

上海市宝教院附中 2024 – 2025 学年第二学期七年级期中考试数学试题

考生注意：

- 1、本场考试时间 100 分钟，试卷共 4 页，满分 100 分，答题纸共 4 页。
 - 2、作答前，在答题纸指定位置写上姓名、班级、座位号。将核对后的二维码贴在答题纸指定位置。
 - 3、所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
- 选择题和作图题用 2B 铅笔作答，其余题型用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答。

一、选择题（每题 2 分共 16 分）

1. 下列不等式组中，是一元一次不等式组的是（ ）

A.
$$\begin{cases} x > 2 \\ x - 1 < -3 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ (x - 2)(x + 3) > 0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x + 1 > \frac{1}{x} \end{cases}$$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了对一元一次不等式组的定义，根据一元一次不等式组的定义，需满足：①只含有一个未知数；②所有不等式均为一次整式不等式，据此解答即可。

【详解】解：A、该不等式组是一元一次不等式组，故本选项符合题意；
B、该不等式组中含有两个未知数，不是一元一次不等式组，故本选项不符合题意；
C、该不等式组中未知数的最高次数是 2，不是一元一次不等式组，故本选项不符合题意；
D、该不等式组中的第二个不等式是分式不等式，则它不是一元一次不等式组，故本选项不符合题意；
故选：A.

2. 若 $a > b$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）

A. $a - 3 < b - 3$

B. $3 - a < 3 - b$

C. $ac^2 > bc^2$

D. $a^2 > b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质判断 A，B，取特殊值判断 C，D 即可。

【详解】解：A: $\because a > b$, $\therefore a - 3 > b - 3$, 故 A 错误，不符合题意；
B: $\because a > b$, $\therefore -a < -b$, $\therefore 3 - a < 3 - b$, 故 B 正确，符合题意；

C: 当 $c=0$ 时, $ac^2=bc^2$, 故 C 错误, 不符合题意;

D: $a=1, b=-2$ 时, $a^2 < b^2$, 故 D 错误, 不符合题意;

故选: B

【点睛】 本题考查了不等式的基本性质, 考查特殊值法的应用, 熟练掌握不等式的基本性质是解答此题的关键.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 锐角三角形

D. 等腰直角三角形

【答案】 D

【解析】

【分析】 已知三角形三个内角的度数之比, 可以设三个内角的度数分别为 k° , k° , $2k^\circ$, 根据三角形的内角和等于 180° , 列方程求三个内角的度数, 从而确定三角形的形状. 本题考查了三角形的内角和定理, 熟知三角形内角和是 180° 是解答此题的关键.

【详解】 解: 设三个内角的度数分别为 k° , k° , 则

$$k^\circ + k^\circ + 2k^\circ = 180^\circ,$$

解得 $k^\circ = 45^\circ$,

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 2k^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这个三角形是等腰直角三角形,

故选: D.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 三角形的角平分线是射线

B. 线段垂直平分线上的点到这条线段两端点的距离相等

C. 三角形的高线交于一点

D. 三角形的三条中线交于一点, 这一点有可能在三角形外

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的角平分线、垂直平分线的性质、三角形的中线、高线等知识点, 根据三角形的角平分线、垂直平分线的性质、三角形的中线、高线逐项判断即可.

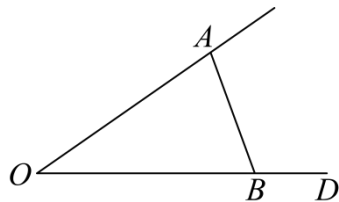
【详解】 解: A. 三角形的角平分线是线段, 故本选项错误, 不符合题意;

B. 线段垂直平分线上的点到这条线段两端点的距离相等, 说法正确, 符合题意;

- C. 锐角三角形和直角三角形的高线交于一点，钝角三角形的高线不相交，故本选项错误，不符合题意；
D. 三角形的三条中线交于一点，这一点不可能在三角形外，故本选项错误，不符合题意.

故选: B.

