

2024 学年第二学期 5 月阶段练习试卷

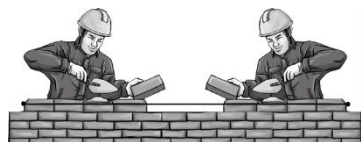
七年级数学

2025.5

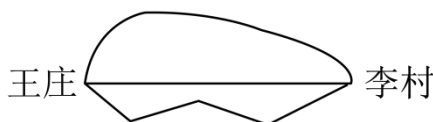
(完卷时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 下列生活中的做法与其运用的数学原理对应正确的是 ()



图①



图②

(1) 如图①, 工人师傅在砌墙时, 先在两端各固定一点, 中间拉紧一条细线, 然后沿着细线砌墙就能砌直 (两点确定一条直线)

(2) 如图②, 把弯曲的公路改直, 就能缩短路程 (两点之间线段最短)

A. ①对②错

B. ①错②对

C. ①②都对

D. ①②都错

【答案】C

【解析】

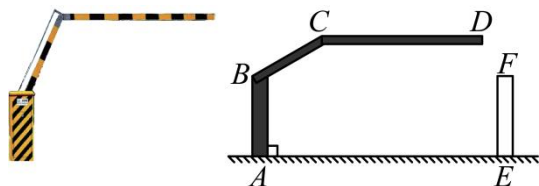
【分析】本题主要考查了直线的性质, 线段公理等知识; 将实际问题数学化是解决问题的关键可根据公理“两点确定一条直线”; 线段的性质即可判断, 即可求解.

【详解】解: 工人师傅在砌墙时, 先在两端各固定一点, 中间拉紧一条细线, 然后沿着细线砌墙就能砌直 (两点确定一条直线), 符合题意;

把弯曲的公路改直, 就能缩短路程 (垂线段最短), 做法与其运用的数学原理是两点之间线段最短, 符合题意;

故选: C.

2. 泉州某小区车库门口的“曲臂直杆道闸” (如图) 可抽象为如图所示模型. 已知 AB 垂直于水平地面 AE . 当车牌被自动识别后, 曲臂直杆道闸的 BC 段将绕点 B 缓慢向上抬高, CD 段则一直保持水平状态上升 (即 CD 与 AE 始终平行), 在该运动过程中 $\angle ABC + \angle BCD$ 的度数始终等于 ()



A. 270°

B. 250°

C. 230°

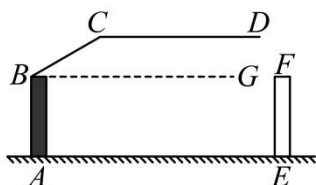
D. 180°

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质与判定，过点 B 作 $BG \parallel AE$ ，则 $AE \parallel CD \parallel BG$ ，由两直线平行，同旁内角互补推出 $\angle BAE + \angle ABG + \angle CBG + \angle BCD = 360^\circ$ ，即 $\angle BAE + \angle ABC + \angle BCD = 360^\circ$ ，再由垂直的定义得到 $\angle BAE = 90^\circ$ ，则 $\angle ABC + \angle BCD = 360^\circ - \angle BAE = 270^\circ$ 。

【详解】解：如图，过点 B 作 $BG \parallel AE$ ，



$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\therefore AE \parallel CD \parallel BG,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABG = 180^\circ, \angle BCD + \angle CBG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABG + \angle CBG + \angle BCD = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABC + \angle BCD = 360^\circ.$$

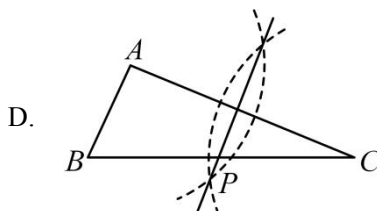
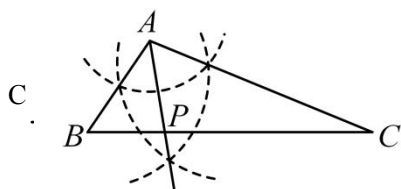
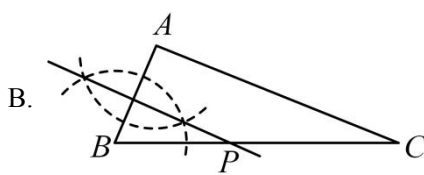
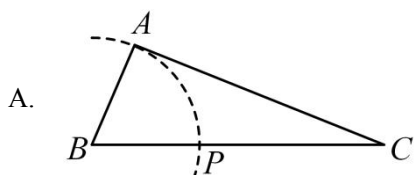
$$\because BA \perp AE,$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 360^\circ - \angle BAE = 270^\circ,$$

故选：A.

