

2024 学年第二学期七年级质量调研

数学样卷

(满分 100 分，考试时间 90 分钟)

考生注意：

1. 本试卷含四个大题，共 26 题；
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出推理或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 5 题，每题 3 分，满分 15 分) 【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列不等式中属于一元一次不等式的是 ()

- A. $xy \leq 0$ B. $2y - 1 < 2$ C. $x - y \leq 2$ D. $x^2 \geq 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元一次不等式，根据一元一次不等式的定义：只含有一个未知数，且未知数的次数是 1 的不等式是一元一次不等式，对各选项逐一分析即可求解，掌握一元一次不等式的定义是解题的关键.

【详解】解：A. 不等式 $xy \leq 0$ 含有两个未知数，且次数为 2，不一元一次不等式，该选项不合题意；

B. 不等式 $2y - 1 < 2$ 是一元一次不等式，该选项符合题意；

C. 不等式 $x - y \leq 2$ 含有两个未知数，不一元一次不等式，该选项不合题意；

D. 不等式 $x^2 \geq 0$ 含有一个未知数，但次数为 2，不一元一次不等式，该选项不合题意；

故选：B.

2. 下列说法中，正确的是 ()

- A. 两直线平行，同旁内角相等
- B. 相等的角是对顶角
- C. 在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线
- D. 在同一平面上，如果两条直线都垂直于第三条直线，那么这两条直线一定相交

【答案】C

【解析】

【详解】本题考查了平行线的性质、平面中两条直线的位置关系、垂线的性质及对顶角的概念，掌握相关结论是解题关键.

【分析】A: 两直线平行，同旁内角互补；故本选项说法错误；

B: 对顶角相等，但相等的角不一定是对顶角（如平行线的同位角）；故本选项说法错误；

C: 平面内，过一点（无论点在直线上还是直线外）有且仅有一条直线与已知直线垂直，此为垂线唯一性定理；故本选项说法正确；

D: 同一平面上，若两直线均垂直于第三条直线，则这两条直线平行，永不相交；故本选项说法错误；

故选：C

3. 如果一个三角形的两边长分别为 2cm 和 7cm，那么这个三角形第三边的长可能是（ ）

A. 2cm

B. 4cm

C. 5cm

D. 6cm

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查三角形的三边关系，解题的关键是掌握三角形的任意两边之差小于第三边，任意两边之和大于第三边. 根据三角形的三边关系进行判断即可.

【详解】解：由题意，得： $7 - 2 < \text{第三边} < 7 + 2$ ，

$\therefore 5\text{cm} < \text{第三边} < 9\text{cm}$ ；

故选 D.

4. 如果 ABC 是等腰三角形， $\angle A = 50^\circ$ ，那么 $\angle C$ 的度数不可能是（ ）

A. 50°

B. 65°

C. 75°

D. 80°

【答案】C

【解析】

【分析】题考查了三角形内角和定理，等边对等角. 根据等腰三角形的性质，分情况讨论 $\angle A$ 为顶角或底角，结合三角形内角和定理，排除不可能的情况.

【详解】解：当 $\angle A$ 为顶角时：

$\angle B$ 和 $\angle C$ 相等，由内角和定理得： $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ ；

当 $\angle A$ 为底角时：另一底角也为 50° ，

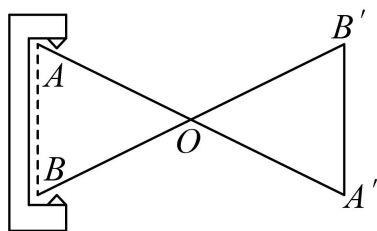
当 $\angle C$ 为顶角： $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$ ；

当 $\angle C$ 也为底角： $\angle C = 50^\circ$ ；

综上， $\angle C$ 的度数不可能是 75° ，

故选：C.

5. 如图，工人师傅设计了一种测零件内径 AB 的卡钳，卡钳交叉点 O 为 AA' 、 BB' 的中点，只要量出 $A'B'$ 的长度，就可以知道该零件内径 AB 的长度. 依据的数学基本事实是 ()



- A. 两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等 B. 两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等
C. 三边分别相等的两个三角形全等 D. 两点之间线段最短

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定与性质. 先根据中点的定义，得出 $OA = OA'$ ， $OB = OB'$ ，再根据对顶角相等得到 $\angle AOB = \angle A'OB'$ ，从而证得 $\triangle AOB$ 和 $\triangle A'OB'$ 全等即可. 正确运用三角形全等的判定定理是解题的关键.

【详解】解：∵点 O 为 AA' 、 BB' 的中点，

$$\therefore OA = OA', \quad OB = OB',$$

由对顶角相等得 $\angle AOB = \angle A'OB'$,

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle A'OB'$ 中，

$$\begin{cases} OA = OA' \\ \angle AOB = \angle A'OB', \\ OB = OB' \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'OB' (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = A'B',$$

即只要量出 $A'B'$ 的长度，就可以知道该零件内径 AB 的长度，

故选：B.

二、填空题 (本大题共 15 题，每题 2 分，满分 30 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

6. “ a 与 8 的和大于 3” 用适当的不等式可以表示为_____.

【答案】 $a + 8 > 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了列不等式，先表示出 a 与 8 的和，再把这个和用大于号与 3 连接起来即可.