5. 如图, $\angle AOB = 35^\circ$, $\angle ABD = 110^\circ$, 则 $\angle OAB$ 度数为 ()



- A. 65° B. 70° C. 75° D. 80°

【答案】C

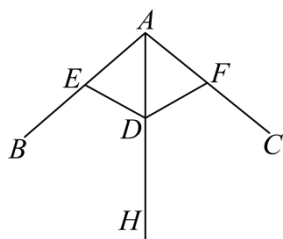
【解析】

【分析】题目主要考查了三角形外角的性质, 根据 $\angle OAB = \angle ABD - \angle AOB$, 得出答案即可. 熟练掌握三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和, 是解题的关键.

【详解】解: $\because \angle AOB = 35^\circ$, $\angle ABD = 110^\circ$, $\angle ABD$ 为 $\triangle AOB$ 的外角,
 $\therefore \angle OAB = \angle ABD - \angle AOB = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$.

故选: C.

6. 某中学数学兴趣小组的同学在学习了三角形相关知识后, 尝试了制作雨伞的实践活动. 康康所在的小组设计了截面如图所示的伞骨结构, 当伞完全打开后, 测得 $AB = AC$, E, F 分别是 AB, AC 的中点, 且 $ED = DF$, 那么 $\triangle AED \cong \triangle AFD$ 的依据是 ()



- A. SAS B. ASA C. AAS D. SSS

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的应用, 解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定定理. 由 E, F 分别是 AB, AC 的中点, 得出 $AE = AF$; 根据三边对应相等, 证明三角形全等即可.

【详解】解: $\because E, F$ 分别是 AB, AC 的中点, $AB = AC$,
 $\therefore AE = AF$,

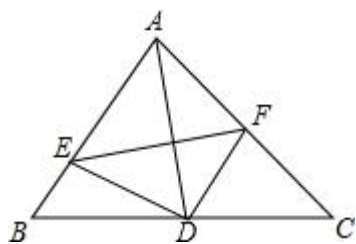
在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} AE = AF \\ ED = DF, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD (\text{SSS})$.

故选: D.

7. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, E, F 分别在边 AB, AC 上 (E, F 不与端点重合), 且 $DE \perp DF$, 则 ().



A. $BE + CF > EF$

B. $BE + CF = EF$

C. $BE + CF < EF$

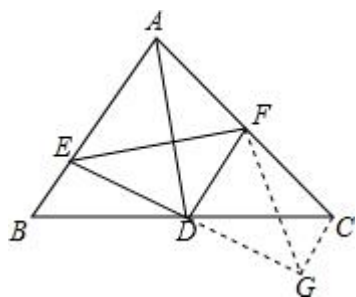
D. $BE + CF$ 与 EF 的长短关系不确定

【答案】A

【解析】

【分析】延长 ED 至点 G , 使 $DG = ED$, 连接 CG, FG , 证明 $\triangle EBD \cong \triangle GCD$, 可得 $GC = BE$, 进而根据三角形三边关系即可得.

【详解】如图, 延长 ED 至点 G , 使 $DG = ED$, 连接 CG, FG ,



$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD = CD$,

又 $\because DE \perp DF, DG = ED$,

$\therefore FD$ 是 EG 的垂直平分线,

$\therefore FG = EF$,

又 $\because \angle EDB = \angle GDC$

$\therefore \triangle EBD \cong \triangle GCD (\text{SAS})$,

$$\therefore GC = BE,$$

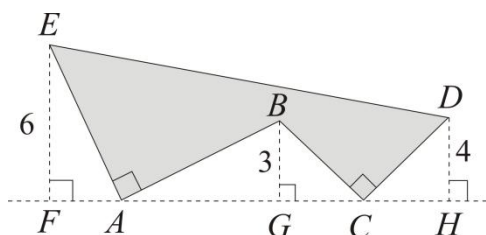
$$\therefore GC + CF > FG,$$

$$\therefore BE + CF > EF.$$

故选 A.

【点睛】 本题考查了三角形中线的性质，垂直平分线的性质，三角形全等的性质与判定，三角形三边关系，证明 $\triangle EBD \cong \triangle GCD$ 是解题的关键.

