

2025 学年第一学期八年级期中评价

数学学科试卷

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

考生注意:

1. 本卷有 4 大题, 共 26 小题.

2. 试卷满分 100 分. 考试时间 100 分钟.

3. 按要求在答题纸上作答, 在试卷、草稿纸上答题一律无效.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. 下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{1}{2025}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 、 $5.\dot{2}\dot{6}$, 其中无理数有 () 个

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

2. 下列说法正确的是 ()

A. 2 是 -4 的算术平方根

B. ± 4 是 16 的算术平方根

C. $(-6)^2$ 的平方根是 ± 6

D. 1 的平方根是它本身

3. 下列说法中正确的有 ()

① $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ 都是无理数;

② 无理数包括正无理数、负无理数和零;

③ 实数分为正实数和负实数两类;

④ 绝对值最小的实数是 0;

⑤ 一个数的平方根等于它本身, 这个数是 0 或 1; ⑥ 有理数与数轴上的点一一对应.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

4. 下列等式中, 从左到右的变形过程正确的是 ()

A. $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1}$

B. $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

C. $\sqrt{(a-1)^2} = a-1$

D. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

5. 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7} - x + 3 = 0$, 是关于 x 的一元二次方程, 那么 m 的值为 ()

A. ± 3

B. 3

C. -3

D. 0

6. 已知 x 是无理数, 但 $(x+3)(x-5)$ 是有理数, 则下列各式中是有理数的是 ().

A. $x^2 - 15$

B. $(x-3)(x+5)$

C. $(x+1)^2$

D. $(x-1)^2$

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

8. 珠穆朗玛峰的最新雪面高度为 8848.86 米, 将数据 8848.86 用科学记数法表示为_____.

9. 比较大小: $-3\sqrt{2}$ _____ $-2\sqrt{3}$ (填“>”或“<”或“=”).

10. 方程 $4x^2 = 2x$ 的解是_____.

11. 若代数式 $\frac{x\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

12. 若 $6.24 \approx 2.498^2$, $62.4 \approx 7.899^2$, 则 $\sqrt{0.624} \approx$ _____.

13. 如果最简根式 $\sqrt{x^2-6x}$ 与 $\sqrt{5-2x}$ 是同类二次根式, 则 $x =$ _____.

14. 解不等式: $\sqrt{3}x - 3 < 2x$ 的解集是 _____.

15. 已知 $ab > 0$, 化简二次根式 $a\sqrt{\frac{-b}{a^2}}$ 的正确结果是_____.

16. 化简: $\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}} =$ _____.

17. 已知实数 a 满足 $|2025-a| + \sqrt{a-2026} = a$, 那么 $a - 2025^2$ 的值是_____.

18. 对于有理数 a, b , 定义 $\min\{a, b\}$ 的含义为: 当 $a < b$ 时, $\min\{a, b\} = a$, 例: $\min\{1, -2\} = -2$. 已知 $\min\{\sqrt{40}, a\} = a$, $\min\{\sqrt{40}, b\} = \sqrt{40}$, 且 a 和 b 为两个连续正整数, 则 $a+b$ 的平方根是_____.

三、简答题 (满分 24 分)

19. 计算

$$(1) \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \times \sqrt{3} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$(2) 2a\sqrt{\frac{b}{9a}} - b\sqrt{\frac{a}{4b}} + \frac{1}{a}\sqrt{a^3b} - \frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \quad (\text{其中 } a > 0, b > 0)$$

$$(3) \frac{5}{b}\sqrt{ab^3} \times \left(-\frac{2}{5}\sqrt{ab} \right) \div \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4b}{a}} \quad (\text{其中 } a > 0, b > 0)$$

$$(4) \left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \frac{m-2\sqrt{mn}+n}{\sqrt{n}-\sqrt{m}} \right) \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \quad (\text{其中 } m \geq 0, n \geq 0, m \neq n)$$

20. 解下列方程:

(1) $5(x-3) = 2x(x-3)$

(2) $(2x+1)^2 - 7(2x+1) = -12$

(3) 解关于 x 的方程: $x^2 - x + n = 2$ (用配方法)

(4) $x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$;

四. 解答题. (本大题共 6 题, 21-22 题 6 分, 23-24 每题 7 分, 25 每题 6 分, 26 题 8 分, 满分 40 分)

21. 如图 1, 由 5 个边长为 1 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼可以拼成一个大正方形 $ABCD$.