【详解】解：“ a 与 8 的和大于 3”用适当的不等式可以表示为 $a+8>3$,

故答案为: $a+8>3$.

7. 如果 $x>y$, 那么 $1-3x$ _____ $1-3y$. (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ” 或 “ $\geq$ ” 或 “ $\leq$ ”)

【答案】 $<$

【解析】

【分析】本题考查了不等式的性质，解题的关键是熟练掌握不等式的性质.

根据不等式的性质求解即可.

【详解】解: $\because x>y$,

$$\therefore -3x<-3y,$$

$$\therefore 1-3x<1-3y,$$

故答案为: $<$.

8. 不等式 $\frac{5-3x}{2} \geq -1$ 的最大整数解是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了求不等式的整数解，熟练掌握不等式的解法是解题的关键. 按照去分母，移项，合并同类项，系数化为 1 的步骤求出不等式的解集即可得到答案.

【详解】解: $\frac{5-3x}{2} \geq -1$

$$\text{去分母得: } 5-3x \geq -2,$$

$$\text{移项得: } -3x \geq -2-5,$$

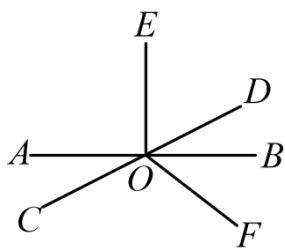
$$\text{合并同类项得: } -3x \geq -7,$$

$$\text{系数化为 1 得: } x \leq \frac{7}{3},$$

$\therefore$ 不等式 $\frac{5-3x}{2} \geq -1$ 的最大整数解是 2.

故答案为: 2.

9. 如图，直线 AB 、 CD 相交于点 O ， OD 平分 $\angle EOF$ ， $OE \perp AB$. 如果 $\angle BOF = 28^\circ$ ，那么 $\angle COF =$ _____ $^\circ$.



【答案】 121

【解析】

【分析】 本题主要考查了几何图形中角度的计算，角平分线的定义，垂线的定义，先由垂线的定义得到 $\angle BOE = 90^\circ$ ，则可求出 $\angle EOF$ 的度数，再由角平分线的定义得到 $\angle DOF$ 的度数，最后根据平角的定义可得答案.

【详解】 解： $\because OE \perp AB$,

$$\therefore \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BOF = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle BOE + \angle BOF = 118^\circ,$$

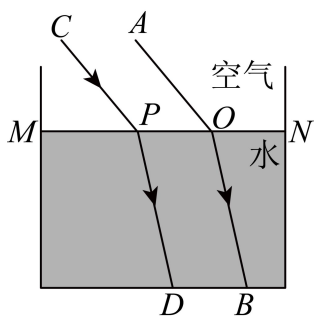
$$\because OD \text{ 平分 } \angle EOF,$$

$$\therefore \angle DOF = \frac{1}{2} \angle EOF = 59^\circ,$$

$$\therefore \angle COF = 180^\circ - \angle DOF = 121^\circ,$$

故答案为： 121.

10. 光从空气斜射入水中时会发生折射现象，在空气中平行的光线，因同种介质折射率相同，在水中仍保持平行. 如图，如果 $\angle CPM = 50^\circ$ ， $\angle AOB = 153^\circ$ ，那么 $\angle MPD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

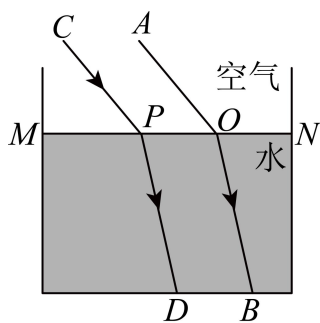


【答案】 103

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质. 由 $AO \parallel CP$ 得到 $\angle CPM = \angle AOM = 50^\circ$ ，则 $\angle BOM = 153^\circ - \angle AOM = 103^\circ$ ，由 $OB \parallel PD$ 得到 $\angle DPM = \angle BOM = 103^\circ$.

【详解】 解： 如图，由题意得 $AO \parallel CP$ ， $OB \parallel PD$ ，



由题意得 $AO \parallel CP$ ， $OB \parallel PD$ ，

$$\therefore \angle CPM = \angle AOM = 50^\circ, \quad \angle DPM = \angle BOM,$$

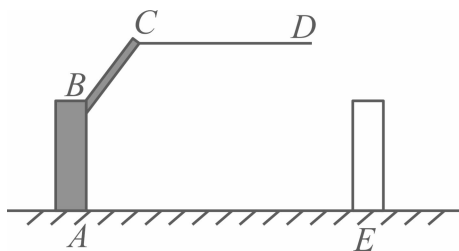
$$\therefore \angle AOB = 153^\circ,$$

$$\therefore \angle BOM = 153^\circ - \angle AOM = 103^\circ,$$

$$\therefore \angle DPM = \angle BOM = 103^\circ.$$

故答案为：103.

11. 某小区车库门口需要用到曲臂直杆道闸，模型如图所示. 如果 $BA \perp AE$ ， $CD \parallel AE$ ， $\angle ABC = 143^\circ$ ，那么 $\angle BCD =$ _____ $^\circ$.