8. 如图， $AE \perp AB$ 且 $AE = AB$, $BC \perp CD$ 且 $BC = CD$ ，请按照图中标注的数据，计算图中实线所围成的图形的面积 S 是 ()



A. 50

B. 62

C. 65

D. 68

【答案】 A

【解析】

【分析】 由 $AE \perp AB$ ， $EF \perp FH$ ， $BG \perp AG$ ，可以得到 $\angle EAF = \angle ABG$ ，而 $AE = AB$, $\angle EFA = \angle AGB$ ，由此可以证明 $\triangle EFA \cong \triangle ABG$ ，所以 $AF = BG$ ， $AG = EF$ ；同理证得 $\triangle BGC \cong \triangle DHC$ ， $GC = DH$ ， $CH = BG$ ，故 $FH = FA + AG + GC + CH = 3 + 6 + 4 + 3 = 16$ ，然后利用面积的割补法和面积公式即可求出图形的面积.

【详解】 $\because AE \perp AB$ 且 $AE = AB$ ， $EF \perp FH$ ， $BG \perp FH$ ，

$$\therefore \angle EAB = \angle EFA = \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF + \angle AGB = 90^\circ, \quad \angle ABG + \angle BAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ABG,$$

$$\therefore AE = AB, \angle EFA = \angle AGB, \quad \angle EAF = \angle ABG,$$

$$\therefore \triangle EFA \cong \triangle ABG,$$

$$\therefore AF = BG, \quad AG = EF,$$

同理证得 $\triangle BGC \cong \triangle DHC$ ， $GC = DH$ ， $CH = BG$ ，

$$\text{故 } FH = FA + AG + GC + CH = 3 + 6 + 4 + 3 = 16,$$

$$\text{故 } S = \frac{1}{2}(6+4) \times 16 - 3 \times 4 - 6 \times 3 = 50.$$

故选：A.

【点睛】 本题考查的全等三角形的判定的相关知识点，作辅助线是本题的关键.

二、填空题 (每空 3 分，共 30 分)

9. 已知 $2x + y = 5$ ，①用含 x 的代数式表示 y ，则 $y =$ _____；②当 $x = 3$ 时， $y =$ _____；③当 $-2 \leq x \leq 3$ 时，则 y 的取值范围为：_____.

【答案】 ①. $5 - 2x$ ②. -1 ③. $-1 \leq y \leq 9$

【解析】

【分析】 ①由 $2x + y = 5$ 移项即可得到 $y = 5 - 2x$ ，②把 $x = 3$ 代入 $y = 5 - 2x$ 即可得到答案；③利用不等式的性质得到 $-1 \leq 5 - 2x \leq 9$ ，即可得到 y 的取值范围.

【详解】 解：①由 $2x + y = 5$ 得到 $y = 5 - 2x$ ，

②当 $x = 3$ 时， $y = 5 - 2x = 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$ ，

③ $\because -2 \leq x \leq 3$ ，

$\therefore -6 \leq -2x \leq 4$ ，

$\therefore -1 \leq 5 - 2x \leq 9$ ，

$\because y = 5 - 2x$ ，

$\therefore -1 \leq y \leq 9$.

故答案为： $5 - 2x$ ， -1 ， $-1 \leq y \leq 9$

【点睛】 此题考查了不等式的性质的应用、代入法、代数式的值等知识，熟练掌握不等式的性质是解题的关键.

10. 若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + y = 1 + a \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ 的解满足 $x + y < 505$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 2018$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元一次方程组，解一元一次不等式，把方程组中的两个方程相加可推出 $x + y = \frac{a + 2}{4}$ ，则根据题意可得 $\frac{a + 2}{4} < 505$ ，解不等式即可得到答案.

【详解】 解： $\begin{cases} 3x + y = 1 + a \text{ ①} \\ x + 3y = 1 \text{ ②} \end{cases}$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得: } 4x + 4y = a + 2,$$

$$\therefore x + y = \frac{a + 2}{4},$$

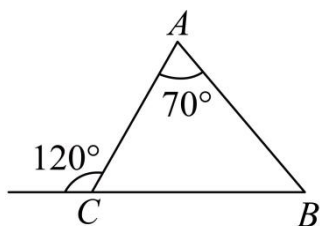
$$\because x + y < 505,$$

$$\therefore \frac{a + 2}{4} < 505,$$

$$\therefore a < 2018,$$

故答案为: $a < 2018$.

