

2024 学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷

初三数学试卷

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意:

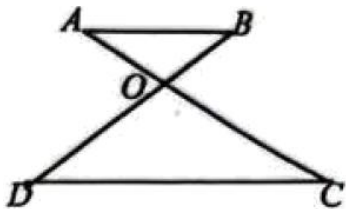
1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 的对称轴是直线 ()
A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = 3$
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 那么 $\tan A$ 的值是 ()
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$
3. 下列两个图形一定相似的是 ()
A. 两个矩形 B. 两个菱形 C. 两个等腰三角形 D. 两个正方形
4. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别是边 AB, AC 上的点, 那么下列条件中, 不能判断 $DE \parallel BC$ 的是 ()
A. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ B. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ C. $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$ D. $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$
5. 如果一传送带和地面所成斜坡的坡度为 1:3, 它把物体从传送带最低 A 处送到离地面 3 米高的 B 处, 那么物体从 A 到 B 所经过的路程是 ()
A. 9 米 B. $\sqrt{10}$ 米 C. $2\sqrt{10}$ 米 D. $3\sqrt{10}$ 米
6. “数形结合”是研究函数的重要思想方法, 如果抛物线 $y = x^2 + 2x + m + 5$ 只经过两个象限, 那么 m 的取值范围是 ()
A. $m \geq -4$ B. $m < -4$ C. $m < -5$ D. $m \geq -5$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 它们对应中线的比 $AM : DN = 2 : 3$, 那么它们的周长比是_____.
8. 如图, 在 $\triangle ODC$ 中, 点 A, B 分别在边 CO, DO 延长线上, $AB \parallel CD$, 如果 $DO = 6$, $AO : CO = 2 : 3$, 那么 BO 的长是_____.

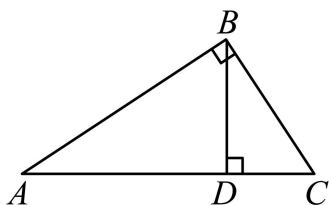


9. 已知点 $A(0, m)$ 和 $B(-1, n)$ 都在抛物线 $y = x^2 - 4x + c$ (c 是常数) 上, 那么 m _____ n (填 “>”, “=”, “<”).

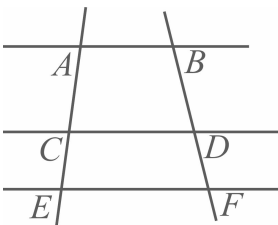
10. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 如果 $AB = 1$, 那么 BP 的长是_____.

11. 上海与杭州的实际距离约 200 千米, 在比例尺为 1: 5000000 的地图上, 上海与杭州的图上距离约 _____ 厘米.

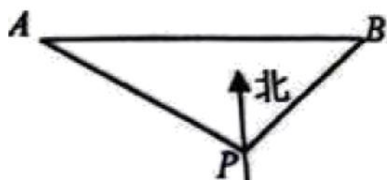
12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD \perp AC$ 于 D , 如果 $\cot A = \frac{4}{3}$, 那么 $\cos \angle CBD$ 的值是_____.



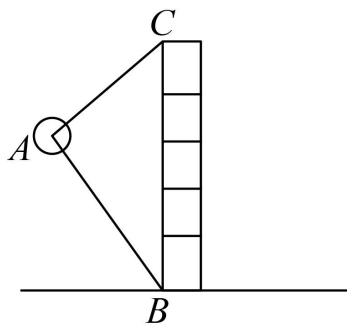
13. 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $\frac{AC}{EC} = \frac{3}{2}$, $AB = 7$, $EF = 9$, 那么 CD 的长是_____.



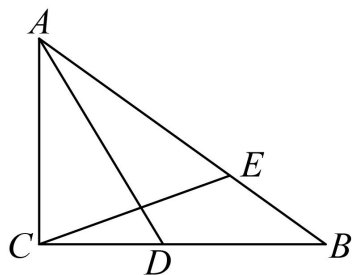
14. 如图, 货船 A 在灯塔 P 的北偏西 60° 方向, 客船 B 在灯塔 P 的东北方向, 客船 B 在货船 A 的正东方向, 如果货船 A 与客船 B 相距 50 千米, 那么客船 B 与灯塔 P 的距离约是_____千米 (结果保留根号).