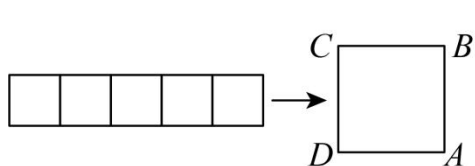


图 1

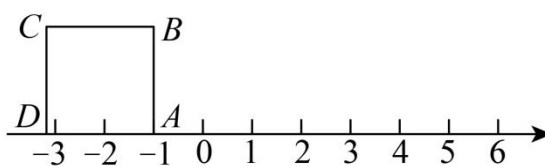


图 2

(1) 则大正方形 $ABCD$ 的边长为_____;

(2) 将图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 如图 2, 点 A 表示的数为 -1 , 若正方形从当前状态沿数轴正方向翻滚, 把点 B 翻滚到数轴上时, 记为第一次翻滚; 点 C 翻滚到数轴上时记为第二次翻滚, 经过三次翻滚, 点 D 滚到数轴上的点 P 时, 点 P 表示的数为_____;

(3) 是否存在正整数 n , 使得该正方形经过 n 次翻滚后, 其顶点 A 、 B 、 C 、 D 中某个点与数轴上的 2025 重合? 答: _____ (填“存在”或“不存在”);

(4) 在 (2) 的基础上以数 2 对应的点为折点, 将数轴向右对折, 则点 D 与数_____对应的点重合.

22. 已知 $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 求下列代数式的值.

(1) $x^2 - xy + y^2$

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

23. 已知 $5 + \sqrt{11}$ 的小数部分为 a , $5 - \sqrt{11}$ 的小数部分为 b .

先化简, 再求值: $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \left(\frac{ab\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ab}}$.

24. 数学教育家波利亚曾说: 对一个数学问题, 改变它的形式, 变换它的结构, 直到发现有价值的东西, 这是数学解题的一个重要原则. 有这样一类题目: 如何将双重二次根式 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 化简, 如果你能找到两个数

m, n , 使 $m^2 + n^2 = a$ 且 $mn = \sqrt{b}$, 则 $a \pm 2\sqrt{b}$ 可变形为 $m^2 + n^2 \pm 2mn$, 即 $(m \pm n)^2$, 从而使 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 得以化简. 例如:

$$\because 5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\therefore \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

请用上述方法探索并解决下列问题:

(1) 化简: $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$;

(2) 化简: $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;

(3) 若 $a + 10\sqrt{3} = (x + \sqrt{3}y)^2$, 且 a, x, y 为正整数, 求 a 的值.

25. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + 2x - m - 1 = 0$ 的根都是整数, 求实数 m 的所有整数值和方程的整数根.

26. 问题: 已知方程 $x^2 + x - 1 = 0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的 2 倍.

解: 设所求方程的根为 y , 则 $y = 2x$, 所以 $x = \frac{y}{2}$, 把 $x = \frac{y}{2}$, 代入已知方程, 得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2} - 1 = 0$.

化简, 得 $y^2 + 2y - 4 = 0$, 故所求方程为 $y^2 + 2y - 4 = 0$.

这种利用方程根的代换求新方程的方法, 我们称为“换根法”.

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程 (要求: 把所求方程化为一般形式).

(1) 已知方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的相反数, 则所求方程为_____;

(2) 已知关于 y 的一元二次方程 $cy^2 + by + a = 0$ 的根 ($c \neq 0$, 有两个不等于零的实数根) 分别是某个已知一元二次方程的根的倒数, 求该已知的一元二次方程.

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $(m^2 + 4)x^2 + (4m + 8)x + 4 = 0$ ($m \leq 15$) 有两个不等于零的实数根, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的倒数且它的两个根都为整数.