【答案】127

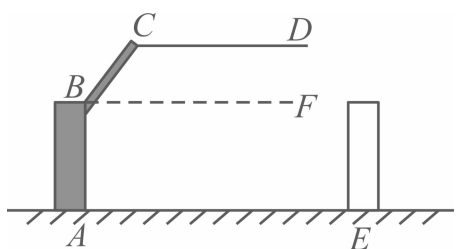
【解析】

【分析】本题考查了平行线的判定和性质、垂直的定义、角的和差等知识；

过点 B 作 $BF \parallel AE$ ，如图，根据平行线的性质和垂直的定义可得 $\angle ABF = 90^\circ$ ，进而可得

$\angle CBF = 143^\circ - 90^\circ = 53^\circ$ ，证明 $CD \parallel BF$ 即可得解.

【详解】解：过点 B 作 $BF \parallel AE$ ，如图，



$$\because BA \perp AE,$$

$$\therefore BA \perp BF, \text{ 即 } \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\because \angle ABC &= 143^\circ, \\ \therefore \angle CBF &= 143^\circ - 90^\circ = 53^\circ, \\ \because CD &\parallel AE, \\ \therefore CD &\parallel BF, \\ \therefore \angle BCD + \angle CBF &= 180^\circ, \\ \therefore \angle BCD &= 180^\circ - \angle CBF = 127^\circ;\end{aligned}$$

故答案为：127.

12. 在 ABC 中, 如果 $\angle A = 36^\circ, \angle B = 44^\circ$, 那么 ABC 是_____三角形. (填“锐角”、“直角”或“钝角”)

【答案】钝角

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理, 三角形的分类, 根据三角形内角和定理求出 $\angle C$ 的度数即可得到答案.

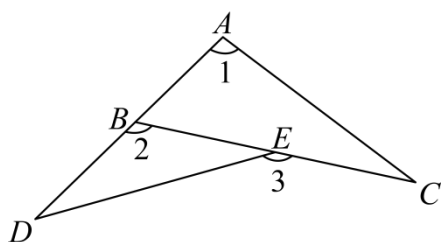
【详解】解: $\because$ 在 ABC 中, $\angle A = 36^\circ, \angle B = 44^\circ$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore \angle C = 100^\circ,$$

$\therefore ABC$ 是钝角三角形,

故答案为: 钝角.

13. 如图, 将 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 按由小到大的顺序可以排列为_____.



【答案】 $\angle 1 < \angle 2 < \angle 3$

【解析】

【分析】本题考查了三角形的外角性质, 熟知三角形的一个外角大于和它不相邻的任一个内角是解题的关键;

根据三角形的外角性质解答即可.

【详解】解: $\because \angle 2$ 是 ABC 的外角,

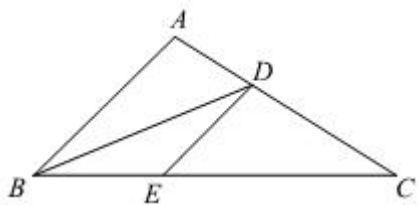
$$\therefore \angle 1 < \angle 2,$$

同理 $\angle 2 < \angle 3$,

$\therefore \angle 1 < \angle 2 < \angle 3$;

故答案为: $\angle 1 < \angle 2 < \angle 3$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D , $DE \parallel AB$, 交 BC 于点 E , $BE = 2$, 则 DE 的长是 ____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 根据角平分线的定义得到 $\angle ABD = \angle CBD$, 根据平行线的性质得到 $\angle ABD = \angle BDE$, 等量代换得到 $\angle DBE = \angle BDE$, 得到 $DE = BE$, 于是得到结论.

【详解】 解: $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

$\because DE \parallel AB$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDE$,

$\therefore \angle DBE = \angle BDE$,

$\therefore DE = BE$,

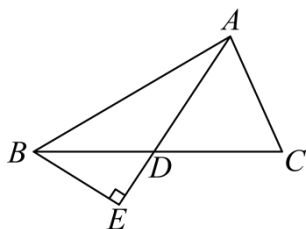
$\because BE = 2$,

$\therefore DE = 2$.

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查了角平分线的定义, 平行线的性质, 等角对等边, 求得 $BE = DE$ 是解题的关键.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, 作 $BE \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E . 已知 $AC = CD$, $AE = 9$, 那么 $AD =$ ____.

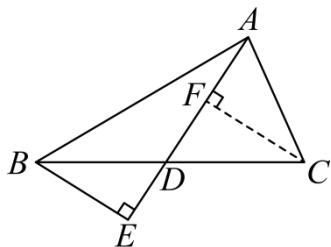


【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定与性质、等腰三角形的三线合一，通过作辅助线，构造全等三角形是解题关键. 过点 C 作 $CF \perp AE$ 于点 F ，先证出 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$ ，根据全等三角形的性质可得 $DE = DF$ ，再根据等腰三角形的三线合一可得 $AF = DF$ ，然后根据线段的和差求解即可得.

【详解】解：如图，过点 C 作 $CF \perp AE$ 于点 F ，



$$\therefore \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\because BE \perp AD,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ,$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，

$$\therefore BD = CD,$$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle E = \angle CFD = 90^\circ \\ \angle BDE = \angle CDF \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DF,$$

又 $\because AC = CD$ ， $CF \perp AE$ ，

$$\therefore AF = DF,$$

$$\therefore DE = DF = AF,$$

$$\because AF + DF + DE = AE = 9,$$

$$\therefore DE = DF = AF = 3,$$

$$\therefore AD = AF + DF = 6,$$

故答案为：6.