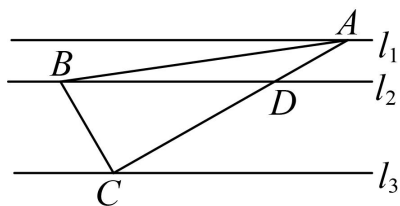
15. 如图, 热气球探测器显示, 从热气球 A 处测得一栋楼顶部 C 处的仰角是 37° , 测得这栋楼的底部 B 处的俯角是 60° , 热气球与这栋楼的水平距离是 30 米, 那么这栋楼的高度是_____米 (精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



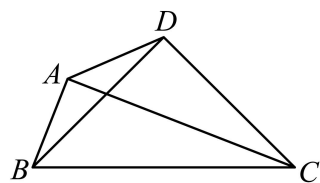
16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 5$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 点 E , D 分别在边 AB , BC 上, $\frac{BE}{CD} = \frac{4}{3}$, 如果 $\angle CAD = \angle B$, 那么 BE 的长是_____.



17. 如图, $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 且 l_1 和 l_2 之间的距离是 1, l_2 和 l_3 之间的距离是 2, $\triangle ABC$ 的三个顶点分别在 l_1, l_2, l_3 上, AC 与 l_2 交于点 D , 如果 $BC \perp AC$, $\tan \angle BAC = \frac{1}{3}$, 那么 BD 的长是_____.



18. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp AB$, $BD \perp CD$, $BD = CD$, 如果 $AB = m$, $AC = n$, 且 $m < n$, 那么 AD 的长是_____ (用含 m, n 的式子表示).



三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23, 24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

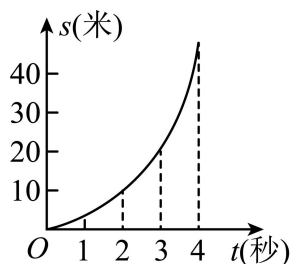
19. 已知: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.

(1) 求代数式 $\frac{2a+3b-5c}{a-2b+3c}$ 的值:

(2) 当 $2a+b+3c=44$ 时, 求 a, b, c 的值.

20. “2022 年北京冬奥会”的召开，冰雪运动在中国大地蓬勃发展. 滑雪爱好者小楠从山坡滑下，为了得出滑行距离 s （单位：米）与滑行时间 t （单位：秒）之间的关系式，测得一些数据（如下表）：

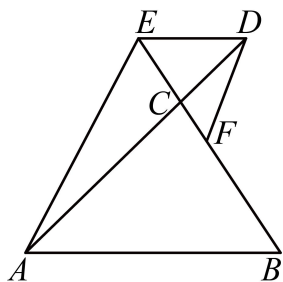
滑行时间 (秒)	0	1	2	3	4
滑行距离 (米)	0	4.5	14	28.5	48



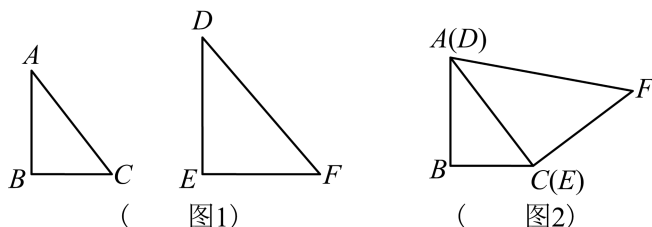
为观察 s 与 t 之间的关系，以 t 为横轴， s 为纵轴建立坐标系，描出与上表中数据对应的 5 个点，并用平滑的曲线连接它们（如图所示），小楠观察发现这条曲线近似抛物线的一部分.

- (1) 由上述信息，设这条曲线的表达式为 $s = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$)，求 s 与 t 的函数关系式；
- (2) 若将抛物线 $s = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$) 先向右平移 2 个单位，再向上平移 20 个单位，求平移后所得抛物线的表达式.

21. 如图， AD 与 BE 相交于点 C , $DE \parallel AB$ ，点 F 在线段 BC 上，且 $EC^2 = CF \cdot BC$ ，连接 DF, EA .