3. 已知 $\triangle ABC$ ($AC < BC$)，用尺规作图的方法在 BC 上确定一点 P ，使 $PA + PB = BC$ ，则一定符合要求的作图痕迹是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查作图-复杂作图，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．要使

$PA + PB = BC$ ，则需使 $AP = BP$ ，即点 P 在线段 AB 的垂直平分线上．据此即可对各个选项进行判断．

【详解】 解： $\because$ 在 BC 上确定一点 P ，使 $PA + PB = BC$ ，

$\therefore$ 当 $PA + PB = BC$ 时，点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore$ 作图正确的是 D．

故选： D．

4. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 3x - m > 0 \\ x - 1 \leq 5 \end{cases}$ 有四个整数解，则 m 的取值范围是 ()

- A. $6 \leq m < 9$ B. $6 < m \leq 9$ C. $6 < m < 9$ D. $6 \leq m \leq 9$

【答案】 A

【解析】

【分析】 解不等式组的两个不等式，根据其整数解的个数得出 $2 \leq \frac{m}{3} < 3$ ，解之可得．

本题主要考查不等式组的整数解问题，根据不等式组的整数解的个数得出关于 m 的不等式组是解题的关键．

【详解】 解：解不等式 $3x - m > 0$ ，得： $x > \frac{m}{3}$ ，

解不等式 $x - 1 \leq 5$ ，得： $x \leq 6$ ，

$\therefore$ 不等式组有 4 个整数解，

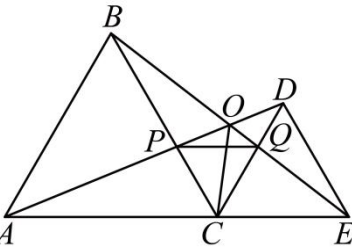
$\therefore 2 \leq \frac{m}{3} < 3$ ，

解得： $6 \leq m < 9$ ．

故选： A．

5. 如图， C 为线段 AE 上一动点（不与点 A ， E 重合），在 AE 同侧分别作等边三角形 ABC 和等边三角形 CDE ， AD 与 BE 交于点 O ， AD 与 BC 交于点 P ， BE 与 CD 交于点 Q ，连接 PQ ．下列五个结论：

① $AD = BE$ ； ② $PQ \parallel AE$ ； ③ $AP = BQ$ ； ④ $DE = DP$ ； ⑤ $\triangle CPQ$ 是等边三角形．其中正确结论的个数是 ()．



- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】C

【解析】

【分析】可证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，可得 $AD = BE$ ，可判断①；可证 $\triangle CAP \cong \triangle CBQ$ ，可得 $CP = CQ$ ， $PA = QB$ ，可判断③；再证 $\triangle CPQ$ 是等边三角形，可判断⑤②；可证 $DP = EQ$ ， $\angle DQE \neq \angle EDQ$ ，可判断④；即可求解。

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCE$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, \quad CD = DE,$$

$$\angle ACB = \angle DCE = \angle CDE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PCQ = 180^\circ - \angle ACB - \angle DCE$$

$$= 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE = 120^\circ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AD = BE,$$

故①正确；

由①可得： $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，

$$\angle ACP = \angle BCQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CBE,$$

即： $\angle CAP = \angle CBQ$ ，

在 $\triangle CAP$ 和 $\triangle CBQ$ 中

$$\begin{cases} \angle CAP = \angle CBQ \\ AC = BC \\ \angle ACP = \angle BCQ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CAP \cong \triangle CBQ \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CP = CQ, \quad PA = QB,$$

故③正确；

$$\therefore \angle PCQ = 60^\circ$$

$\therefore \triangle CPQ$ 是等边三角形，

故⑤正确；

$$\therefore \angle CPQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle ACB,$$

$$\therefore PQ \parallel AE,$$

故②正确；

$$\therefore PA = BQ, \quad AD = BE,$$

$$\therefore AD - PA = BE - BQ,$$

$$\therefore DP = EQ,$$

$$\therefore \angle CQB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CQO \neq 60^\circ$$

$$\therefore \angle DQE \neq 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DQE \neq \angle EDQ,$$

$$\therefore DE \neq EQ,$$

$$\therefore DP \neq DE;$$

故④不正确；

故选：C.

【点睛】 本题考查了等边三角形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，掌握判定方法及性质是解题的关键.

二、填空题 (每题 2 分，共 30 分)

6. 不等式的 $3x - 4 \leq 2 + x$ 非负整数解共有 _____ 个.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了求一元一次不等式的整数解. 正确的解一元一次不等式是解题的关键.

移项合并，最后系数化为1，可求不等式的解集，进而可得非负整数解的个数.

【详解】解： $3x - 4 \leq 2 + x$,

$$2x \leq 6,$$

解得， $x \leq 3$,

$\therefore$ 非负整数解有 0, 1, 2, 3 共 4 个,

故答案为： 4.

7. 若 $(k-1)x^{|k|} + 3 \geq 0$ 是关于 x 的一元一次不等式，则 k 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式的定义可得 $|k|=1$ 且 $k-1 \neq 0$ ，分别进行求解即可.

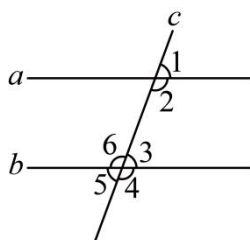
【详解】 解： $\because (k-1)x^{|k|} + 3 \geq 0$ 是关于 x 的一元一次不等式，

$\therefore |k|=1$ 且 $k-1 \neq 0$ ，解得： $k = -1$ ，

故答案为： -1.

【点睛】 本题主要考查一元一次不等式定义的“未知数的最高次数为1次”这一条件；还要注意，未知数的系数不能是0，掌握一元一次不等式的定义是解题的关键.