16. 如果不等式组 $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq a \end{cases}$ 的整数解有四个，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $1 \leq a < 2$

【解析】

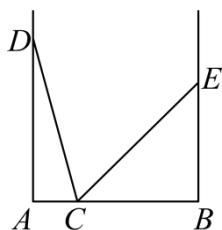
【分析】 本题主要考查了根据不等式组的解集情况求参数，不等式组的整数解有四个，那么不等式组的整数解为 $-2, -1, 0, 1$ ，据此可得答案.

【详解】 解： $\because$ 不等式组 $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq a \end{cases}$ 的整数解有四个，

$$\therefore 1 \leq a < 2,$$

故答案为： $1 \leq a < 2$.

17. 如图，在一个房间内，一把长1.5米的梯子 CD 斜靠在墙上，此时梯子与地面夹角为 75° ，如果保持梯子底端位置不变，将梯子顶端靠在对面墙上（即变为 CE ），此时梯子与地面夹角为 45° ，那么 D 、 E 两点间的距离是_____米.



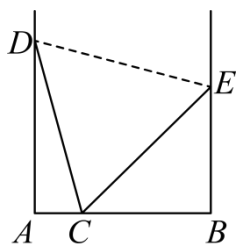
【答案】 1.5

【解析】

【分析】 本题考查等边三角形的判定与性质，解题关键是通过角度计算和梯子长度不变，判定 $\triangle DCE$ 为等边三角形.

连接 DE ，先计算出 $\angle DCE = 60^\circ$ ，结合梯子长度不变得 $CD = CE$ ，判定 $\triangle DCE$ 是等边三角形，再利用等边三角形三边相等的性质，得出 $DE = CD = 1.5$ 米，从而求出 D 、 E 两点间距离.

【详解】 解： 连接 DE ，



$$\because \angle ACD = 75^\circ, \angle BCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

$\because$ 梯子长度不变，

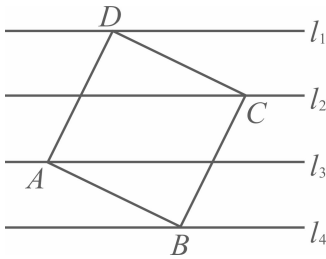
$$\therefore CD = CE = 1.5 \text{ 米},$$

$\therefore \triangle DCE$ 是等边三角形，

$$\therefore DE = CD = 1.5 \text{ 米}.$$

故答案为1.5.

18. 如图, 已知直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$, 且相邻两条平行直线间的距离均为 d . 正方形 $ABCD$ 的四个顶点分别位于直线 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 上, 如果 $S_{\text{正方形}ABCD} = 20$, 那么 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 求平方根的方法解方程, 过点 A 作 $AH \perp l_1$ 于 H , 过点 C 作 $CG \perp l_1$ 于 G , 延长 HA , GC 分别交 l_4 于 E 、 F , 可证明 $HE \perp l_4$, $GF \perp l_4$, 则可证明

$\triangle FCB \cong \triangle GDC$ (AAS) 得到 $DG = CF$, $BF = CG$, 再由直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$, 且相邻两条平行直线间的距离均为 d , 推出 $DG = 2d$, $BF = d$, 同理可得 $DH = AE = d$, $AH = BE = 2d$, 根据

$$S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADH} + S_{\triangle CDG} + S_{\triangle BCF} \text{ 建立方程求解即可}.$$

【详解】解: 如图所示, 过点 A 作 $AH \perp l_1$ 于 H , 过点 C 作 $CG \perp l_1$ 于 G , 延长 HA , GC 分别交 l_4 于 E 、 F ,

$$\therefore l_1 \parallel l_4,$$

$$\therefore HE \perp l_4, \quad GF \perp l_4,$$

由正方形的性质可得 $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = BC$,

$$\text{又} \because \angle CGD = \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC + \angle FCB = \angle GCD + \angle FCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle GCD,$$

$$\therefore \triangle FCB \cong \triangle GDC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DG = CF, \quad BF = CG,$$

$\therefore$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$, 且相邻两条平行直线间的距离均为 d ,

$$\therefore CF = 2d, \quad CG = d,$$

$$\therefore DG = 2d, BF = d,$$

同理可证明 $\triangle ADH \cong \triangle BAE$,

$$\therefore DH = AE = d, AH = BE = 2d,$$

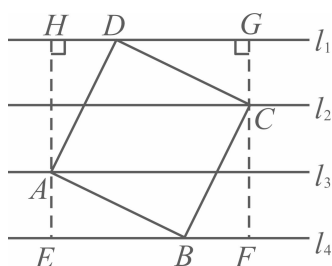
$$\therefore EF = HG = d + 2d = 3d,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADH} + S_{\triangle CDG} + S_{\triangle BCF},$$

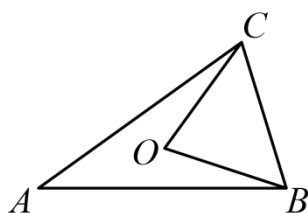
$$\therefore 3d \cdot 3d = 20 + 4 \times \frac{1}{2}d \cdot 2d,$$

$$\therefore d = 2 \text{ 或 } d = -2 \text{ (舍去)},$$

故答案为: 2.



19. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 各边垂直平分线的交点, 连接 BO 、 CO . 如果 $\angle BOC = 72^\circ$, 那么 $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

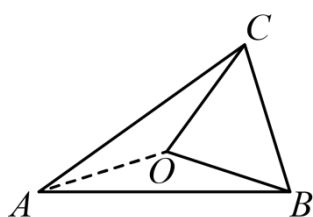


【答案】 36

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质, 等边对等角, 三角形内角和定理, 连接 OA , 由线段垂直平分线的性质得到 $OA = OB = OC$, 则由等边对等角可得 $\angle OAC = \angle OCB$, $\angle OAB = \angle OBA$, 利用三角形内角和定理可得 $\angle OBC + \angle OCB = 108^\circ$, 则可求出 $\angle OAC + \angle OCB + \angle OAB + \angle OBA = 72^\circ$, 进而得到 $\angle OAC + \angle OAB = 36^\circ$, 即 $\angle BAC = 36^\circ$.

【详解】 解: 如图所示, 连接 OA ,

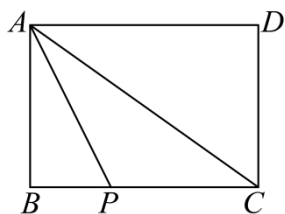


$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 各边垂直平分线的交点,

$$\begin{aligned}
&\therefore OA = OB = OC, \\
&\therefore \angle OAC = \angle OCB, \quad \angle OAB = \angle OBA, \\
&\therefore \angle BOC = 72^\circ, \\
&\therefore \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ - \angle BOC = 108^\circ, \\
&\therefore \angle OBC + \angle OCB + \angle OAC + \angle OCB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ, \\
&\therefore \angle OAC + \angle OCB + \angle OAB + \angle OBA = 72^\circ, \\
&\therefore 2\angle OAC + 2\angle OAB = 72^\circ, \\
&\therefore \angle OAC + \angle OAB = 36^\circ, \text{ 即 } \angle BAC = 36^\circ,
\end{aligned}$$

故答案为：36.

20. 如图, 长方形纸片 $ABCD$, 点 P 为 BC 边上的动点. 点 C 关于直线 AP 的对称点为 C' , 连接 AC' 、 CC' . 将长方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠, 点 D 折叠后的落点 D' 恰好位于 $\triangle ACC'$ 的边上. 如果 $\angle DAC = 35^\circ$, 那么 $\angle BAP = \underline{\quad\quad}^\circ$.



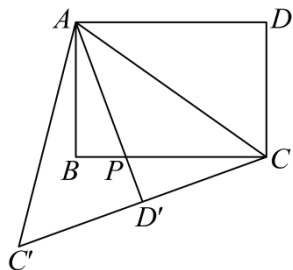
【答案】 20 或 37.5

【解析】

【分析】 本题主要考查了折叠的性质, 轴对称图形的性质, 分点 D' 在 CC' 上, 点 D' 在 AC' 上, 两种情况画出对应的示意图, 讨论求解即可.

【详解】 解: 由长方形的性质可得 $\angle D = \angle BAD = 90^\circ$,

如图所示, 当点 D' 在 CC' 上时,

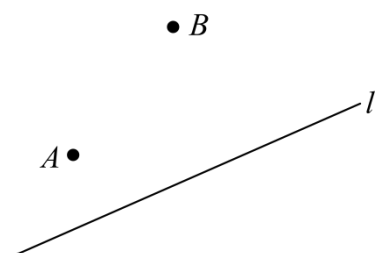


由折叠的性质可得 $\angle D'AC = \angle DAC = 35^\circ$, $\angle AD'C = 90^\circ$;

由轴对称的性质可得 $AP \perp CC'$,

$\therefore A, P, D'$ 三点共线,

府规划在国道 l 上新建一座多功能加油站，既为车辆提供便利，又促进两镇资源互通。如果你是工程师，请解决以下规划问题：



- (1) 公平选址：确定加油站位置 P ，使得加油站到 A 、 B 两镇的距离相等；
- (2) 路径优化：从 A 镇前往 B 镇，需途径加油站加油。确定加油站位置 Q ，使得总路程最短：请分别作出上述两种情况下的加油站 P 、 Q 的位置。（要求：尺规作图，保留作图痕迹并写出结论，不用证明）

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了垂线和线段垂直平分线的尺规作图，线段的尺规作图，线段垂直平分线的性质，轴对称最短路径问题，熟知相关知识是解题的关键。

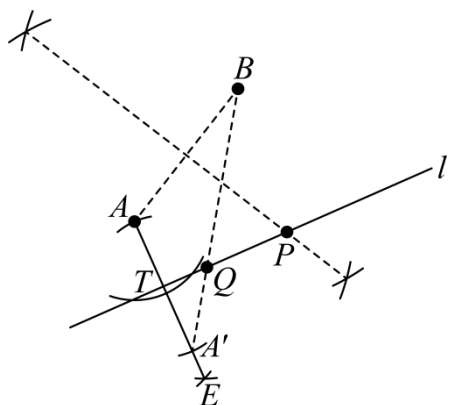
- (1) 作线段 AB 的垂直平分线交直线 l 于 P ，则点 P 即为所求；
- (2) 过点 A 作 $AE \perp l$ 于 T ，在 AE 上截取 $TA' = TA$ ，连接 $A'B$ 交直线 l 于 Q ，则点 Q 即为所求。

