

2023-2024 学年上海市静安区市西初级中学八年级（上）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号填在括号内】

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{0.1a}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{a^2+1}$

2. 下列各式中，能与 $\sqrt{12}$ 合并的是（ ）

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{20}$ C. $\sqrt{27}$ D. $\sqrt{32}$

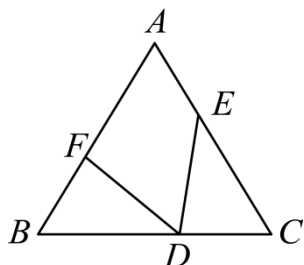
3. 下列方程中，是关于 x 的一元二次方程的是（ ）

- A. $x^2 = -1$ B. $x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0$
C. $3x^2 + x = (3x - 1)(x + 2)$ D. $ax^2 + bx + c = 0$

4. 已知三角形两边长分别为 4 和 8，第三边的长是一元二次方程 $x^2 - 14x + 40 = 0$ 的根，则这个三角形的周长为（ ）

- A. 16 B. 22 C. 24 D. 16 或 22

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $CD = BF$ ， $BD = CE$ ， $\angle A = 62^\circ$ ，则 $\angle EDF$ 的度数为（ ）



- A. 59° B. 60° C. 61° D. 62°

6. 下列命题中，真命题是（ ）

- A. 两边及一个角对应相等的两个三角形全等
B. 两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等
C. 两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等
D. 两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

7. 二次根式 $\sqrt{3x-5}$ 有意义，则 x 满足的条件是_____；

8. 化简: $\sqrt{(3-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 化简: $\sqrt{20a^3b^2} (b > 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

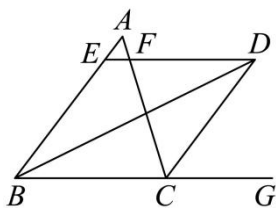
10. 不等式 $\sqrt{3}x - 2 < x$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 方程 $x^2 = 2x$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

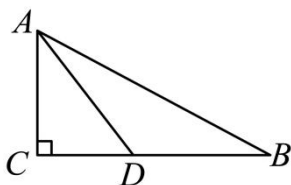
12. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + 2m = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 命题. (填“真”或“假”)

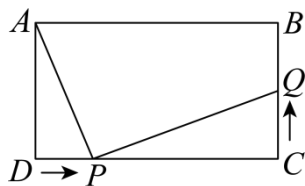
14. 如图, $\angle ABC$ 的平分线 BD 与外角 $\angle ACG$ 的平分线 CD 交于点 D , 过点 D 作 BC 的平行线交 AB 于点 E , 交 AC 于点 F , $BE = 10$, $CF = 8$, 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, $BC = 8$, $BD = 5$, 则点 D 到 AB 的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

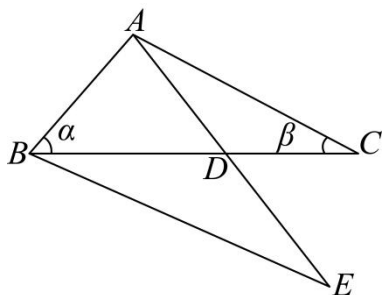


16. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AD = 6\text{cm}$, $DC = 8\text{cm}$, 点 P 从点 D 出发, 以 1cm/s 的速度在线段 DC 上运动, 点 Q 从点 C 出发以 $x\text{cm/s}$ 速度在线段 CB 上运动, 若点 P 、点 Q 同时出发, 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\triangle ADP$ 与 $\triangle PCQ$ 全等.



17. 已知 p 、 q 是实数, 有且只有三个不同的 x 满足方程 $|x^2 + px + q| = 3$, 则 q 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 如图, 在钝角 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC > 90^\circ$, $AB < AC$, 设 $\angle ABC = \alpha$, $\angle C = \beta$, 过点 A 的射线 l 交 BC 于点 D , 点 E 在 AD 延长线上, 且 $BC = BE$, $\angle E = \angle C$, 请写出 $\angle BAE$ 、 α 和 β 满足的数量关系: $\underline{\hspace{2cm}}$.



三、计算题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

19. 计算: $27^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2} - 1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$.

20. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} (x \neq y)$

四、解方程 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

21. 解方程: $4(1-x)^2 = 25$

22. $\sqrt{3}x(x-5) + 4(5-x) = 0$.

23. $x^2 + 10x - 9975 = 0$.

24. 解方程: $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

五、解答题 (本大题共 5 小题, 25、26、27 每题 6 分, 28、29 每题 9 分, 满分 36 分)

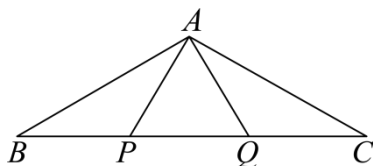
25. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + \frac{1}{4} = 0 (a \neq 0)$.

(1) 若方程有两个相等的实数根, 试写出一组满足条件的 a 、 b 的值;

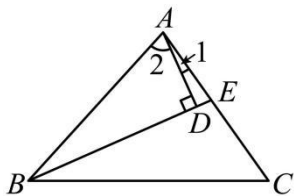
(2) 当 $a > 1, 0 < b < 1$ 时, 试判断方程根的情况.

26. 已知: 如图, P 、 Q 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上两点, 且 $AB = AC$, $AP = AQ$.

求证: $BP = CQ$.



27. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 是 $\angle ABC$ 的平分线, $AD \perp BE$, 垂足为 D . 求证: $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$.



28. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AC 的中点.

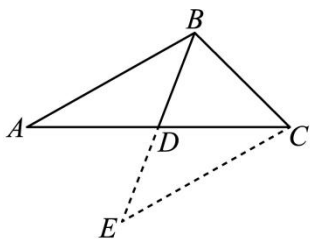


图1

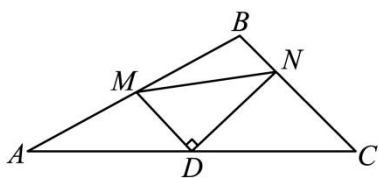


图2

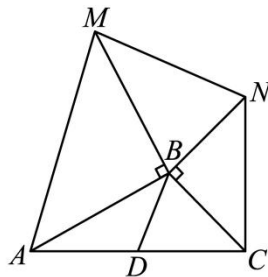


图3

(1) 如图 1，连接 BD ，若 $AB = 6$ ， $BC = 4$ 求中线 BD 的取值范围. 小明是这样思考的：延长 BD 至 E ，使 $DE = BD$ ，连接 CE ，利用三角形全等将边 AB 转化到 CE ，在 $\triangle BCE$ 中利用三角形三边关系即可求出中线 BD 的取值范围. 在这个过程中，小明证明三角形全等用到的判定方法是：_____；中线 BD 的取值范围是_____；

(2) 如图 2，点 M 在边 AB 上，点 N 在边 BC 上，若 $DM \perp DN$ ，试猜想线段 AM 、 CN 、 MN 能否构成三角形，并证明你的结论；

(3) 如图 3， $AB = MB$ ， $BC = BN$ ， $\angle ABM = \angle NBC = 90^\circ$ ，连接 MN ，探索 BD 与 MN 的关系，并说明理由.

29. 阅读材料：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根均为整数，则称方程为“快乐方程”. 通过计算发现，任意一个“快乐方程”的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 一定为完全平方数. 现规定

$F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 为该“快乐方程”的“快乐数”. 例如“快乐方程” $x^2 - 3x - 4 = 0$ ，的两根均为整数，其“快乐数” $F(1, -3, -4) = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}$ ，若有另一个“快乐方程” $px^2 + qx + r = 0$ ($p \neq 0$) 的“快乐数” $F(p, q, r)$ ，且满足 $|r \cdot F(a, b, c) - c \cdot F(p, q, r)| = 0$ ，则称 $F(a, b, c)$ 与 $F(p, q, r)$ 互为“开心数”.

(1) “快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”为_____；

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ (m 为整数，且 $1 < m < 6$) 是“快乐方程”，求 m 的值，并求该方程的“快乐数”；

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 与 $x^2 - (n + 2)x + 2n = 0$ (m 、 n 均为整数) 都是 “快乐方程”，且其 “快乐数” 互为 “开心数”，求 n 的值.