8. 如图，直线 a 、 b 被直线 c 所截，下列条件能证明 $a \parallel b$ 的是_____ (填序号).



- ① $\angle 1 = \angle 3$ ② $\angle 3 = \angle 5$ ③ $\angle 2 = \angle 6$ ④ $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

【答案】 ①③④

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的判定，熟练掌握平行线的各种判定方法是解题关键.

根据平行线的判定进行逐项判断即可求解.

【详解】 解： ① $\because \angle 1$ 和 $\angle 3$ 是直线 a 、 b 被直线 c 所截得的一组同位角，且 $\angle 1 = \angle 3$ ，

$\therefore a \parallel b$ ；

$\therefore$ ①说法正确；

② $\because \angle 3$ 与 $\angle 5$ 是对顶角，由“对顶角相等”的性质可知 $\angle 3 = \angle 5$ ，但无法证明 $a \parallel b$ ；

$\therefore$ ②说法错误；

③ $\because \angle 2$ 和 $\angle 6$ 是直线 a 、 b 被直线 c 所截得的一组内错角，且 $\angle 2 = \angle 6$ ，

$\therefore a \parallel b$ ；

$\therefore$ ③说法正确；

④ $\because \angle 2$ 与 $\angle 3$ 是直线 a 、 b 被直线 c 所截得的一组同旁内角，且 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，

$\therefore a \parallel b$ ；

$\therefore$ ④说法正确.

故答案为：①③④.

9. 若 $a < b$ ，则 $2 - 3a$ _____ $2 - 3b$.

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查了不等式的性质.

直接根据不等式的性质作答.

【详解】解： $\because a < b$ ，

$\therefore -3a > -3b$ ，

$\therefore 2 - 3a > 2 - 3b$ ，

故答案为：>.

10. 一个三角形三个内角的度数之比是3:2:1，那么这个三角形最大的内角是_____.

【答案】 90° ## 90度

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和定理，一元一次方程的应用，掌握三角形内角和定理等于 180° 是解题关键. 设这三个内角度数分别为 $3x$ 、 $2x$ 、 x ，根据三角形内角和定理列方程求解即可.

【详解】解： $\because$ 一个三角形三个内角的度数之比是3:2:1，

$\therefore$ 设这三个内角度数分别为 $3x$ 、 $2x$ 、 x ，

则 $3x + 2x + x = 180^\circ$ ，

解得： $x = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 三个内角的度数分别为 90° 、 60° 、 30° ，即最大的内角是 90° ，

故答案为： 90° .

11. 直角三角形的两个锐角互余的逆命题为_____.

【答案】有两个角互余的三角形是直角三角形

【解析】

【分析】本题考查的命题与定理，解题的关键是了解如何写出一个命题的逆命题，难度不大. 直接写出原命题的逆命题即可.

【详解】解：直角三角形的两个锐角互余的逆命题为有两个角互余的三角形是直角三角形，故答案为：有两个角互余的三角形是直角三角形.

12. 说明命题“ a^2 是正数”是假命题的反例是_____.

【答案】当 $a=0$ 时， $a^2=0$

【解析】

【分析】本题考查了判定命题真假的方法，根据 $a=0$ 时， $a^2=0$ 解答即可；掌握举反例是说明命题为假命题的方法是解题的关键.

【详解】解：当 $a=0$ 时， $a^2=0$ ，此时 a 的平方不是正数，

$\therefore$ 命题“ a^2 是正数”是假命题；

故答案为：当 $a=0$ 时， $a^2=0$.

13. 等腰三角形的一个角为 50° ，则它的顶角的度数为_____.

【答案】 50° 或 80°

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的定义及三角形内角和定理. 已知一个等腰三角形的一个角是 50° ，没有明确这个角是顶角还是底角，所以要分两种情况进行讨论，然后用三角形内角和定理求解即可.

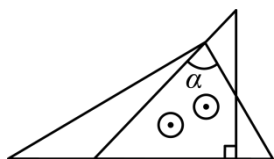
【详解】解：分两种情况：

① 50° 的角是底角时，则等腰三角形的顶角为： $180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$ ，

② 50° 的角是顶角时，则等腰三角形的顶角 50° .

故答案为： 50° 或 80° .

14. 如图，将一副三角板的一边叠合，图中 $\angle\alpha$ 的大小为_____°.

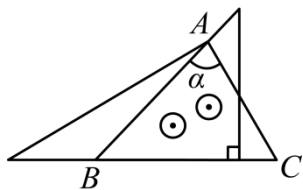


【答案】75

【解析】

【分析】 本题考查的是三角形的内角和定理的应用，由 $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，再结合三角形的内角和定理解答即可.

【详解】 解：如图，

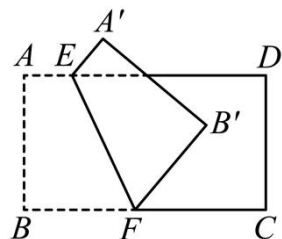


由题意可得： $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle \alpha = \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ ，

故答案为： 75

15. 如图，把矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，若 $\angle B'FC = 50^\circ$ ，则 $\angle DEF$ 的度数为_____.