【小问 1 详解】

如图所示，点 P 即为所求；

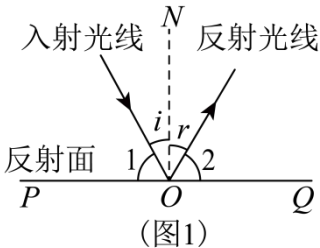
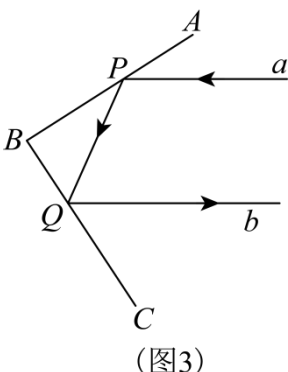
【小问 2 详解】

解：如图所示，点 Q 即为所求；



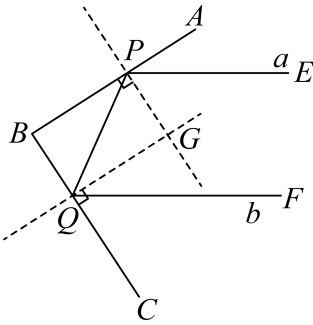
23.

探究：为什么自行车尾灯没有电也会“亮”？

【素材 1】如图 1，光的反射现象中，把经过入射点 O 并垂直于反射面的直线 ON 叫做法线，入射光线与法线的夹角 i 叫做入射角，反射光线与法线的夹角 r 叫做反射角，且 $i = r$，这就是光的反射定律.	 (图1)
【素材 2】在生活中，光的反射现象被广泛地应用，例如自行车尾灯（如图 2），它不用安装电池，也不用插电源，白天它并不发光，但在夜间或路灯照明不足的路段，尾灯能发挥其独特的作用. 当汽车车灯的灯光照射到自行车上时，它能巧妙地将光线“反射”回去，从而提醒汽车司机注意前方的自行车.	 (图2)
【原理】图 3 是自行车尾部反光镜工作原理的平面示意图，a 表示射入反光镜的光线，b 表示经平面镜两次反射后离开反光镜的光线. 当光线从某个角度入射时，经过两面镜子反射后，会朝着与入射方向平行但相反的方向返回，这就是所谓的“哪来的就回哪去”效果.	 (图3)

【任务】如果 $a \parallel b$ ，那么平面镜 AB 与 BC 的夹角 $\angle ABC$ 的度数是多少？请把以下求解过程补充完整.

解：如图，过点 P 、 Q 分别作 AB 、 BC 的垂线，交点为 G ，



$\because$ 入射角等于反射角，

$$\therefore \angle EPG = \angle QPG = \frac{1}{2} \angle EPQ, \quad \angle PQG = \angle FQG = \frac{1}{2} \angle PQF,$$

$\because a \parallel b$,

$\therefore$ _____ (_____),

$\therefore \angle ___ + \angle ___ = 90^\circ$,

$\therefore \angle QPG + \angle PQG + \angle PGQ = 180^\circ$ (_____),

$\therefore \angle PGQ =$ _____ $^\circ$,

$\therefore GP \perp AB$, $GQ \perp BC$,

$\therefore \angle GPB = \angle GQC = 90^\circ$,

$\therefore \angle GPB + \angle PGQ = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel GQ$ (_____),

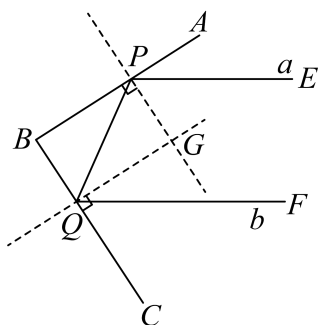
$\therefore \angle ABC = \angle GQC = 90^\circ$ (_____).

【答案】 $\angle PQF + \angle EPQ = 180^\circ$ ；两直线平行，同旁内角互补； $\angle QPG$ ； $\angle PQG$ ；三角形的三个内角的度数之和为 180° ； 90 ；同旁内角互补，两直线平行；两直线平行，同位角相等

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质与判定，垂直的定义，三角形内角和定理，先由平行线的性质得到 $\angle PQF + \angle EPQ = 180^\circ$ ，则 $\angle QPG + \angle PQG = 90^\circ$ ，由三角形内角和定理可得 $\angle PGQ = 90^\circ$ ，由垂直的定义可得 $\angle GPB = \angle GQC = 90^\circ$ ，证明 $\angle GPB + \angle PGQ = 180^\circ$ ，得到 $AB \parallel GQ$ ，则 $\angle ABC = \angle GQC = 90^\circ$ 。

【详解】 解：如图，过点 P 、 Q 分别作 AB 、 BC 的垂线，交点为 G ，



$\therefore$ 入射角等于反射角，

$\therefore \angle EPG = \angle QPG = \frac{1}{2} \angle EPQ$, $\angle PQG = \angle FQG = \frac{1}{2} \angle PQF$,

$\therefore a \parallel b$,

$\therefore \angle PQF + \angle EPQ = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补),

$\therefore \angle QPG + \angle PQG = 90^\circ$,

$\therefore \angle QPG + \angle PQG + \angle PGQ = 180^\circ$ (三角形的三个内角的度数之和为 180°),

$\therefore \angle PGQ = 90^\circ$,

$\therefore GP \perp AB$, $GQ \perp BC$,

$\therefore \angle GPB = \angle GQC = 90^\circ$,

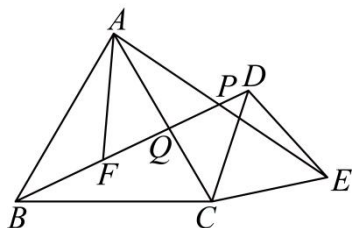
$\therefore \angle GPB + \angle PGQ = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel GQ$ (同旁内角互补, 两直线平行),

$\therefore \angle ABC = \angle GQC = 90^\circ$ (两直线平行, 同位角相等).