11. 根据图中的数据, 可得 $\angle B$ 的度数为_____.



【答案】 50° ## 50 度

【解析】

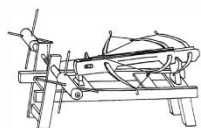
【分析】 本题考查了三角形外角的性质: 三角形的外角等于不相邻的两个内角的和; 据此即可求解.

【详解】 解: $\because \angle A + \angle B = 120^\circ,$

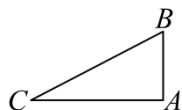
$$\therefore \angle B = 120^\circ - \angle A = 50^\circ;$$

故答案为: 50° .

12. 如图,《周礼考工记》记载:“半矩谓之宣(*xuān*),一宣有半谓之櫛(*zhú*)”意思:“直角的一半的角叫做宣,一宣半的角叫做櫛”. 即: $1 \text{ 宣} = \frac{1}{2} \text{ 矩}$, $1 \text{ 櫛} = \frac{3}{2} \text{ 宣}$ ($1 \text{ 矩} = 90^\circ$). 问: 图①为中国古代强弩图,图②为强弩图部分组件示意图. $\angle A = 1 \text{ 矩}$, $\angle B = 1 \text{ 櫛}$, 则 $\angle C =$ _____度.



图①



图②

【答案】 22.5

【解析】

【分析】 本题考查了新概念的理解, 直角三角形两锐角互余, 角度的计算, 首先求出 $\angle A = 1 \text{ 矩} = 90^\circ$, $\angle B = 1 \text{ 櫛} = \frac{3}{2} \text{ 宣} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \text{ 矩} = 67.5^\circ$, 然后根据直角三角形两锐角互余求解即可.

【详解】 解: 由题意可知,

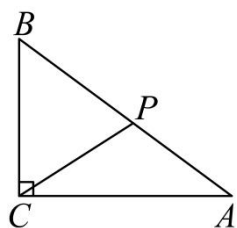
$$\angle A = 1 \text{ 矩} = 90^\circ,$$

$$\angle B = 1 \text{ 櫺} = \frac{3}{2} \text{ 宣} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \text{ 矩} = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

故答案为：22.5.

13. 如图，在三角形 ABC 中， $\angle BCA = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. 点 P 是线段 AB 上的一动点，则线段 CP 的最小值是_____.



【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了垂线段最短，掌握点到直线垂线段最短是解题的关键.

根据题意，当 $CP \perp AB$ 时， CP 的长度最短，由等面积法求高的方法列式求解即可.

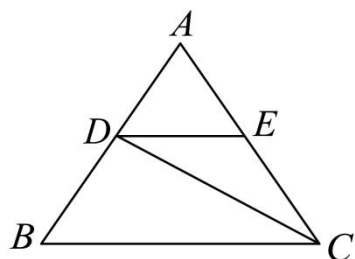
【详解】 解：由垂线段最短可知，当 $CP \perp AB$ 时， CP 的长度最短，

$$\therefore \text{在直角三角形中，由面积公式得：} \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times CP,$$

$$\text{解得 } CP = \frac{12}{5},$$

$$\text{故答案为：} \frac{12}{5}.$$

14. 如图，如果 CD 平分 $\angle ACB$ ， $DE \parallel BC$ ， $\angle EDC = 28^\circ$ ，那么 $\angle AED$ 的度数是_____.



【答案】 56° ## 56度

【解析】

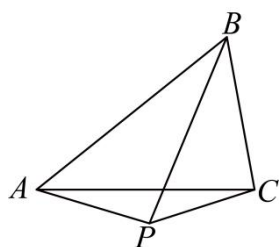
【分析】 此题考查了平行线的性质和角平分线的相关计算，熟练掌握平行线的性质是解题的关键. 根据平行线的性质得到 $\angle BCD = \angle EDC = 28^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle ACB = 2\angle BCD = 56^\circ$ ，再用平行

线的性质即可得到 $\angle AED = \angle ACB = 56^\circ$.

【详解】解： $\because DE \parallel BC$, $\angle EDC = 28^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = \angle EDC = 28^\circ$,
 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$,
 $\therefore \angle ACB = 2\angle BCD = 56^\circ$,
 $\because DE \parallel BC$,
 $\therefore \angle AED = \angle ACB = 56^\circ$.