【答案】 65°

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质、图形翻折变换，解题的关键是掌握折叠是一种对称变换，折叠前后图形的形状和大小不变. 根据题意求出 $\angle BFB' = 130^\circ$ ，再由折叠的性质推出 $\angle BFE = \angle B'FE = 65^\circ$ ，知由矩形的性质得到 $AD \parallel BC$ ，即可推出 $\angle DEF$.

【详解】 解： $\because \angle B'FC = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle BFB' = 180^\circ - \angle B'FC = 130^\circ$ ，

由折叠的性质得 $\angle BFE = \angle B'FE = \frac{1}{2} \angle BFB' = 65^\circ$ ，

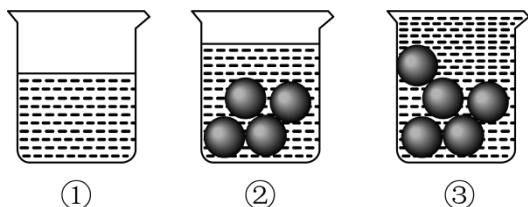
$\because$ 四边形纸片 $ABCD$ 是矩形纸片，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle DEF = \angle BFE = 65^\circ$.

故答案为： 65° .

16. 如图是测量一颗玻璃球体积的过程：



- (1) 将 300ml 的水倒进一个容量为 500ml 的杯子中；
- (2) 将四颗相同的玻璃球放入水中，结果水没有满；
- (3) 再加一颗同样的玻璃球放入水中，结果水满溢出。

根据以上过程，推测这样一颗玻璃球的体积 a 的取值范围是_____。

【答案】 $40\text{ml} < a < 50\text{ml}$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式的知识，解题的关键是根据题意，则 $\begin{cases} 4a < 500 - 300 \\ 5a > 500 - 300 \end{cases}$ ，解出 a ，即可。

【详解】 解：一颗玻璃球的体积为 $a\text{ml}$ ，

$\because$ 将四颗相同的玻璃球放入水中，结果水没有满，

$$\therefore 4a < 500 - 300,$$

解得： $a < 50$ ；

$\because$ 五颗同样的玻璃球放入水中，结果水满溢出，

$$\therefore 5a > 500 - 300,$$

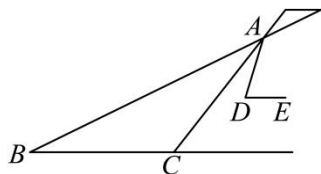
解得： $a > 40$ ；

$\therefore$ 一颗玻璃球的体积 a 的取值范围为： $40\text{ml} < a < 50\text{ml}$ ，

故答案为： $40\text{ml} < a < 50\text{ml}$ 。

17. 数学兴趣小组同学利用几何图形画出螳螂的简笔画，如图，已知 $\angle ACB = 125^\circ$, $\angle ADE = 70^\circ$ ，且

$DE \parallel BC$ 。则 $\angle CAD =$ _____。

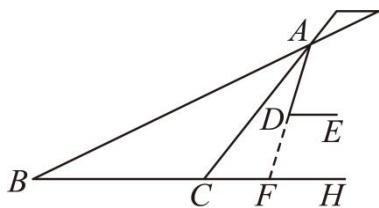


【答案】 15°

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质，三角形外角的性质，延长 AD 交 BC 于点 F ，根据平行线的性质得出 $\angle AFH$ 的度数，根据邻补角互补求出 $\angle FCA$ 的度数，再根据三角形外角的性质即可求出 $\angle CAD$ 的度数。

【详解】解：如图，延长 AD 交 BC 于点 F ，



$$\because CB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AFH,$$

$$\because \angle ADE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH = 70^\circ,$$

$$\because \angle BCA = 125^\circ,$$

$$\therefore \angle FCA = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ,$$

$\because \angle AFH$ 是 $\triangle ACF$ 的外角，

$$\therefore \angle AFH = \angle CAD + \angle FCA,$$

$$\therefore 70^\circ = \angle CAD + 55^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 15^\circ,$$

故答案为： 15° .

18. 某山区学校为部分离家远的学生安排住宿. 如果每间宿舍住 5 人，那么有 12 人安排不下；如果每间宿舍住 8 人，那么最后一间宿舍不空也不满，问共有宿舍_____间.

【答案】 5 或 6

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次不等式组的应用，根据题意列出不等式组并正确求出整数解是解题关键.

设共有宿舍 x 间，根据如果每间宿舍住 5 人，那么有 12 人安排不下；如果每间宿舍住 8 人，最后一间宿舍不空也不满，列出一元一次不等式组，求出解集，再由 x 为整数，即可解答.

【详解】解：设共有宿舍 x 间，依题意，得

$$\begin{cases} 5x + 12 - 8(x - 1) > 0 \text{ ①} \\ 5x + 12 - 8(x - 1) < 8 \text{ ②} \end{cases}$$

解①得

$$x < \frac{20}{3},$$

解②得

$$x > 4,$$

∴ 原不等式的解集为 $4 < x < \frac{20}{3}$,

∵ x 为整数,

∴ x 可以为 5 或 6.

故答案为: 5 或 6.

