

2025 学年第一学期民办南模中学 10 月能力诊断

初二年级 数学学科

考试时间：90 分钟

卷一（满分：100 分）

一、选择题（每题 2 分，共 8 分）

1. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是（ ）

A. $x^2 - x + 1 = 0$

B. $x^2 - mx - 1 = 0$

C. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - x - m = 0$

2. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{a}$

B. $\sqrt{4a}$

C. $\sqrt{2a^2}$

D. $\sqrt{8a}$

3. 下列说法中正确的个数是（ ）

①方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 的两个实根的积为 2

②关于 x 的方程 $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$ 有两个实数根

③方程 $5x^2 = x$ 的根为 $x = \frac{1}{5}$

④关于 x 的方程 $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$ 无论 m 取何值一定有两个不相等的实数根

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

4. 能使等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的 x 的取值范围是（ ）

A. $x \neq 2$

B. $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$

C. $0 \leq x < 2$

D. $x > 2$

二、填空题（每空 2 分，共 32 分）

5. 一元二次方程 $\sqrt{5}x^2 = \sqrt{3}x$ 的解是_____.

6. $\sqrt{0.16}$ 的平方根是_____.

7. 最简二次根式 $\sqrt{a+3b}$ 与 $\sqrt[4]{2a-b+6}$ 是同类二次根式，则 $a =$ _____, $b =$ _____.

8. 如果 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} - 2$ ，那么 $x^y =$ _____.

9. 化简： $\sqrt{-a^3} - a^2 \sqrt{-\frac{1}{a}} =$ _____.

10. 用科学记数法将 4298207292 保留三个有效数字_____.

11. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2+x+m^2-2m-3=0$ 有一个根为 0, 则 m 的值为_____.

12. 当 k _____ 时, 方程 $kx^2-3x+1=0$ 有两个实根.

13. 关于 x 的方程 $x^2+2kx+(k-2)^2=x$, 若方程有两个相等的实根, 则 $k=$ _____.

14. 关于 x 的方程 $x^2-3x+m=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍, 则 $m=$ _____.

15. 在实数范围内因式分解:

(1) $x^2-3x-1=$ _____;

(2) $-2x^2y^2+8xy-5=$ _____.

16. 我国西部某地决定加快植树造林的速度, 如果计划用两年的时间将防风林的面积从现在的 2 万亩扩大到 2.42 万亩, 则这两年平均每年的增长率为_____.

17. 小杰将 1000 元压岁钱按一年定期存入银行, 到期后取出 200 元用来购买学习用品, 剩下的 800 元和应得的利息又全部按一年定期存入银行. 若存款的年利率为 x , 这样到期后账户里有 892.5 元, 由题意可列方程: _____.

18. “两个一元二次方程有且只有一个公共根, 这两个方程叫做互为好友方程, 这两个公共根叫做好友根.”

例如 $x^2-x-2=0$ 和 $x^2-2x-3=0$ 就是互为好友方程, 好友根为 $x=-1$. 如果 $x^2-1=0$ 和

$ax^2-x-2=0$ 就是互为好友方程, 那么 $a=$ _____.

三、计算题 (每题 4 分, 共 28 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\sqrt{12}-(\sqrt{3}+1)^2-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

20. $\frac{2}{b}\sqrt{ab}\cdot\left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^3b}\right)\div\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$

21. 用配方法解方程: $2x^2+x-2=0$

22. 解方程: $\frac{1}{2}x-1=2x^2$

23. 解方程: $(2x-1)^2+(1-2x)=2$

24. 解方程: $x^2+5x-m^2+m+6=0$

25. 在实数范围内因式分解: $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9$

四、解答题 (共 32 分)

26. 已知 $\sqrt{2a+1}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{5-2a}}$ 都有意义, 且 a 是整数, 试解关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5 = x(ax - 2) - 2$.

27. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有实数根,

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 x_1 、 x_2 分别是一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 的两个实数根, 是否存在实数 k , 使得

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$, 若存在, 请求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由.

28. 设等腰三角形的三条边长分别为 a 、 b 、 c . 已知 $a = 2$, b 、 c 是关于 x 的方程 $x^2 + kx + 16 = 0$ 的两个根, 求 k 的值以及另两边的长.

29. 某商店从厂家以每件 21 元的价格购进一批商品, 该店可以自行定价, 若每件商品售价为 a 元, 则可以卖出 $(350 - 10a)$ 件; 但物价局限定每件商品加价不能超过进价的 20%, 如果商店计划要赚 400 元, 那么每件商品售价是多少元?

30. 定义: 已知 x_1 , x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根, 若 $x_1 < x_2 < 0$, 且

$3 < \frac{x_1}{x_2} < 4$, 则称这个方程为“限根方程”. 如: 一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 的两根为 $x_1 = -10$, $x_2 = -3$,

因 $-10 < -3 < 0$, $3 < \frac{-10}{-3} < 4$, 所以一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 为“限根方程”.

请阅读以上材料, 回答下列问题:

(1) 判断一元二次方程 $x^2 + 9x + 14 = 0$ 是否为“限根方程”, 并说明理由;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”, 且两根 x_1 、 x_2 满足

$x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$, 求 k 的值;

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (1-m)x - m = 0$ 是“限根方程”, 求 m 的取值范围.

卷二 (20 分)

31. 已知 a 、 b 都是质数, 且 $a^2 - 13a + m = 0$, $b^2 - 13b + m = 0$, 试求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} =$ _____.

32. 若关于 x 的方程 $2x^2 + (2m-3)x - m = 0$ 的一根大于 2, 一根小于 2, 则 m 的范围是 _____.

33. 已知 $a + b + \frac{1}{2}c - 2\sqrt{a-1} - 4\sqrt{b-2} - 3\sqrt{c-3} = -5$, 则 $(a+b) \cdot c =$ _____.

34. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + 3m = 0$ 的两个根之差 $x_1 - x_2 = 4$ ，而关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + 6m - 9 = 0$ 的两根都大于 x_2 且小于 x_1 ，则 $m =$ _____.