故答案为： 56°

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 8cm^2 , BP 为 $\angle ABC$ 的角平分线， AP 垂直 BP 于点 P , 则 $\triangle PBC$ 的面积为 $\underline{\hspace{1cm}}\text{cm}^2$.

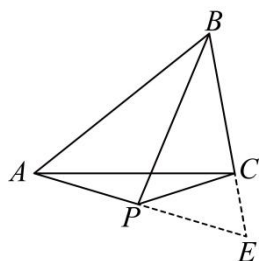


【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质. 延长 AP 交 BC 于 E , 根据全等三角形的性质得到 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BEP}$, $AP = PE$, 得到 $\triangle APC$ 和 $\triangle CPE$ 等底同高，求得 $S_{\triangle APC} = S_{\triangle PCE}$, 设 $\triangle ACE$ 的面积为 m , 于是得到结论.

【详解】解： 延长 AP 交 BC 于 E ,



$\because AP$ 垂直 $\angle ABC$ 的平分线 BP 于 P , $\angle ABP = \angle EBP$,
又知 $BP = BP$, $\angle APB = \angle BPE = 90^\circ$,
 $\therefore$ 在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle BEP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle EBP \\ BP = BP \\ \angle APB = \angle BPE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle BEP (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BEP}, \quad AP = PE,$$

$\therefore \triangle APC$ 和 $\triangle CPE$ 等底同高,

$$\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle PCE},$$

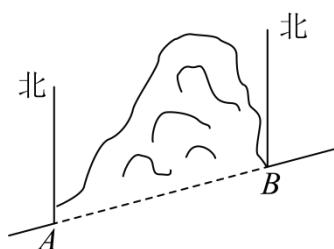
设 $\triangle ACE$ 的面积为 m ,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} = 8 + m,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABE} - \frac{1}{2} S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} (8 + m) - \frac{1}{2} m = 4 (\text{cm}^2).$$

故答案为: 4.

16. 如图所示, 修高速公路需开凿隧道, 为节省时间, 现从山的两侧 A 、 B 处同时开工. 如果在 A 处测得隧道的走向是北偏东 75° , 那么在 B 处应按_____方向开工, 才能使隧道准确接通.



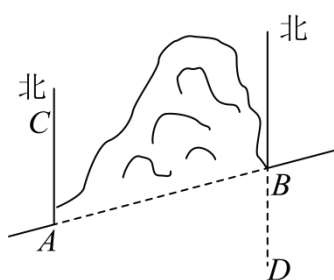
【答案】 南偏西 75°

【解析】

【分析】 本题考查平行线的性质和方向角在实际生活中的运用, 解答此类题需要从运动的角度, 正确画出方位角, 利用平行线的性质解答.

如图, 根据根据平行线的性质得出 $\angle ABD = \angle CAB = 75^\circ$, 再根据方位角的概念, 表示出方位角, 即可求解.

【详解】 解: 如图,



由题意得: $AC \parallel BD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CAB = 75^\circ,$$

$\therefore$ 按南偏西 75° 的方向开工.

故答案为: 南偏西 75° .

三、计算题 (共 20 分)

17. 解不等式: $3 - x < 2x + 6$

【答案】 $x > -1$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式, 解题的关键是掌握解一元一次不等式的一般步骤. 根据解一元一次不等式的步骤即可解得答案.

【详解】 解: 移项得: $-x - 2x < +6 - 3$,

合并同类项得: $-3x < 3$,

两边同时除以 -3 得: $x > -1$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 4 - 2x > x - 5 \\ x + 1 \leq 3x - 1 \end{cases}$$

【答案】 $1 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组, 正确求解是解题的关键; 分别求出每个不等式的解集, 再求出其公共部分即可.

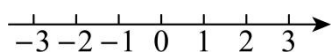
【详解】 解:
$$\begin{cases} 4 - 2x > x - 5 \text{ ①} \\ x + 1 \leq 3x - 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①得: $x < 3$;

解不等式②得: $x \geq 1$;

则不等式组的解集为: $1 \leq x < 3$.