19. 如图, 数学活动课上, 一数学小组的同学把纸条等分成 14 份, 如果第一次在剪刀处剪断, 想再剪一刀, 使三段能构成等腰三角形, 那么第二次可以在_____处剪断. (多选, 填写序号)



【答案】 ②或③

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的定义, 三角形三边关系, 分 4 厘米为等腰三角形的腰和底讨论即可.

【详解】 解: 当 4 为腰时, 则底为 $14 - 2 \times 4 = 6$, 此时能组成三角形,

∴ 第二次可以在②处剪断,

当 4 为底时, 则腰为 $\frac{14-4}{2} = 5$, 此时能组成三角形,

∴ 第二次可以在③处剪断,

在①处剪断时, 三段的长分别为 2、2、10, 不能组成三角形,

在④处剪断时, 三段的长分别为 4、7、3, 不能组成三角形,

综上, 第二次可以在②或③处剪断,

故答案为: ②或③.

20. 在等边 $\triangle ABC$ 所在的平面内求一点 P , 使 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 都是等腰三角形, 具有这种性质的点 P 有_____个.

【答案】 10

【解析】

【分析】 根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等, 作边 AB 的垂直平分线, 在以顶点 A 、 C 为圆心, 以边长为半径画弧, 与垂直平分线相交于 3 个点, 同理可得边 BC 、 AC 上也分别有 3 个点, 再加上等边三角形的外心, 计算即可求出.

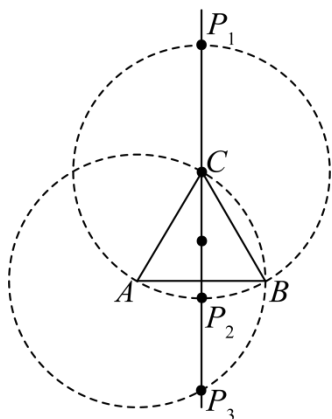
【详解】 解:

如图, 等边三角形 AB 边的垂直平分线上可作 3 个点 P ,

同理: AC 、 BC 上也分别有 3 个点, 另外, $\triangle ABC$ 的外心也是满足条件的一个点,

所以，共有 $3+3+3+1=10$ 个.

故答案为：10.



【点睛】本题主要考查等腰三角形的性质；要注意一边的垂直平分线上在三角形的外部有 3 个点，最后不要漏掉了三角形的外心.

三、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

21. 解不等式 $2x-5 < 4(x+1)-3$ ，并写出它的所有负整数解.

【答案】 $x > -3$ ，负整数解为：-1，-2.

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式，关键是掌握不等式的解法. 根据去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤求解即可.

【详解】解： $2x-5 < 4(x+1)-3$

去括号，得 $2x-5 < 4x+4-3$ ，

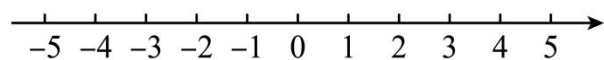
移项，得 $2x-4x < 4-3+5$ ，

合并同类项，得 $-2x < 6$ ，

系数化为 1，得 $x > -3$.

$\therefore$ 原不等式负整数解为：-1，-2.

22. 解不等式组：
$$\begin{cases} 5x-1 < 3(x+3) \\ \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \leq 1 \end{cases}$$
，并把它解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-1 \leq x < 5$ ，数轴表示见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组，在数轴上表示不等式组的解集，先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集，进而在数轴上表示不等式组的解集即可.

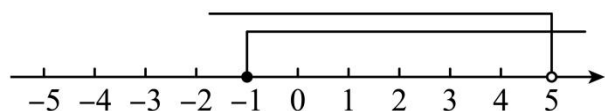
【详解】 解：
$$\begin{cases} 5x-1 < 3(x+3) \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x < 5$,

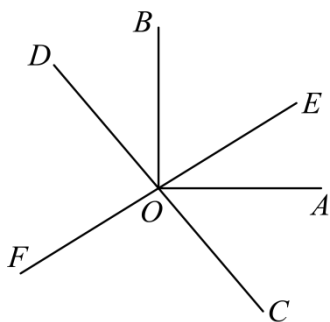
解不等式②得： $x \geq -1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 5$,

数轴表示如下所示：



23. 如图，直线 CD 、 EF 相交于点 O ， $OA \perp OB$ ，若 $\angle BOD = 40^\circ$ ， $\angle COF = 98^\circ$ ，求 $\angle AOE$ 的度数.



【答案】 32° ，过程见详解

【解析】

【分析】 本题考查了垂线的定义和对顶角的性质，熟练掌握是解答本题的关键. 由对顶角相等得 $\angle DOE = 98^\circ$ ，进而得 $\angle BOE = 58^\circ$ ，由垂直定义得 $\angle AOE = \angle AOB - \angle BOE$ ，代入计算.

【详解】 解： $\because \angle COF = 98^\circ$ ， $\angle COF = \angle DOE$ ，

$\therefore \angle DOE = 98^\circ$ ，

又 $\because \angle DOE = \angle BOD + \angle BOE$ ， $\angle BOD = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle BOE = 58^\circ$ ，

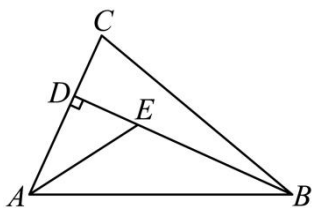
$\because OA \perp OB$ ，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle AOB = \angle BOE + \angle AOE$ ，

$$\therefore \angle AOE = \angle AOB - \angle BOE = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ .$$

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$ 于点 D , AE 是 $\angle CAB$ 的角平分线, 交 BD 于点 E , $\angle AED = 60^\circ$, $\angle CBA = 40^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数.



