

存志学校 2024 学年第一学期初二数学阶段测试卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 在下列方程中, 整理后是一元二次方程的是 ()

A. $3x^2 = (x-2)(3x+1)$

B. $(x-2)(x+2)+4=0$

C. $x(x^2-1)=0$

D. $\frac{1}{x^2}+x+3=1$

2. 在下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.2a}$

B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

C. $\sqrt{a^2+a^4}$

D. $\sqrt{a^2-b^2}$

3. 已知 $a>0$, $b>0$, 下列二次根式中, 与 $\sqrt{ab}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{2}{ab}}$

B. $\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}}$

C. $\sqrt{\frac{b}{a}}$

D. $\sqrt{a^2b^3}$

4. 化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}}$, 结果是 ()

A. $\sqrt{a+1}$

B. $-\sqrt{a-1}$

C. $-\sqrt{-a-1}$

D. $-\sqrt{-a+1}$

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2-2x+m^2-2m-3=0$ 有一根为零, 则 m 的值为 ()

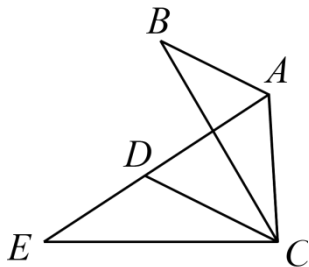
A. -1 或 3

B. 3

C. -1

D. 0

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \neq AC$, $\angle BAC=120^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转, 点 A 、 B 分别落在点 D 、 E 处, 如果点 A 、 D 、 E 在同一直线上, 那么下列结论错误的是 ()



A. $\angle ADC=60^\circ$

B. $\angle ACD=60^\circ$

C. $\angle BCD=\angle ECD$

D. $\angle BAD=\angle BCE$

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 若二次根式 $\sqrt{3x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____

8. 比较大小 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ _____ $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$

9. 写出 $\sqrt{a+b}$ 的一个有理化因式 _____

10. 化简: $\sqrt{20a^3b^2} (b > 0) =$ _____.

11. 已知 $(m-1)x^{m^2+1} - 3x + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 $m =$ _____

12. 设 $3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 x , 小数部分为 y , 则 $x + y + \frac{2}{y}$ 的值是 _____.

13. 如果最简根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式, 那么 $m =$ _____.

14. 若等式 $\sqrt{2x^2-x^3} = x\sqrt{2-x}$ 成立, 则 x 的取值范围是 _____.

15. 数轴上与 1, $\sqrt{3}$ 对应的点分别为 A, B , 点 B 关于点 A 的对称点为点 C , 设点 C 表示的数为 x , 则

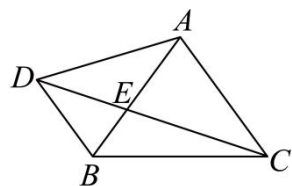
$|x - \sqrt{3}| + \frac{1}{x} =$ _____

16. 对于实数 a, b , 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab (a \geq b) \\ ab - b^2 (a < b) \end{cases}$. 例如 $4 * 2$, 因为 $4 > 2$, 所以

$4 * 2 = 4^2 - 4 \times 2 = 8$. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根, $x_1 * x_2 =$ _____.

17. 若 $m = \frac{2022}{\sqrt{2023}-1}$, 则 $m^3 - 3m^2 - 2020m + 2021$ 的值是 _____

18. 如图, 已知等腰 ABC , $AB = AC$, 将 AB 绕点 A 顺时针旋转, 点 B 落在点 D 处, 且 $BD \parallel AC$, 连接 CD 交 AB 于点 E , 如果 $CE = AC$, 那么 $\angle BAC =$ _____ 度.



三、解答题 (共 96 分)

19. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{\frac{3x^3}{4y}} (x < 0)$

(2) $\sqrt{\frac{(a+1)^3}{5b^3}} (a < -1)$

20. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 2\left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{6}\right)$

21. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

22. 计算: $\frac{4x}{3}\sqrt{18xy} - 2x^2y^2\sqrt{\frac{2}{xy^3}} + 6xy\sqrt{\frac{x}{8y}} (x < 0)$

23. 解不等式: $x + \sqrt{12} > \sqrt{3}x + \sqrt{27} + 1$, 并求出它的最大整数解.

24. 用适当的方法解下列方程:

(1) $4(2x-3)^2 = 36$

(2) $(3x-1)(x+2) = 20$

(3) $\frac{x^2+1}{2} + \frac{x}{3} = 1$

(4) $x(x-3)(x+3)(x+6) = 40$

25. 用配方法解方程: $2x^2 - 6x - 3 = 0$.

26. “分母有理化”是我们常用的一种化简方法, 除此之外, 我们也可以用平方之后再开方的方式来化简一些有特点的无理数, 如: 对于 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 设 $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 易知 $\sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{3-\sqrt{5}}$, 故 $x > 0$.

由 $x^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 2$,

解得 $x = \sqrt{2}$, 即 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

根据以上方法, 求 $\sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$ 的值.

27. 已知 $y = \sqrt{(x-4)^2} - x + 5$, 当 x 分别取 1, 2, 3, ..., 2024 时, 求所对应 y 值的总和.

28. 已知 k 为非负实数, 关于 x 的方程 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 和 $kx^2 - (k+2)x + k = 0$.

(1) 试证: 前一个方程必有两个非负实数根;

(2) 当 k 取何值时, 上述两个方程有一个相同的实数根.

29. 先观察下列等式, 再回答问题:

① $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2};$

$$\textcircled{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

$$\textcircled{3} \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4};$$

...

(1) 请你利用上述规律计算 $\sqrt{\frac{37}{36} + \frac{1}{49}}$ (仿照上式写出过程);

(2) 请你按照上面各等式反映的规律, 写出一个用 n (n 为正整数) 表示的等式_____;

(3) 请你利用发现的规律, 计算:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2022^2} + \frac{1}{2023^2}} - 2024$$

30. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 E 为射线 CB 上一动点, 联结 AE , 作 $AF \perp AE$, 且 $AF = AE$.

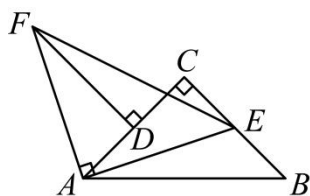


图1

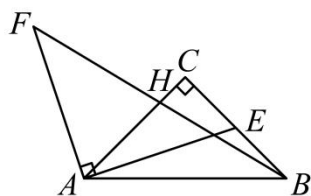


图2

(1) 如图 1, 过点 F 作 $FD \perp AC$, 垂足为 D .

①说明: $\triangle FDA \cong \triangle ACE$.

②连接 BF 交 AC 于点 G , 说明: G 是 CD 中点.

(2) 如图 2, 连接 BF 交 AC 于点 H , 若 $\frac{AH}{CH} = 3$, 求证: E 是 BC 的中点.