

杨浦区 2024 学年度第一学期初三期末质量调研

数学学科

2025.1

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 对一个三角形进行放缩运动时, 下列结论中正确的是 ()

A. 各个内角的大小始终保持不变

B. 各条边的长度始终保持不变

C. 三角形的面积始终保持不变

D. 三角形的周长始终保持不变

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 1$, 那么 $\sin B$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{15}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

D. $\sqrt{15}$

3. 下列二次函数中, 如果函数图像的顶点在 x 轴上, 那么这个函数是 ()

A. $y = x^2 - 2x$

B. $y = x^2 - 2x - 1$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = (x - 1)^2$

4. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 都是非零向量, 下列结论中不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

C. $\vec{a} = 2\vec{b}$

D. $\vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$

5. 小海在距离地面高 60 米的热气球中测得地面上的着落点 P 的俯角为 37° , 那么此时热气球离着落点 P 的距离约是 () (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

A. 75 米

B. 80 米

C. 100 米

D. $\frac{400}{3}$ 米

6. 在学习了“利用函数的图象研究函数”后，为了研究函数 $y = \frac{1}{-x^2 - 2x - 2}$ 的性质，小华用“描点法”画它的图象，列出了如下表格：

x		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = \frac{1}{-x^2 - 2x - 2}$		$-\frac{1}{17}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{17}$	

那么下列说法中正确的是（ ）

- A. 该函数的图象关于 y 轴对称
- B. 该函数的图象没有最低点也没有最高点
- C. 该函数的图象经过第一、二、三、四象限
- D. 沿 x 轴的正方向看，该函数的图象在对称轴左侧的部分是下降的

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ，那么 $\frac{x}{x+y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - 1$ ，那么 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知抛物线 $y = (a-3)x^2$ 有最高点，那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

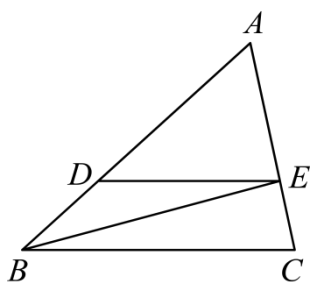
10. 如果两个相似三角形对应高的比是 2:3，那么它们的面积比是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ， $BC = 9$ ， $\cos \angle ACD = \frac{3}{4}$ ，那么 AB 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

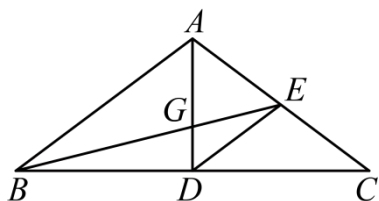
12. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的一点， $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ ， $AC = 15$ ，要使 $DE \parallel BC$ ，那么 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax$ 的图像开口向上，点 $A(-2, y_1)$ 和点 $B(0, y_2)$ 是该抛物线上的两点，那么 $y_1 \underline{\hspace{1cm}} y_2$. (填“>”、“=”或“<”)

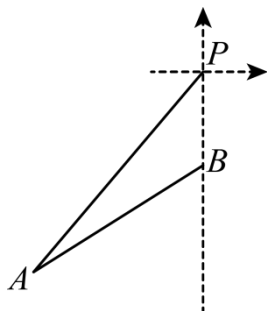
14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2DB$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 8$, 中线 BE 与高 AD 交于点 G , 如果 $DE = \frac{5}{2}$, 那么 $BE =$ _____.

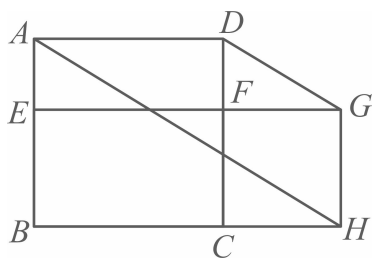


16. 如图, 小岛 A 在港口 P 的西南方向, 一艘船从港口 P 沿正南方向航行 12 海里后到达 B 处, 在 B 处测得小岛 A 在它的南偏西 60° 方向, 那么小岛 A 离港口 P 有 _____ 海里. (结果保留根号)



17. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CFGH$, F 为 CD 边上一点, GF 的延长线交 AB 于点 E , 如果

$$AH \parallel DG, \text{ 连接 } CE, \text{ 那么 } \frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle BEC}} = \text{_____}.$$



18. 已知矩形 $ABCD$ ($AD > AB$), 点 E 是边 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折, 点 A 的对应点 F 恰好落在对角线 AC 上, 那么 $\tan \angle FBC =$ _____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

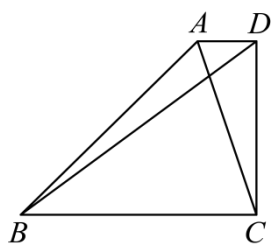
19. 计算: $\cos 30^\circ - 2 \sin^2 45^\circ + \frac{2}{2 \sin 60^\circ - \tan 45^\circ}.$

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(0, 3)$ 、点 $B(4, 3)$ 、点 $C(1, 0)$.