19. 解不等式组, 并在数轴上表示解集
$$\begin{cases} 6 - 3x > -2(x - 2) \text{ ①} \\ \frac{x - 1}{3} - 1 < x \text{ ②} \end{cases}$$



【答案】 $-2 < x < 2$, 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组, 在数轴上表示不等式的解集, 按照解不等式的一般步骤, 先分

别求出两个不等式的解集，再找出它们的公共部分即为不等式组的解集，然后将其在数轴上表示出来即可.

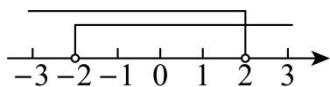
【详解】解：
$$\begin{cases} 6-3x > -2(x-2) \text{ ①} \\ \frac{x-1}{3}-1 < x \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式 ① 得： $x < 2$,

解不等式 ② 得： $x > -2$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为： $-2 < x < 2$,

该不等式组的解集在数轴上表示如图所示：



20. a 、 b 、 c 为三角形的三边，化简： $|a-b-c|+|c-b+a|$

【答案】 $2c$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形三边的不等关系：任两边的和大小第三边，任两边的差小于第三边，化简绝对值等知识；根据三角形三边关系确定 $a-b-c$ ， $c-b+a$ 的符号，由绝对值的性质及整式加减法则即可化简.

【详解】 解： $\because a$ 、 b 、 c 为三角形的三边，

$$\therefore a < b+c, \quad a+c > b,$$

$$\text{即 } a-b-c < 0, \quad c-b+a > 0,$$

$$\therefore |a-b-c|+|c-b+a|$$

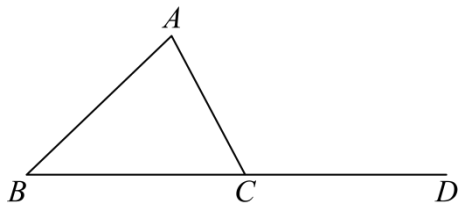
$$= -(a-b-c)+c-b+a$$

$$= -a+b+c+c-b+a$$

$$= 2c.$$

四、解答题 (共 34 分)

21. 尺规作图：在图中画出 BC 边上的中线 AF 、及 $\angle ACD$ 的平分线 CE



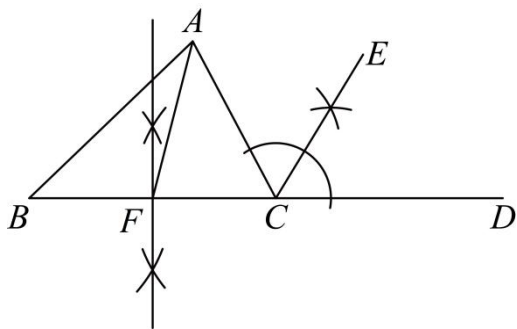
【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中线的概念，尺规作图---作线段的垂直平分线和角的平分线，熟练掌握尺规作图的步骤是解题的关键.

作线段 BC 的垂直平分线与线段 BC 的交点即为线段 BC 的中点，连接中点与点 A 即为中线 AF ；以 C 为圆心，适当长为半径画弧，交 CA, CD 于两点，分别以该两交点为圆心，大于两交点之间的距离的一半长为半径画弧，两弧在 $\angle ACD$ 内部交于一点，以点 C 为顶点，过该交点作射线，即为所求.

【详解】 解：如图，中线 AF ，射线 CE 即为所求：



22. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$ ，且 c 是 $\triangle ABC$ 中最长的边，求 c 的取值范围.

【答案】 $5 < c < 9$

【解析】

【分析】 由 $a^2+b^2=10a+8b-41$ ，得 a, b 的值，然后利用三角形的三边关系求得 c 的取值范围即可.

