

市北初级中学北校 2024 学年第一学期八年级数学期中卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 120 分)

2024. 11

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各式, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{\frac{1}{6}}$

2. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-1, 6)$, 那么该反比例函数图象也一定经过点 ()

- A. $(3, 2)$ B. $(1, 6)$ C. $(-2, 3)$ D. $(-1, -6)$

3. 下列方程中① $3x^2 + x = 20$; ② $2x + y = 3$; ③ $x^2 - \frac{1}{x} = 4$; ④ $x^2 = 1$; ⑤ $ax^2 + 3x = 0$, 一元二次方程有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

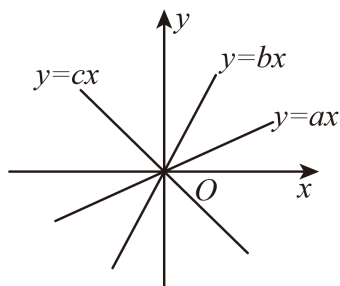
4. 下列关系中, 属于成正比例函数关系的是 ()

- A. 正方形的面积与边长 B. 从甲地到乙地, 所用的时间和行驶速度
C. 圆的面积与它的半径 D. 等边三角形的周长和边长

5. 将式子 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 根式外的因式移到根式内的结果是 ()

- A. $\sqrt{-a}$ B. $-\sqrt{a}$ C. $-\sqrt{-a}$ D. $\sqrt{a}$

6. 如图, 三个正比例函数的图像分别对应的解析式是: ① $y = ax$, ② $y = bx$, ③ $y = cx$, 下列用 “<” 表示 a, b, c 的不等关系正确的是 ()



- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $a < c < b$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的定义域是_____.

8. 化简: $\sqrt{\frac{-8a}{b}} (b < 0)$ _____.

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根是 $x = -1$, 则 $2024 - a + b$ 的值是_____.

10. 若 $y = (m-2)x^{|m|-1}$ 是关于 x 的正比例函数, 则实数 $m =$ _____.

11. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根, 则 m 的取值范围是_____.

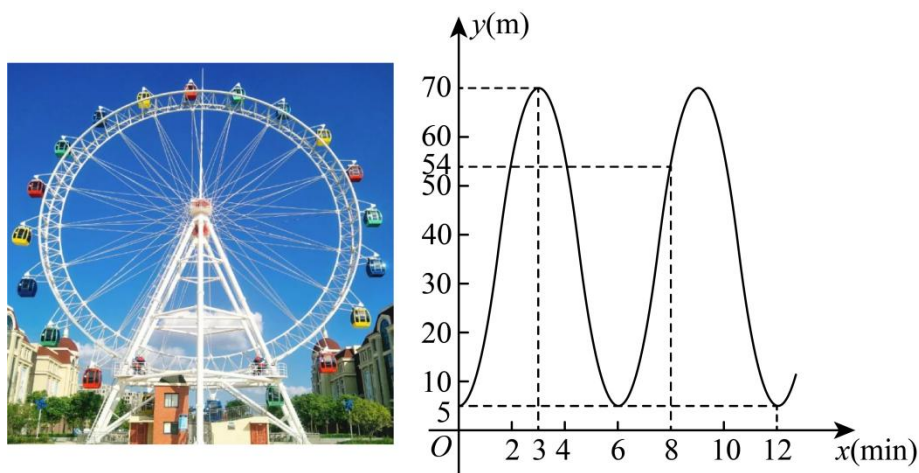
12. 某商场销售一批名牌衬衫, 平均每天可售出 20 件, 每件盈利 40 元, 商场经调查发现, 如果每件衬衫降价 2 元, 商场平均每天可多售出 4 件, 若商场平均每天想盈利 1000 元, 设每件衬衫应降价 x 元, 可列出方程为_____.

13. 一元二次方程 $(x-1)^2 = 9$ 的根是_____.

