过点 B 作 $BN \perp BM$ 交 DC 的延长线于点 N ，连接 MN 交 BD 于点 E .



(1) 求 $\angle BMN$ 的大小;

(2) 如果 $\angle ABM = 2\angle DNM$ ，求证： $EN = ME + BE$;

(3) 如果 $AB = 1$ ，当 $\angle DBN = \angle DNB$ 时，求 DM 的长.