

## 第 21 章阶段测试卷 (二) 一元二次方程的 判别式及根与系数的关系

### 一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列所给方程中, 没有实数根的是 ( )

A.  $x^2 + 2x = 0$

B.  $5x^2 - 4x - 2 = 0$

C.  $x^2 - 4x + 1 = 0$

D.  $x^2 - x + 1 = 0$

2. 关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + (a+2)x + 1 = 0 (a \neq 0)$  的根的情况是 ( )

A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根 C. 无实根 D. 不确定

3. 关于  $x$  的一元二次方程  $(k-1)^2 x^2 + (2k+1)x + 1 = 0$  有两个实数根, 则  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $k > \frac{1}{4}$  且  $k \neq 1$

B.  $k \geq \frac{1}{4}$  且  $k \neq 1$

C.  $k > \frac{1}{4}$

D.  $k \geq \frac{1}{4}$

4. 已知  $x=2$  是方程  $x^2 - mx - 2 = 0$  的一个根, 则另一个根为 ( )

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

5. 已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$  的两个不相等的实数根, 且

$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 6 = 0$ , 则  $m$  的值是 ( )

A.  $-\frac{5}{4}$

B. -2

C.  $\frac{2}{3}$

D. -2 或  $\frac{2}{3}$

6. 对于一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ , 下列说法:

①若  $a-b+c=0$ , 则  $b^2 - 4ac \geq 0$ ;

②若方程  $ax^2 + c = 0$  有两个不相等的实根, 则方程  $ax^2 + bx + c = 0$  必有两个不相等的实根;

③若  $c$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的一个根, 则一定有  $ac + b + 1 = 0$  成立;

④若  $x_0 + 1$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根, 则  $b^2 - 4ac = (2ax_0 + 2a + b)^2$ .

其中正确的是 ( )

A. ①②

B. ①②③

C. ①②④

D. ①②③④

### 二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 一元二次方程  $x^2 - 4x - 7 = 0$  的根的判别式的值为\_\_\_\_\_.

8. 关于  $x$  的方程  $x^2 + (m+2)x + m = 0$  的根的判别式的值为 5, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

9. 若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有两个相等的实数根, 则  $b^2 - 4(ac - 1)$  的值为\_\_\_\_\_.
10. 已知二元一次方程  $x^2 - 2x - m = 0$  的两根之积为  $-3$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
11. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2mx + 3 = 0$  的一个解是  $x_1 = 1$ , 则方程的另一个解  $x_2 =$ \_\_\_\_\_.
12. 若方程  $x^2 - \sqrt{k-1}x - 1 = 0$  有两个不相等的实数根, 则  $k$  的取值范围\_\_\_\_\_.
13. 若关于  $x$  的方程  $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$  无实根, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
14. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (k^2 - 9)x + k + 2 = 0$  的两个实数根互为相反数, 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.
15. 如果一元二次方程  $x^2 + 4x - 2 = 0$  的两个根为  $x_1, x_2$ , 则  $x_1^2 + 6x_1 - x_1x_2 + 2x_2 =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知实数  $m, n (m \neq n)$  满足  $2m^2 - 3m - 1 = 0, 2n^2 - 3n - 1 = 0$ , 则  $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$  的值为\_\_\_\_\_.
17. 等腰三角形的一边长是 3, 另两边的长是关于  $x$  的方程  $x^2 - 5x + k = 0$  的两根, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
18. 若方程  $x^2 + bx + 1 = 0$  与方程  $x^2 - x - b = 0$  至少有一个相等的实数根, 那么实数  $b$  的值为\_\_\_\_\_.

### 三、简答题 (第 19~22 题每题 6 分, 第 23、24 题每题 8 分, 第 25、26 题每题 12 分, 共 64 分)

19. 已知关于  $x$  的方程  $2x^2 - (b^2 - 3b - 4)x + b = 0$  有两个互为相反数的实数根, 求  $b$  的值.
20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2x - k = 0$  有两个实数根.
- (1) 求  $k$  的取值范围;
  - (2) 若方程有一个根为 2, 求方程的另一根.
21. 如果一元二次方程  $x^2 - 3x + 1 = 0$  的两实数根分别为  $x_1, x_2$ , 不解方程, 求下列代数式的值.
- (1)  $x_1^2 + x_2^2$ ; (2)  $(x_1 - 2)(x_2 - 2)$ .
22. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (k + 4)x + 4k = 0$ .
- (1) 求证: 该方程总有两个实数根;
  - (2) 若该方程有一个根小于 1, 求  $k$  的取值范围.
23. 实数  $k$  使关于  $x$  的方程  $x^2 + 2kx + k^2 = x + 1$  有两个实数根  $x_1, x_2$ . 若  $(3x_1 - x_2)(x_1 - 3x_2) = 19$ , 求  $k$  的值.
24. 若关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + k = 0$  有两个不相等的实数根, 请判断关于  $x$  的方程  $(k - 2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$  的根的情况.

25. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$ , 如果  $a, b, c$  满足  $3a + 2b + c = 1$ , 我们就称这个一元二次方程为波浪方程.

(1) 判断方程  $x^2 + 3x - 8 = 0$  是否为波浪方程, 并说明理由.

(2) 已知关于  $x$  的波浪方程  $ax^2 + bx - 1 = 0$  的一个根是  $x = 2$ , 求  $a, b$  的值;

(3) 若一个波浪方程  $mx^2 + nx + p = 0$  的两个根分别为  $x_1 = 1, x_2 = 2$ , 求这个波浪方程.

26. 类比是探索发现的重要途径, 是发现新问题、新结论的重要方法.

**学习再现:**

设一元二次方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个根分别为  $x_1$  和  $x_2$ ,

那么  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ ,

比较系数得  $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = q$ .

**类比推广:**

(1) 设  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的三个根分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 求  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$  的值.

**问题解决:**

(2) 若  $x^3 - 5x^2 - 12x - 3 = 0$  的三个根分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  的值是\_\_\_\_\_.

**拓展提升:**

(3) 已知实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 0$ , 且  $abc = \frac{27}{4}$ , 求正数  $b$  的最小值.