- (1) 求此抛物线的表达式;

(2) 将上述抛物线平移, 使它的顶点移动到点 $(-2, 2)$ 的位置, 那么平移的方法是_____.

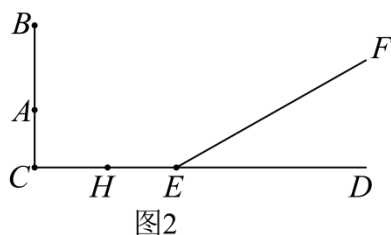
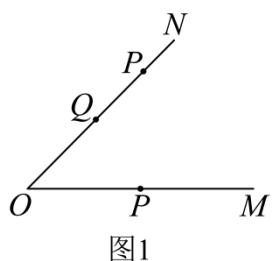
21. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = 8$, $AC = 2\sqrt{10}$, $\sin \angle DAC = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.



(1) 求 BD 的长;

(2) 求 $\angle ABD$ 的正切值.

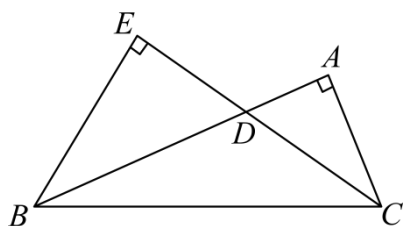
22. 定义: 如图 1, 已知点 Q 、 R 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点, 点 P 是边 OM 上的一个动点, 当 $OP^2 = OQ \cdot OR$ 时, 称点 P 是线段 QR 的最佳视野点. 如图 2, 某商业广场上安装了一块巨型显示屏 AB , 点 A 到水平地面的距离 AC 为 5 米, 在水平地面 CD 的 E 处有一个自动扶梯 EF , 点 A 、 B 、 C 在同一直线上. 已知自动扶梯 EF 的坡度是 1:2, 点 E 到点 C 的距离是 10 米.



(1) 当行人行走在水平地面 CE 时, 发现点 H 恰好是屏幕 AB 的最佳视野点, 且从点 H 测得点 B 的仰角为 60° . 求 AB 的长; (忽略行人的高度)

(2) 在 (1) 的条件下, 如果要在自动扶梯 EF 上找到屏幕 AB 的最佳视野点, 有人说“最佳视野点就是屏幕 AB 的垂直平分线与 EF 的交点”. 你同意这个说法吗? 请通过计算说明理由. (忽略行人的高度)

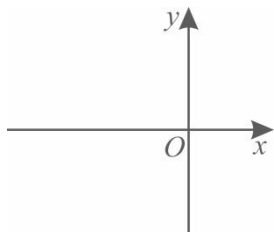
23. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 点 D 是 AB 边上一点, 过点 B 作 $BE \perp CD$ 交 CD 延长线于点 E , $AD \cdot BC = BE \cdot CD$.



(1) 求证: $BE^2 = ED \cdot EC$;

(2) 求证: $AB \cdot BC = 2CE \cdot BE$.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = mx^2 + 6mx + n$ ($m < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 顶点为 D .



(1) 求此抛物线的对称轴及点 B 的坐标;

(2) 点 P 是该抛物线上的一点, 设对称轴与 x 轴交于点 E , 如果 BP 恰好平分线段 DE , 求点 P 的坐标 (用含 m 的式子表示);

(3) 在 (2) 的条件下, 连接 PD 、 AP , 当 $\angle DPB = \angle PAB$ 时, 求 m 的值.

25. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, $CD = 3BD$.

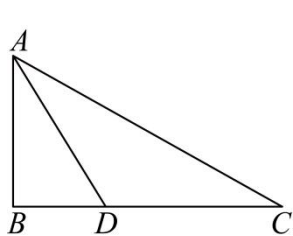


图1

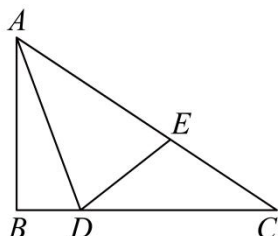


图2

(1) 如图 1, 当 $AB = 6$, $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 AD 的长;

(2) 点 E 是 AC 边上一点, 满足 $\angle ADB = \angle ADE$.

①如图 2, 当 $CD^2 = CE \cdot CA$ 时, 求 $\frac{AB}{BC}$ 的值;

②当 $\triangle CDE$ 是等腰三角形时, 求 $\angle C$ 的余弦值.