四、解答题 (本大题共 3 题, 满分 33 分)

24. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形, 连接 BD 、 AE 交于点 P , BD 、 AC 交于点 Q . 点 F 为线段 BD 上一点, 且 $FP = AP$.



求证:

(1) $\triangle BCD \cong \triangle ACE$;

(2) $\triangle AFP$ 是等边三角形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 等边三角形的性质与判定, 三角形内角和定理, 熟知全等三角形的性质与判定定理, 等边三角形的性质与判定定理是解题的关键.

(1) 由等边三角形的性质可得 $AC = BC$, $CD = CE$, $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$, 再证明 $\angle ACE = \angle BCD$, 据此可利用 SAS 证明 $\triangle BCD \cong \triangle ACE$;

(2) 由全等三角形的性质可得 $\angle CBD = \angle CAE$, 再由三角形内角和定理可证明 $\angle APQ = \angle BCQ = 60^\circ$, 据此可证明结论.

【小问 1 详解】

证明：∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle DCE + \angle ACD, \text{ 即 } \angle ACE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

证明：∵ $\triangle BCD \cong \triangle ACE$,

$$\therefore \angle CBD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CBQ + \angle CQB + \angle BCQ = 180^\circ, \angle AQP + \angle APQ + \angle PAQ = 180^\circ, \angle AQP = \angle CQB,$$

$$\therefore \angle APQ = \angle BCQ = 60^\circ,$$

又∵ $FP = AP$,

∴ $\triangle AFP$ 是等边三角形.

25. 母亲节前夕，某店主从厂家购进 A 、 B 两种礼盒，已知 A 、 B 两种礼盒的单价比为 $4:3$ ，单价和为 210 元.

(1) 求 A 、 B 两种礼盒的单价分别是多少元？

(2) 该店主购进这两种礼盒恰好用去 4800 元，且购进 B 种礼盒最多 36 个， A 种礼盒数量的 2 倍不超过 B 种礼盒的数量，共有几种进货方案？请说明理由.

【答案】(1) A 种礼盒的单价为 120 元， B 种礼盒的单价为 90 元.

(2) 2 种进货方案，理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了一元一次方程和一元一次不等式组的实际应用，准确找出数量关系是解题的关键.

(1) 利用“ A 、 B 两种礼盒单价比为 $4:3$ ”，设 A 单价为 $4x$ 元， B 单价为 $3x$ 元. 依据“单价和为 210 元”，列方程，求解，进而得出 A 、 B 的单价.

(2) 设购进 A 种礼盒 m 个，根据“恰好用去 4800 元”表示出 B 种礼盒数量. 结合“ B 种礼盒最多 36 个”，“ A 种礼盒数量的 2 倍不超过 B 种礼盒数量”，列出不等式组，求出 m 的取值范围 $13 \leq m \leq 16$. 根据礼盒个数为正整数，对 m 在取值范围内取值验证，确定符合条件的 m 值，从而得出进货方案数量.

【小问 1 详解】

解：设 A 种礼盒的单价为 $4x$ 元， B 种礼盒的单价为 $3x$ 元，根据题意得

$$4x + 3x = 210$$

解得 $x = 30$.

则 A 种礼盒的单价为 $4x = 4 \times 30 = 120$ (元),

B 种礼盒的单价为 $3x = 3 \times 30 = 90$ (元).

答: A 种礼盒的单价为 120 元, B 种礼盒的单价为 90 元.

【小问 2 详解】

设购进 A 种礼盒 m 个, 购进 B 种礼盒 $\frac{4800-120m}{90}$ 个, 根据题意得,

$$\begin{cases} \frac{4800-120m}{90} \leq 36 \\ 2m \leq \frac{4800-120m}{90} \end{cases}$$

解得 $13 \leq m \leq 16$.

$\therefore$ 两种礼盒个数均为正整数,

$\therefore \frac{4800-120m}{90} = \frac{160-4m}{3}$ 为正整数, 即 $160-4m$ 是 3 的倍数.

当 $m = 13$ 时, $\frac{160-4 \times 13}{3} = \frac{160-52}{3} = \frac{108}{3} = 36$ (符合条件);

当 $m = 14$ 时, $\frac{160-4 \times 14}{3} = \frac{160-56}{3} = \frac{104}{3}$ (不是整数, 舍去);

当 $m = 15$ 时, $\frac{160-4 \times 15}{3} = \frac{160-60}{3} = \frac{100}{3}$ (不是整数, 舍去);

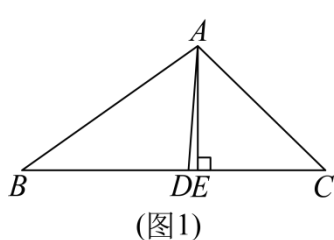
当 $m = 16$ 时, $\frac{160-4 \times 16}{3} = \frac{160-64}{3} = \frac{96}{3} = 32$ (符合条件).