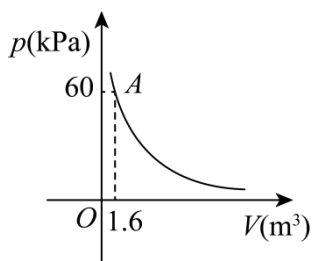
14. 等式 $\sqrt{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是_____.

15. 在实数范围内因式分解: $3x^2 - xy - y^2 =$ _____.

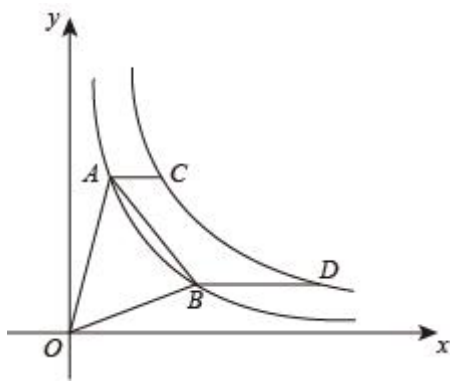
16. 宁化儿童公园的摩天轮可抽象成图中的一个圆, 圆上一点离地面的高度 $y(\text{m})$ 与旋转时间 $x(\text{min})$ 之间的关系如图所示. 根据图中的信息, 摩天轮的直径为_____.



17. 当温度不变时, 某气球内的气压 $p(\text{kPa})$ 与气体体积 $V(\text{m}^3)$ 成反比例函数关系 (其图像如图所示), 已知当气球内的气压 $p > 120 \text{kPa}$ 时, 气球将爆炸, 为了安全起见, 气球内气体体积 V 满足的条件是_____.



18. 如图, A, B 两点在双曲线 $y_1 = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上, C, D 两点在双曲线 $y_2 = \frac{m}{x} (m > 1, x > 0)$ 上, 若 $AC \parallel BD \parallel x$ 轴, 且 $BD = 2AC$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.



三、简答题 (本大题共 5 题, 19–22 每题 6 分, 23 题 8 分, 满分 32 分)

19. 计算: $\left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$.

20. 计算: $\sqrt{3a^2} \div 3\sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{3}}$

21. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x - 5 = 0$

22. 解方程: $3(x-1)^2 = x^2 - 1$

23. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值.

四、解答题 (本大题共 4 题, 24–26 题每题 8 分, 27 题 10 分, 满分 34 分)

24. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (k+8)x + 8 = 0$.

(1) 求证: 无论 k 取任何实数, 方程总有实数根;

(2) 若等腰三角形的一边长为 4, 另两边长恰好是这个方程的两个根, 求此时的 k 值.

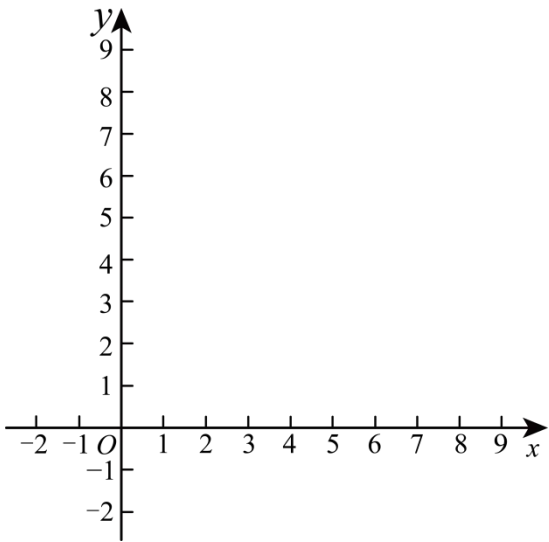
25. 已知函数 $y = y_1 + y_2$, 其中 y_1 与 x 成反比例, y_2 与 x 成正比例, 函数的自变量 x 的取值范围是 $x \geq \frac{1}{2}$, 且当 $x = 1$ 或 $x = 4$, y 的值均为 $\frac{3}{2}$.