【详解】 解： $\because$ 满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$,

$$\therefore a^2-10a+25+b^2-8b+16=0,$$

$$\therefore (a-5)^2 + (b-4)^2 = 0,$$

$$\therefore (a-5)^2 \geq 0, (b-4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a-5=0, b-4=0,$$

$$\therefore a=5, b=4;$$

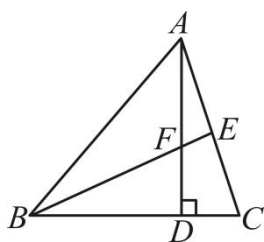
$$\therefore 5-4 < c < 5+4,$$

$$\therefore c \text{ 是最长边},$$

$$\therefore 5 < c < 9.$$

【点睛】 考查了配方法的应用、非负数的性质及三角形的三边关系，解题的关键是对方程的左边进行配方，难度不大.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， BE 是角平分线，它们相交于点 F ， $\angle BAD = 44^\circ$ ， $\angle DAC = 20^\circ$ ，求 $\angle AFE$ 和 $\angle BEC$ 的度数.



【答案】 $\angle AFE = 67^\circ$, $\angle BEC = 87^\circ$

【解析】

【分析】 本题主要考查与角平分线有关的三角形内角和定理，三角形外角和性质的综合，理解垂线的定义，角平分线的定义，掌握三角形内角和定理，外角和性质是解题的关键.

根据三角形内角和定理，垂线和角平分线的定义可得 $\angle ABC = 46^\circ$, $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = 23^\circ$, 根据三角形外角和的性质可得 $\angle AFE = \angle ABF + \angle BAD$, $\angle BEC = \angle AFE + \angle DAC$, 由此即可求解.

【详解】 解: $\because AD$ 是高, $\angle BAD = 44^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle BAD = 46^\circ,$$

$\because BE$ 是角平分线,

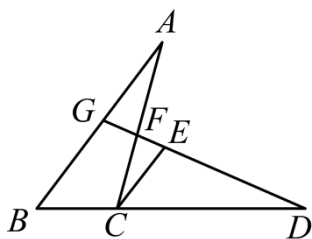
$$\therefore \angle ABF = \frac{1}{2}\angle ABC = 23^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ABF + \angle BAD = 23^\circ + 44^\circ = 67^\circ,$$

$\because \angle DAC = 20^\circ$,

$$\therefore \angle BEC = \angle AFE + \angle DAC = 67^\circ + 20^\circ = 87^\circ.$$

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 延长线上一点, 满足 $CD = BA$, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 且 $CE = BC$, 连接 DE 并延长, 分别交 AC , AB 于点 F , G .



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DCE$;

(2) 若 $BD = 12$, $AB = 2CE$, 求 BC 的长度.

【答案】 (1) 见解析 (2) 4

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质, 关键是掌握全等三角形的判定和性质.

(1) 根据 SAS 证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 全等即可;

(2) 证明 $AB = 2BC = CD$ ，再由 $BD = BC + CD = 12$ 可得结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \angle B = \angle ECD,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle B = \angle ECD, \\ BC = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCE (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

解: $\because AB = 2CE$, $CE = BC$,

$$\therefore AB = 2BC,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore CD = 2BC,$$

又 $BC + CD = BD = 12$

$$\therefore BC + 2BC = 12$$

$$\therefore BC = 4.$$

25. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转, 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .

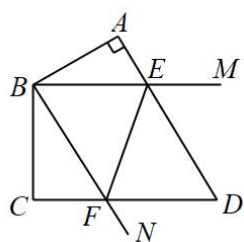


图1

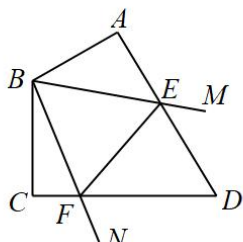


图2

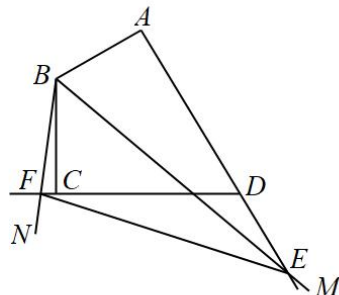


图3

(1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图 1), 求证: $AE + CF = EF$.

(2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时, 在图 2 种情况下, 求证: $AE + CF = EF$.

