

2024-2025 学年上海市徐汇区南洋模范中学八年级（上）期中数学试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 在下列各式中，是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ C. $\sqrt{a^2 + 4a^4}$ D. $\sqrt{4a^2 - b^2}$

2. 根式 $\sqrt{\frac{1}{27}}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}$ 中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的有（ ）个

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是（ ）

- A. $x^2 - x + 1 = 0$ B. $x^2 - mx - 1 = 0$

- C. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$ D. $x^2 - x - m = 0$

4. 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 每个命题不一定都有逆命题
B. 每个定理都有逆定理
C. 真命题的逆命题仍是真命题
D. 假命题的逆命题未必是假命题

5. 下列命题中是真命题的是（ ）

- A. 有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形全等
B. 两条平行直线被第三条直线所截，则一组同旁内角的平分线互相垂直
C. 三角形的一个外角等于两个内角的和
D. 等边三角形既是中心对称图形，又是轴对称图形

6. 下列从左到右的变形不一定正确的是（ ）

- A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ B. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}$
C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. $\sqrt{x} + 1$ 的一个有理化因式是 _____.

8. 化简： $\sqrt{4ab^3}$ （其中 $a > 0$ ）= _____.

9. 若 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 1$, 则 $xy^{\frac{1}{2}} =$ _____.

10. 将命题“同角的余角相等”, 改写成“如果…, 那么…”的形式_____.

11. 若最简二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式, 则 $a-2b =$ _____.

12. 计算: $(\sqrt{3}+2)^{2023} \times (\sqrt{3}-2)^{2024} =$ _____.

13. 不等式 $\sqrt{5}x > \sqrt{3}x + 6$ 的解集是_____.

14. 某木器厂今年二月份生产了课桌 500 张, 从三月份起加强了管理, 产量逐月上升, 四月份产量达到 605 张. 如果三、四月份的月增长率相同, 设这个增长率为 x , 则根据题意可列方程为_____.

15. 在实数范围内因式分解: $2x^2 - 3x - 7 =$ _____.

16. 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得_____.

17. 若实数 a 是方程 $3x^2 - 5x - 1 = 0$ 的一个根, 则代数式 $2024 + 10a - 6a^2$ 的值是_____.

18. 小明在解方程 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ 时采用了下面的方法: 由

$$(\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x})(\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x}) = (\sqrt{24-x})^2 - (\sqrt{8-x})^2 = (24-x) - (8-x) = 16$$

又有 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$, 可得 $\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x} = 8$, 将这两式相加可得 $\sqrt{24-x} = 5$,

将 $\sqrt{24-x} = 5$ 两边平方可解得 $x = -1$, 经检验 $x = -1$ 是原方程的解.

请你学习小明的方法, 解决下列问题:

解方程 $\sqrt{3x^2 + 20x - 3} + \sqrt{3x^2 - 4x - 3} = 4x$, 得方程的解为_____.

三、简答题: (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\sqrt{(1-\sqrt{12})^2} - (\sqrt{3})^0 + \frac{4}{\sqrt{3}-1}$.

20. 计算: $2\sqrt{\frac{2}{3m}} \div \frac{1}{6}\sqrt{6m} \cdot \sqrt{8m^3}$

21. 解方程: $9(2x-3)^2 = (1-x)^2$

22. 解方程: $2(x+3)^2 - 3 = 5(x+3)$

23. 解方程: $(3x-1)(x+2) = 2x+4$

24. 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 化简代数式 $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+9}{a}} - 6$, 并求代数式的值.

四. 解答题 (本大题共 4 题, 第 25 ~ 27 题每题 8 分, 第 28 题 10, 满分 34 分)

25. 一个物流公司因为业务拓展, 计划建造一个面积为 150 平方米的矩形仓库, 为节约材料, 仓库的一边靠墙, 墙长 18 米, 另三边用铁栅栏围成, 且在与墙平行的一边要开一扇 2 米宽的门, 已知铁栅栏材料的总长为 33 米, 求矩形仓库的长与宽应分别为多少米?

26. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 37 = 0$ 的两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $k < 100$, 且 k, x_1, x_2 都是整数, 求 k 的最大值及这种情况下方程的解.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$). 将线段 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CD , 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E .

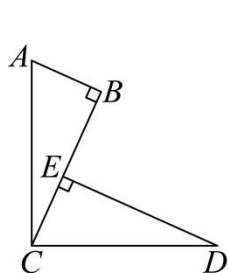


图1

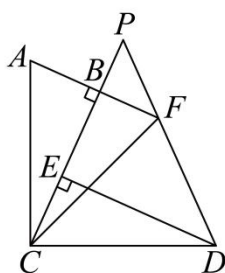
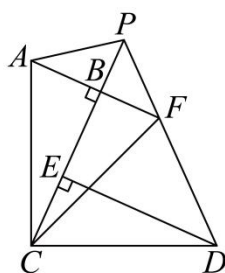


图2



备用图

(1) 如图 1, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle CED$;

(2) 如图 2, $\angle ACD$ 的平分线与 AB 的延长线相交于点 F , 连接 DF , DF 的延长线与 CB 的延长线相交于点 P , 证明: $PC = PD$;

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 AP , 当 $\alpha =$ _____ 时 $\triangle ACP$ 是等腰三角形.

28. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数解.

(1) 根据求根公式可求得 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1 \cdot x_2 =$ _____. (用含字母 a, b, c 的代数式表示)

(2) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根.

①请用含 k 的代数式表示 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1^2 + x_2^2 =$ _____.

②若实数 k 为整数, 且满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的值也为整数, 则 $k =$ _____.

(3) 若 a, b, c, d 为互不相等的实数, 且满足 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = \frac{8}{27}, (b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = \frac{8}{27}$,

则 $(a^2b^2 - c^2d^2)^{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.