【答案】 80°

【解析】

【分析】 本题主要考查了与角平分线有关的三角形内角和问题, 先由垂线的定义得到 $\angle ADE = 90^\circ$, 再由三角形内角和定理得到 $\angle DAE = 30^\circ$, 则由角平分线的定义可得 $\angle CAB = 2\angle CAE = 60^\circ$, 据此由三角形内角和定理可得答案.

【详解】 解: $\because BD \perp AC$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = 30^\circ,$$

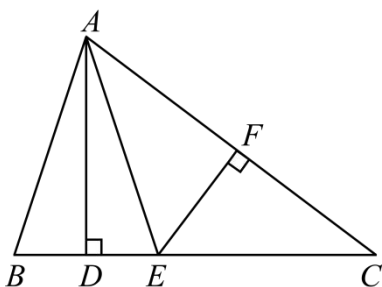
$\because AE$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线,

$$\therefore \angle CAB = 2\angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CBA = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 80^\circ .$$

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, EF 垂直平分 AC , 交 AC 于点 F , 交 BC 于点 E , 且 $BD = DE$, 连接 AE .



(1) 求证: $AB = EC$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 42cm, $AC = 16$ cm, 求 DC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $DC = 13$ cm

【解析】

【分析】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

(1) 根据垂直平分线的性质，可 $AE = EC$ ，再根据 $AD \perp BC, BD = DE$ ，得到 AD 是 BE 的垂直平分线，等量代换，即可；

(2) 根据题意，则 $AB + BC + AC = 42\text{cm}$ ，求出 $AB + BC = 26\text{cm}$ ，再根据 $AB + BD + DE + EC = 26\text{cm}$ ，得到 $DE + EC = 13\text{cm}$ ，最后根据 $DE + EC = DC$ 求出结论即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because EF$ 垂直平分 AC ，

$$\therefore AE = EC,$$

$$\because AD \perp BC, BD = DE,$$

$\therefore AD$ 是 BE 的垂直平分线，

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore AB = EC;$$

【小问 2 详解】

解： $\because \triangle ABC$ 的周长为 42cm ，

$$\therefore AB + BC + AC = 42\text{cm},$$

$$\because AC = 16\text{cm},$$

$$\therefore AB + BC = 42 - 16 = 26(\text{cm}),$$

$$\because BD = DE, AB = EC,$$

$$\backslash AB + BD + DE + EC = 26\text{cm},$$

$$\backslash 2DE + 2EC = 26\text{cm},$$

$$\backslash DE + EC = 13\text{cm},$$

$$\because DE + EC = DC,$$

$$\backslash DC = 13\text{cm}.$$

四、解答题：(26 题 7 分，27 题 8 分，28 题 10 分，共 25 分)

26. 为了丰富学生的阅读资源，上外松外图书馆准备采购文学名著和人物传记两类图书. 所采购的文学名著价格都一样，所采购的人物传记价格都一样. 经了解，30 本文学名著和 20 本人物传记共需 1150 元，10 本文学名著比 10 本人物传记多 50 元.

(1) 求每本文学名著和人物传记各多少元?

(2) 图书馆存书不足, 学校要求再次购进两种图书, 购买的文学名著比人物传记多 20 本, 总费用不超过 2000 元, 请求出人物传记至多买多少本?

【答案】 (1) 每本文学名著和人物传记各 25, 20 元

(2) 33 本

【解析】

【分析】 本题考查二元一次方程组, 一元一次不等式的应用, 掌握知识点是解题的关键.

(1) 设每本文学名著和人物传记各 x 元、 y 元, 根据 30 本文学名著和 20 本人物传记共需 1150 元, 10 本文学名著比 10 本人物传记多 50 元, 列出二元一次方程组, 求解即可;

(2) 设人物传记买 m 本, 购买的文学名著比人物传记多 20 本, 总费用不超过 2000 元, 列出一元一次不等式, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设每本文学名著和人物传记各 x 元、 y 元, 依题意, 得

$$\begin{cases} 30x + 20y = 1150 \\ 10x = 10y + 50 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases},$

答: 每本文学名著和人物传记各 25, 20 元.

【小问 2 详解】

设人物传记买 m 本, 依题意, 得

$$25(20 + m) + 20m \leq 2000,$$

解得: $m \leq \frac{100}{3},$

$\therefore m$ 取最大整数为 33.

答: 人物传记至多买 33 本.

27. 综合与实践: 猜数游戏在日常生活中有着广泛应用, 与数学有着密切的关联.

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数, 从中随机抽取 2 张, 并将它们上面的数相加, 重复这样做, 每次所得的和都是 5, 6, 7, 8 中的一个数, 并且这 4 个数都能取到. 猜猜看, 小丽在 4 张纸片上各写了什么数.

游戏分析: 设小丽在 4 张纸片上写的正整数依次为 a 、 b 、 c 、 d , 其中 $a \leq b \leq c \leq d$.