(3) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时, 在图 3 种情况下上述结论是否成立? 若成立, 请给予证明;

若不成立，线段 AE ， CF ， EF 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 不成立， $EF = AE - CF$

【解析】

【分析】(1) 首先利用 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，得 $\angle ABE = \angle CBF$ ， $BE = BF$ ，再证明 $\triangle BEF$ 是等边三角形，且 $\angle ABE = \angle CBF = 30^\circ$ ，得 $AE = \frac{1}{2}BE$ ， $CF = \frac{1}{2}BF$ ，可证明结论；

(2) 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 顺时针旋转 120° ，得 $\triangle BCG$ ，利用 SAS 证明 $\triangle GBF \cong \triangle EBF$ ，得 $FG = EF$ ，可得结论；

(3) 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 顺时针旋转 120° ，得 $\triangle BCG$ ，同理利用 SAS 证明 $\triangle BFG \cong \triangle BFE$ ，得 $GF = EF$ ，可得结论.

【小问 1 详解】

$\because AB \perp AD, BC \perp CD$,

$\therefore \angle A = \angle C$,

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle A = \angle C \\ AE = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (\text{SAS})$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBF, BE = BF$,

$\because \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBF = 30^\circ$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}BE, CF = \frac{1}{2}BF$,

$\because \angle MBN = 60^\circ, BE = BF$

$\therefore \triangle BEF$ 为等边三角形,

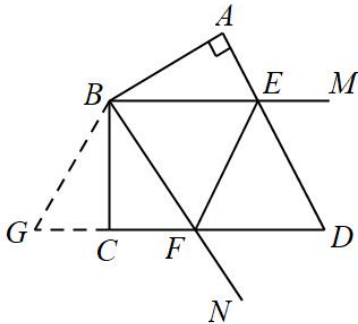
$\therefore BE = BF = EF$,

$\therefore AE = CF = \frac{1}{2}EF$,

$\therefore AE + CF = EF$;

【小问 2 详解】

如图，将 $Rt\triangle ABE$ 顺时针旋转 120° ，得 $\triangle BCG$ ，



$$\therefore BE = BG, AE = CG, \angle A = \angle BCG,$$

$$\because AB = BC, \angle ABC = 120^\circ,$$

$\therefore$ 点 A 与点 C 重合,

$$\because \angle A = \angle BCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCG + \angle BCF = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 G 、 C 、 F 三点共线,

$$\because \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ, \angle ABE = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle GBF = 60^\circ,$$

在 $\triangle GBF$ 与 $\triangle EBF$ 中,

$$\begin{cases} BG = BE \\ \angle GBF = \angle EBF, \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GBF \cong \triangle EBF (\text{SAS}),$$

$$\therefore FG = EF,$$

$$\therefore EF = AE + CF;$$

【小问 3 详解】

不成立, $EF = AE - CF$, 理由如下:

如图，将 $Rt\triangle ABE$ 顺时针旋转 120° ，得 $\triangle BCG$ ，

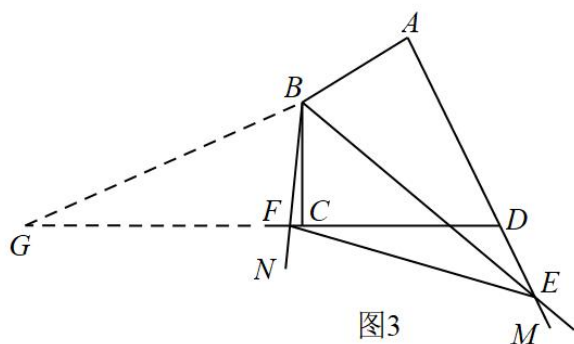


图3

$$\therefore AE = CG,$$

由 (2) 同理得, 点 C 、 F 、 G 三点共线,

$$\because AB = BC, \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 与点 } C \text{ 重合, } \angle ABE = \angle CBG,$$

$$\therefore BG = BE,$$

$$\because \angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CBG + \angle CBE = \angle GBE = 120^\circ,$$

$$\because \angle MBN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GBF = 60^\circ,$$

在 $\triangle BFG$ 与 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} BG = BE \\ \angle GBF = \angle EBF, \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFG \cong \triangle BFE (\text{SAS}),$$

$$\therefore GF = EF,$$

$$\therefore EF = AE - CF.$$

【点睛】本题是几何变换综合题, 主要考查了全等三角形的判定与性质, 旋转的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质等知识, 熟练掌握半角模型的处理策略是解题的关键.