$\therefore$ 购进 A 种礼盒 13 个, 购进 B 种礼盒 36 个, 或 A 种礼盒 16 个, 购进 B 种礼盒 32 个, 共有 2 种进货方案.

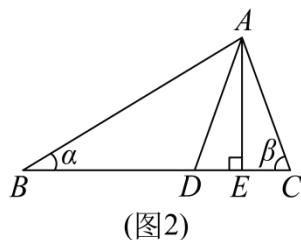
26. 小海在解答练习册 P37 第 4 题后进行了拓展探究:

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D , $AE \perp BC$, 垂足为 E .

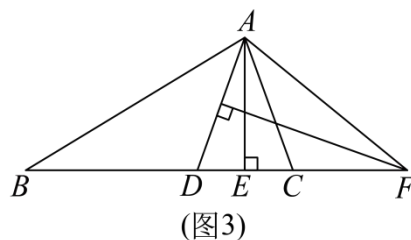
小海猜想: 通过 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAE$ 的度数, 再结合 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAD$ 的度数, 从而确定 $\angle B$ 、 $\angle C$ 与 $\angle DAE$ 之间存在固定的数量关系. 他尝试代入了几组 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数后 ($\angle B < \angle C$), 验证了这一猜想.



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 请补全下表:

$\angle B$	36°	30°	24°	
$\angle C$	44°	60°	72°	
$\angle DAE$	4°	_____。 °	_____。 °	

(2) 如图 2, 若 $\angle B = a$, $\angle C = \beta (a < \beta)$, 那么 $\angle DAE = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 a 、 β 的代数式表示), 并加以证明;

(3) 在 (2) 的基础上作 AD 的垂直平分线, 交 BC 的延长线于点 F , 连接 AF . 如图 3, 如果 $\angle ACB = 64^\circ$, 请直接写出 $\angle BAF = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}a$, 证明见 (1)

(3) 116°

【解析】

【分析】本题主要考查了与角平分线有关的三角形内角和问题, 线段垂直平分线的性质, 等边对等角等等, 熟知三角形内角和定理是解题的关键.

(1) 由垂线的定义可得 $\angle AEC = 90^\circ$, 则由三角形内角和定理可得 $\angle CAE = 90^\circ - \angle C$, $\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C$, 再由角平分线的定义可得 $\angle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$, 则可求出 $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle B$, 据此计算求解即可;

(2) 根据 (1) 所求即可得到答案;

(3) 由 (1) 可得 $\angle DAE = 32^\circ - \frac{1}{2}\angle B$, 则可求出 $\angle ADE = 58^\circ + \frac{1}{2}\angle B$; 由线段垂直平分线的性质可得 $FD = FA$, 则 $\angle FAD = \angle FDA = 58^\circ + \frac{1}{2}\angle B$, 求出 $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 58^\circ - \frac{1}{2}\angle B$, 即可得到 $\angle BAF = \angle BAD + \angle FAD = 58^\circ + \frac{1}{2}\angle B + 58^\circ - \frac{1}{2}\angle B = 116^\circ$.

【小问 1 详解】

解: $\because AE \perp BC$,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAE = 180^\circ - \angle C - \angle AEC = 90^\circ - \angle C$,

$\because \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D ,

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B - \frac{1}{2} \angle C,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAD - \angle CAE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B - \frac{1}{2} \angle C - (90^\circ - \angle C) = \frac{1}{2} \angle C - \frac{1}{2} \angle B,$$

$$\text{当 } \angle B = 30^\circ, \angle C = 60^\circ \text{ 时, } \angle DAE = \frac{1}{2} \times 60^\circ - \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ;$$

$$\text{当 } \angle B = 24^\circ, \angle C = 72^\circ \text{ 时, } \angle DAE = \frac{1}{2} \times 72^\circ - \frac{1}{2} \times 24^\circ = 24^\circ;$$

填表如下:

$\angle B$	36°	30°	24°	
$\angle C$	44°	60°	72°	
$\angle DAE$	4°	15°	24°	

【小问 2 详解】解: 由 (1) 可得 $\angle DAE = \frac{1}{2} \angle C - \frac{1}{2} \angle B,$

$$\because \angle B = \alpha, \angle C = \beta (\alpha < \beta),$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle C - \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \alpha;$$

【小问 3 详解】

解: 由 (1) 可得 $\angle DAE = \frac{1}{2} \angle ACB - \frac{1}{2} \angle B = 32^\circ - \frac{1}{2} \angle B,$

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle DAE - \angle AED = 58^\circ + \frac{1}{2} \angle B;$$

由线段垂直平分线的性质可得 $FD = FA,$

$$\therefore \angle FAD = \angle FDA = 58^\circ + \frac{1}{2} \angle B,$$

$$\because \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C, \angle BAC \text{ 的平分线 } AD \text{ 交边 } BC \text{ 于点 } D,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 58^\circ - \frac{1}{2} \angle B,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BAD + \angle FAD = 58^\circ + \frac{1}{2} \angle B + 58^\circ - \frac{1}{2} \angle B = 116^\circ.$$