∵最小的两个数的和为 5，最大的两个数的和为 8，∴ $a+b=5$ ， $c+d=8$ ，

$$\therefore \begin{cases} a+a \leq 5 \\ d+d \geq 8 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a \leq 2.5 \\ d \geq 4 \end{cases}, \therefore \text{正整数 } a=1, 2.$$

当 $a=1$ 时， $b=4$ ，则 $c=d=4$ ，但它们的和出现的数是_____，不符合题意；

当 $a=2$ 时， $b=3$ ，若 $c=d=4$ ，它们的和出现的数是_____；

当 $a=2$ 时， $b=3$ ，若 $c=3$ ， $d=5$ ，它们的和出现的数 5，6，7，8；

给出结论：综上分析可得，纸片上的数可能是_____；

游戏拓展：小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加，重复这样做，每次所得的和都是 6，7，8，9 中的一个数，并且这 4 个数都能取到。模仿上述求解过程，求出小丽在 4 张纸片上各写了什么正整数。

【答案】游戏分析：5,8；5,6,7,8；给出结论：2,3,4,4 或 2,3,3,5；游戏拓展：纸片上的数可能是 2,4,4,5 或 3,3,4,5

【解析】

【分析】 本题考查的是不等式组的应用，

游戏分析：根据题意分析计算求和进而写出结论；

给出结论：根据分析内容汇总得出结论；

游戏拓展：结合上面的分析及结论，类别写出即可。

【详解】解：游戏分析：设小丽在 4 张纸片上写的正整数依次为 a 、 b 、 c 、 d ，其中 $a \leq b \leq c \leq d$ 。

∵最小的两个数的和为 5，最大的两个数的和为 8，

$$\therefore a+b=5, \quad c+d=8,$$

$$\therefore \begin{cases} a+a \leq 5 \\ d+d \geq 8 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a \leq 2.5 \\ d \geq 4 \end{cases},$$

∴正整数 $a=1, 2$ 。

当 $a=1$ 时， $b=4$ ，则 $c=d=4$ ，但它们的和出现的数是 5,8，不符合题意；

当 $a=2$ 时， $b=3$ ，若 $c=d=4$ ，它们的和出现的数是 5,6,7,8；

当 $a=2$ 时， $b=3$ ，若 $c=3$ ， $d=5$ ，它们的和出现的数 5，6，7，8；

给出结论：综上分析可得，纸片上的数可能是 2,3,4,4 或 2,3,3,5；

故答案为：5,8；5,6,7,8；2,3,4,4 或 2,3,3,5；

游戏拓展：设小丽在 4 张纸片上写的正整数依次为 m 、 n 、 e 、 f ，其中 $m \neq n \neq e \neq f$ 。

∵ 最小的两个数的和为 6，最大的两个数的和为 9，

$$\therefore m+n=6, e+f=9,$$

$$\therefore \begin{cases} m+m \leq 6 \\ f+f \geq 9 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m \leq 3 \\ f \geq 4.5 \end{cases},$$

∴ 正整数 $m=1, 2, 3$ 。

当 $m=1$ 时， $n=5$ ，则不满足最大的两个数的和为 9 这一条件，不符合题意；

当 $m=2$ 时， $n=4$ ，若 $e=4, f=5$ ，它们的和出现的数是 6, 7, 8, 9；

当 $m=3$ 时， $n=3$ ，若 $e=3, f=6$ ，但它们的和出现的数 6, 9，不符合题意；

当 $m=3$ 时， $n=3$ ，若 $e=4, f=5$ ，它们的和出现的数 6, 7, 8, 9；

给出结论：综上分析可得，纸片上的数可能是 2, 4, 4, 5 或 3, 3, 4, 5；

28. 倍长中线是初中数学一种重要的数学思想。某同学在学习过程中，遇到这样的一个问题：如图 1：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $AC=4$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围，经过和小组同学的探讨，共同得到了这样的解决方法：延长 AD 到点 E ，使 $DE=AD$ 。请根据他们的方法解决以下问题：

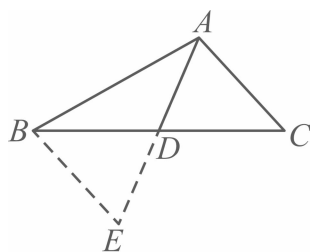


图1

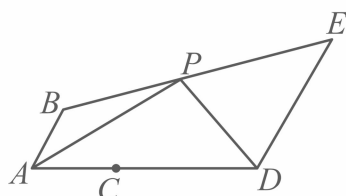


图2

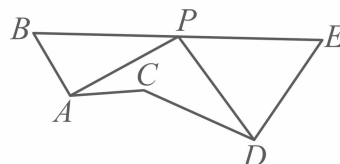


图3

(1) 求 AD 的取值范围：_____。

【问题解决】请利用上述方法（倍长中线）解决下列问题：

如图：已知 $\angle BAC + \angle CDE = 180^\circ$ ， $AB = AC$ ， $DC = DE$ ， P 为 BE 的中点；

(2) 如图 2，若 A 、 C 、 D 三点共线， $AC:CD=3:5$ ， $S_{\triangle ABP}=6$ ，求 $S_{\text{四边形}ABED}$ ；