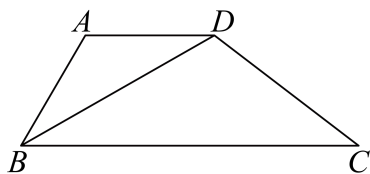
- (1) 求证： $DF \parallel EA$ ；
 - (2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，当 $BC = 2EC$ 时，求向量 $\overrightarrow{CD}$ （用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示）.
22. 小杰在学习了“特殊锐角的三角比”后，认为 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的三角比不必死记硬背，只需利用一副三角板就可推导出 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的三角比，相信大家都有这个共识；小杰在这个认识的基础上，他利用一副特制的三角板，研究推导出了 $15^\circ, 75^\circ$ 的三角比.



(1) 计算: $\frac{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ}{\tan 60^\circ + 2\sin 30^\circ}$;

(2) 小杰的一副特制的三角板, 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ, \angle D = 45^\circ, DE = AC = 2$: 小杰的想法是: 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 的边 DE 和 AC 重合, 拼成如图 2 所示的四边形 $ABCF$. 请利用图 2, 求 $\sin 15^\circ$ 和 $\tan 75^\circ$ 的值.

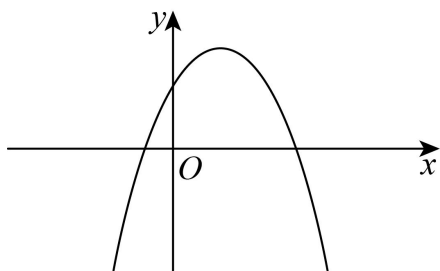
23. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, BD 是梯形 $ABCD$ 对角线, $BD^2 = AD \cdot BC$.



(1) 求证: $AD \cdot CD = AB \cdot BD$;

(2) 以 CD 为一边作 $\angle CDE = \angle ADB$, DE 交边 BC 于点 E , 求证: $\frac{CD^2}{BD^2} = \frac{CE}{AD}$.

24. 通过二次函数的学习, 小杰知道形如 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的函数, 其图像始终经过点 $(0, 0)$, 也即抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 经过定点 $(0, 0)$. 于是他进一步探究了形如 $y = ax^2 - ax + 2$ ($a \neq 0$) 的函数图像, 发现抛物线 $y = ax^2 - ax + 2$ ($a \neq 0$) 经过定点 $(0, 2)$ 与 $(1, 2)$. 他探究的思路是: 设法找到 x 的某些取值, 使表达式中含 a 的各项之和为 0.



具体的解法如下:

含 a 的各项之和: $ax^2 - ax = a(x^2 - x)$, 令 $x^2 - x = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 得到定点 $(0, 2)$; 当 $x = 1$ 时, $y = 2$, 得到定点 $(1, 2)$.

小杰还探究了抛物线 $y = ax^2 + (1-a)x - 2a + 1$ ($a \neq 0$), 发现它也经过两个定点, 其中一个位于 x 轴上,

可记作点 A ，另一个位于第一象限内，可记作点 B 。

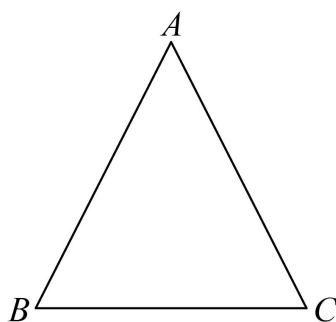
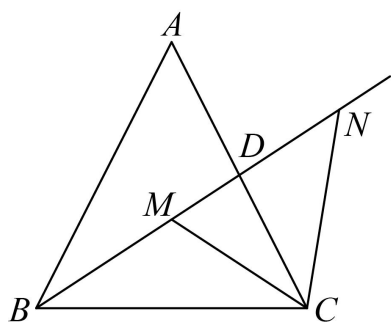
(1) 求点 A, B 的坐标；

(2) 当 $a < 0$ 时 (如图)，抛物线 $y = ax^2 + (1-a)x - 2a + 1$ 的顶点为 D ，与 x 轴的另一个交点为 C 。

①如果 $\angle ABC = 90^\circ$ ，求 a 的值；

②当 $\angle ADB = 90^\circ$ 时，求 a 的值。

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = \sqrt{5}$ ， $BC = 2$ ，点 D 是边 AC 的中点，点 M, N 是射线 BD 上的动点 (点 M 在左边)，以 CM 为一边作 $\angle MCN = \angle ABC$ 。



备用图

(1) 求 BD 的长；

(2) 当点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心时，求 $CN : BN$ 的值；

(3) 如果 $\triangle MCN$ 是以 MN 为腰的等腰三角形，求 BM 的长。