

上海市震旦外国语中学 2025 学年第一学期八年级期中考试数学试卷

(考试时间 100 分钟)

一、选择题

1. 已知下列各数: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{2025}{2026}$, 2π , $\sqrt[3]{-8}$, 0.010010001, 其中无理数有 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
2. 下列各式中, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 ().
- A. $\sqrt{a+b}$ B. $\sqrt{a-b}$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ D. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$
3. 若 $(a+1)x^{a^2+1} - x + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 a 的值是 ()
- A. ± 1 B. -1 C. 1 D. 0
4. 若 $\sqrt[3]{3} = 1.442$, $\sqrt[3]{0.3} = 0.6694$, 那么 $\sqrt[3]{300 \times 64}$ 等于 ()
- A. 57.68 B. 115.36 C. 26.776 D. 53.552
5. 已知 a 是无理数, 但 $(a+3)(a-5)$ 是有理数, 则下列各式是有理数的是 ()
- A. $a^2 + 5$ B. $(a-3)(a+5)$ C. $(a+1)^2$ D. $(a-1)^2$
6. 定义: 若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根, 我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$. 所以这两个方程为“同伴方程”, 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a+b+c = 0$ 和 $a-b+c = 0$. 且该方程与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”, 则 n 的值为 ()
- A. 1 或 -1 B. -1 C. 1 D. 2

二、填空题

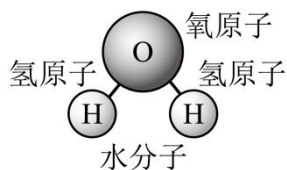
7. 化简: $\sqrt{8a^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 比较大小: $-2\sqrt{6} \underline{\hspace{1cm}} -3\sqrt{3}$ (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”).
9. 若 $1 < x < 2$, 化简 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与表示数 2 的点之间的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 不等式 $x > \sqrt{2x+1}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 方程 $x^2 = 2x$ 的解是_____.

13. 若最简二次根式 $\sqrt{x^2 - 3x}$ 与最简二次根式 $\sqrt{x + 5}$ 是同类二次根式, 则 x 的值为_____.

14. 若 m 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的一个根, 则代数式 $2m^2 - 4m - 2025$ 的值为_____.

15. 水由氢、氧两种元素组成, 一个水分子包含两个氢原子和一个氧原子, 1 个氢原子的质量约为 $1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个氧原子的质量约为 $2.657 \times 10^{-26} \text{ kg}$, 一个水分子的质量大约是_____ kg . (结果用科学记数法表示)



16. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 5x + 1 =$ _____.

17. 如果一元二次方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + 5x_1 - x_1x_2 + 2x_2 =$ _____.

18. 阅读下列材料:

当 x 为实数时, 求 $\frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$ 的最大值. 设 $y = \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$, 将其化为关于 x 的一元二次方程, 得

$(y-3)x^2 + (y-2)x + \frac{1}{4}y = 0$. 因为 x 为实数, 就是这个方程有实数根, 所以

$b^2 - 4ac = (y-2)^2 - 4(y-3) \times \frac{1}{4}y = -y + 4 \geq 0$, 得 $y \leq 4$, 即 $\frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$ 的最大值为 4, 则 x 为实数

时, $\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ 的最小值是_____.

三、解答题

19. 计算:

$$(1) \frac{1}{6} \sqrt{1\frac{3}{5}} \times \left(-5\sqrt{3\frac{3}{5}} \right) \div \left(-2\sqrt{\frac{1}{2}} \right);$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{3}-2} - (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}).$$

20. 解方程:

$$(1) (x-1)^2 - 3(x-1) = 0$$

(2) $\frac{1}{2}x^2 + x = 4$

(3) $3x^2 - x - 1 = 0$ (用配方法)

(4) $(x-1)(x+3) = 2$

21. 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 其中 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

22. 已知关于 x 的方程 $x^2 + \sqrt{b}x + \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a = 0$ 有两个相等的实数根, 且方程 $ax^2 + bx = 0$ 有一个根为 $x = -1$.

(1) 判断以 a 、 b 、 c 为边的三角形的形状, 并说明理由;

(2) 若方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 的两根为 a 、 b , 求 m 的值.

23. 已知数轴上有 A 、 B 、 C 、 D 四个点, 其中 A 、 B 分别表示 $1-\sqrt{3}$ 和 $1+\sqrt{3}$, 点 C 向左移动 4 个单位后与点 A 重合.

(1) 点 C 表示的数是_____;

(2) 对于数轴上三个点, 若其中两个点关于第三个点对称, 则称这三个点有“优美关系”. 如果点 A 、 B 、 D 有“优美关系”, 则点 D 表示的数为_____;

(3) 若点 C 所表示的数的整数部分为 x , 小数部分为 y , 求 $y^3 - 6y^2 + x + 8y - 2025$ 的值.

24. 已知关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 满足 $3a + 2b + c = 1$, 就把这个一元二次方程称为“波浪方程”.

(1) 判断方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 是不是“波浪方程”: _____; (填“是”或“不是”)

(2) 已知 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 是关于 x 的“波浪方程”, 它有一个根是 $x = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

(3) 若一个“波浪方程” $mx^2 + nx + p = 0$ 的两个根分别是 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 求 $p^2 - mn$ 的值.

25. 综合理解:

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 当 $b^2 - 4ac \geq 0$, 它有两个实数根 x_1 和 x_2 , 有以下关系式:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

(1) 设方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的两个根为 α 、 β , 则 $\alpha + \beta =$ _____, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ _____;

(2) 设关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 的两个实数根为 α 、 β ，且 $2\alpha + \beta = 4$ ，则 k 的值为_____；

(3) 已知 $\alpha\beta \neq 1$ ，且 $\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 0$ 及 $25\beta^2 + 20\beta + 1 = 0$ ，求 $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}$ 的值.