请对该函数及其图像进行如下探究：

- (1) 求该函数的解析式；
- (2) 函数图像探究：根据解析式完成下表：

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
y	$\cdots$	$8\frac{1}{2}$	5	4	①	5	$5\frac{4}{5}$	②	$7\frac{4}{7}$	$8\frac{1}{2}$	$\cdots$

根据表中数据，在如图所示的平面直角坐标系中描点，并画出函数的大致图像．



26. 请阅读下列材料，并按要求完成相应的任务：

人类对一元二次方程的研究经历了漫长的岁月，我国古代三国时期的数学家赵爽给出了一元二次方程的几何解法．赵爽在其所著的《勾股圆方图注》中记载了解方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 的方法．首先构造了如图1所示的图形，图中的大正方形面积可以表示为 $(x+x+5)^2$ ，其中四个全等的小矩形面积分别为 $x(x+5)=14$ ，中间的小正方形面积为 5^2 ，所以大正方形的面积又可表示为 $4\times 14+5^2$ ，据此易得 $x=2$ ．

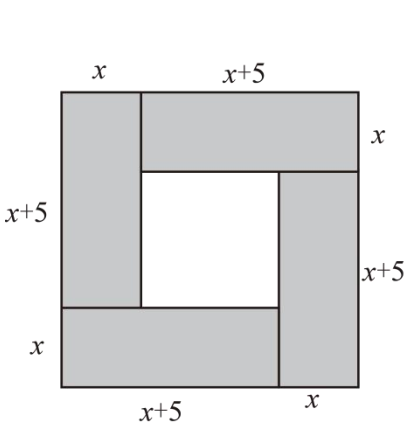


图1

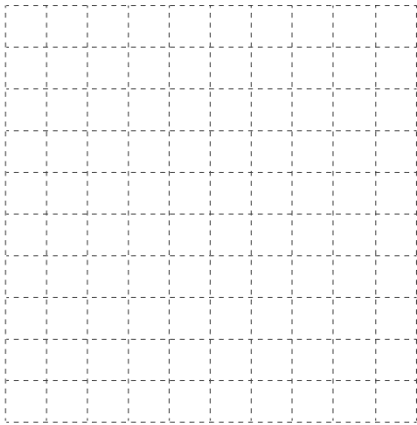
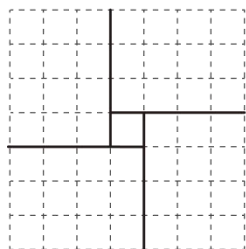


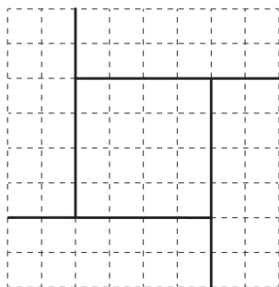
图2

任务：

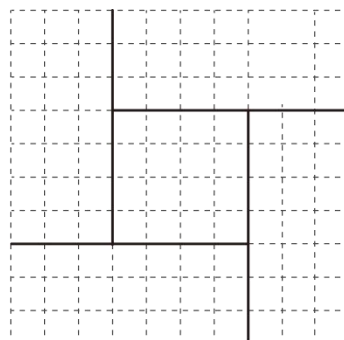
(1) 参照上述图解一元二次方程的方法，请在下面三个构图中选择能够说明方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的正确构图是_____ (从序号①②③中选择)；



①



②



③

(2) 一个长方形的长比宽长 2 米，且该长方形的面积为 15 平方米，则长方形的宽为多少？请列出方程并求解；

(3) 通过对上述材料的学习，尝试用几何法求解在第 (2) 题中你所列出的方程，在图 2 的网格中设计正确的构图。

27. 如图，正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 落在 x 轴正半轴上，点 C 落在正比例函数 $y = kx$ ($k > 0$) 上，点 D 落在直线 $y = 2x$ 上，且点 D 的横坐标为 a 。

(1) 直接写出 A 、 B 、 C 、 D 各点的坐标 (用含 a 的代数式表示)；

(2) 求出 k 的值；

(3) 将直线 OC 绕点 O 旋转，旋转后的直线将正方形 $ABCD$ 的面积分成 1: 3 两个部分，求旋转后得到的新直线解析式。