(3) 如图 3，若 A 、 C 、 D 三点不共线， $AP=PD$ ，求证： $AB \perp AC$ 。

【答案】(1) $1 < AD < 5$ ；(2) 32；(3) 见解析

【解析】

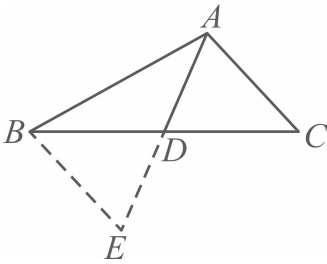
【分析】(1) 延长 AD 到点 E ，使 $DE=AD$ ，连接 BE ，利用全等三角形的判定与性质和三角形的三边关

系定理解答即可；

(2) 延长 DP 交 AB 延长线于点 F ，利用平行线的判定与性质和全等三角形的判定与性质得到： $BF = DE$ ， $PD = PF$ ， $S_{\triangle PBF} = S_{\triangle PDE}$ ，利用等高的三角形的面积比等于底的比的性质求得 $S_{\triangle BPF} = 10$ ，则 $S_{\triangle APF} = 16$ ，再利用 $S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF} = 2S_{\triangle APF}$ 解答即可；

(3) 延长 DP 至点 F ，使得 $PF = PD$ ，连接 BF 、 AF 、 AD ，通过证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACD$ 和 $\triangle APF \cong \triangle APD$ ，利用全等三角形的性质，等腰直角三角形的性质解答即可得出结论。

【详解】(1) 解：延长 AD 到点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE ，如图，



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$\begin{cases} CD = BD \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ AE = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BE = 4,$$

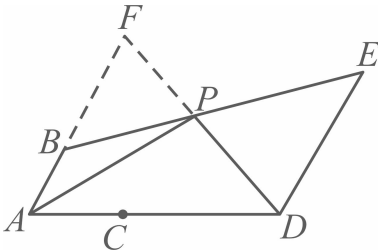
$$\because AB - BE < AE < AB + BE,$$

$$\therefore 6 - 4 < 2AD < 6 + 4,$$

$$\therefore 1 < AD < 5,$$

故答案为： $1 < AD < 5$ ；

(2) 解：如图，延长 DP 交 AB 延长线于点 F ，



$$\angle BAC + \angle CDE = 180^\circ,$$

$$\therefore AF \parallel DE \quad (\text{同旁内角互补，两直线平行}),$$

$$\therefore \angle PFB = \angle PDE, \quad \angle PBF = \angle PED,$$

$\therefore P$ 为 BE 的中点,

$$\therefore BP = PE,$$

在 $\triangle BPF$ 和 $\triangle EPD$ 中,

$$\begin{cases} \angle PFB = \angle PDE \\ \angle PBF = \angle PED, \\ PB = PE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPF \cong \triangle EPD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = DE, \quad PD = PF, \quad S_{\triangle PBF} = S_{\triangle PDE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore DC = DE,$$

$$\therefore DC = BF,$$

$$\therefore AB = AC, \quad AC : CD = 3 : 5,$$

$$\therefore AB : BF = 3 : 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPF} = AB : BF = 3 : 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle BPF} = 10,$$

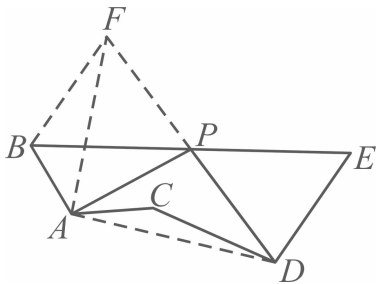
$$\text{则 } S_{\triangle APF} = 16,$$

$$\therefore PF = PD,$$

$$\therefore S_{\triangle ADP} = S_{\triangle AFP},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = S_{\triangle ADF} = 2S_{\triangle APF} = 32;$$

(3) 证明: 延长 DP 至点 F , 使得 $PF = PD$, 连接 BF 、 AF 、 AD , 如图,



由 (1) 同理易证: $\triangle DPE \cong \triangle FBP (\text{SAS})$,

$$\therefore BF = DE = CD, \quad \angle E = \angle FBP,$$

$$\because \angle BAC + \angle CDE = 180^\circ, \quad \text{且} \angle ABP + \angle BAC + \angle CAD + \angle ADC + \angle CDE + \angle E = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP + \angle E + \angle CAD + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle CAD + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\because \angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACD,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABF = \angle ACD, \\ BF = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = AD, \quad \angle BAF = \angle CAD,$$

在 $\triangle APF$ 和 $\triangle APD$ 中,

$$\begin{cases} AF = AD \\ AP = AP, \\ PF = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APF \cong \triangle APD (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle APD = \angle APF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = PD,$$

$$\therefore \angle PAD = 45^\circ,$$

同理可得, $\angle PAF = 45^\circ$,

$$\therefore \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp AC.$$

【点睛】 本题属于四边形综合题, 主要考查了三角形的中线的性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 等腰直角三角形的性质, 三角形的面积, 本题是阅读型题目, 掌握倍长中线的方法, 恰当的添加辅助线构造全等三角形是解题的关键.