

# 九年级数学试卷 2024 年 1 月

(满分: 150 分, 考试时间: 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

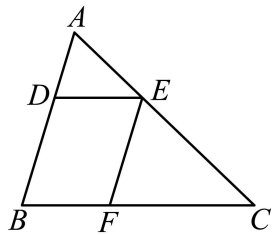
1. 下列命题中, 真命题是 ( )

- A. 如果一个直角三角形的一个锐角等于另一个直角三角形的锐角, 那么这两个三角形相似
- B. 如果一个等腰三角形的一个内角等于另一个等腰三角形的内角, 那么这两个三角形相似
- C. 如果一个直角梯形的一个锐角等于另一个直角梯形的锐角, 那么这两个梯形相似
- D. 如果一个等腰梯形的一个内角等于另一个等腰梯形的内角, 那么这两个梯形相似

2. 已知:  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$ , 如果  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_2B_2C_2$  的相似比为 2,  $\triangle A_2B_2C_2$  与  $\triangle A_3B_3C_3$  相似比为 4, 那么  $\triangle A_1B_1C_1$  与  $\triangle A_3B_3C_3$  的相似比为 ( )

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

3. 如图,  $\triangle ABC$  三边上点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 满足  $DE \parallel BC$ ,  $EF \parallel AB$ , 那么下列等式中, 成立的是 ( )



- A.  $\frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC}$
- B.  $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{FC}$
- C.  $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$
- D.  $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{BC}$

4. 已知  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心, 记  $\vec{a} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , 那么下列等式中, 成立的是 ( )

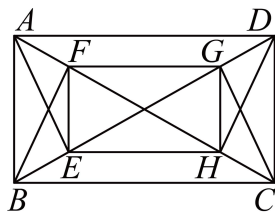
- A.  $\vec{b} = \vec{a}$
- B.  $\vec{b} = 2\vec{a}$
- C.  $\vec{b} = 3\vec{a}$
- D.  $\vec{b} = 4\vec{a}$

5. 将二次函数  $y = x^2 + 2x + 3$  和  $y = -x^2 + 2x - 3$  的图象画在同一平面直角坐标系中, 那么这两个图象都是

上升的部分，所对应自变量  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $x \geq 1$                       B.  $x \leq -1$                       C.  $-1 \leq x \leq 1$                       D.  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$

6. 如图，过矩形  $ABCD$  的顶点分别作对角线的垂线，垂足分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ ，依次连接四个垂足，可得到矩形  $EFGH$ 。设对角线  $AC$  与  $BD$  的夹角为  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ )，那么矩形  $EFGH$  与矩形  $ABCD$  面积的比值为 ( )



- A.  $\sin^2 \alpha$                       B.  $\cos^2 \alpha$                       C.  $\tan^2 \alpha$                       D.  $\cot^2 \alpha$

## 二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知  $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ , 则  $\frac{b-a}{b+a} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 已知向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  是互不平行的非零向量, 如果  $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ , 那么向量  $\vec{n}$  与  $\vec{m}$  是否平行?

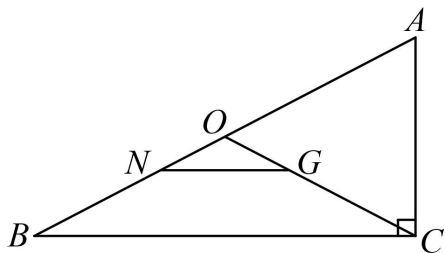
答:  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  顶点位于第三象限内, 且其开口向上, 请写出一个满足上述特征的抛物线的表达式  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  开口向上, 且经过点  $(3, 4)$  和  $(-2, 4)$ , 如果点  $(1, y_1)$  与  $(2, y_2)$  在此抛物线上, 那么  $y_1$   $\underline{\hspace{1cm}}$   $y_2$ . (填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

11. 已知点  $A(1, 4)$ 、 $B(-2, 0)$ , 那么直线  $AB$  与  $x$  轴夹角的正弦值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 6$ ,  $CO$  是边  $AB$  上的中线,  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心, 过点  $G$  作  $GN \parallel BC$  交  $AB$  于点  $N$ , 那么  $\triangle OGN$  的面积是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

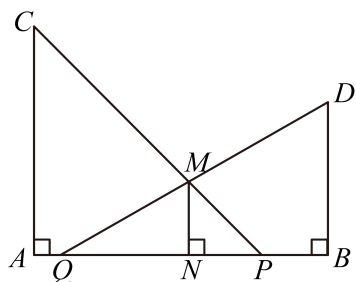


13. 已知等腰三角形的腰与底边之比为  $3:2$ , 那么这个等腰三角形底角的余弦值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

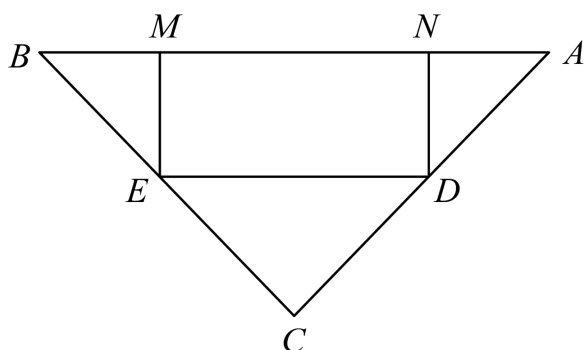
14. 如图,  $N$  是线段  $AB$  上一点,  $AC \perp AB$ ,  $BD \perp AB$ ,  $NM \perp AB$ , 连接  $CM$  并延长交  $AB$  于点  $P$ ,

连接  $DM$  并延长交  $AB$  于点  $Q$ . 已知  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $BD = 2$ ,  $MN = 1$ ,  $PN = 1.2$ , 那么

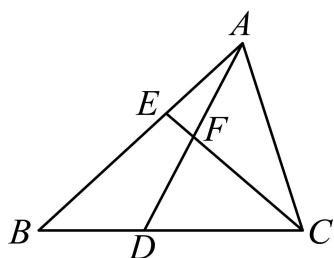
$QN =$  \_\_\_\_\_.



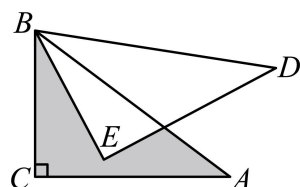
15. 在一块等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮. 如图, 已有的铁皮是等腰直角三角形  $ABC$ , 它的底边  $AB$  长 20 厘米. 要截得的矩形  $DEMN$  的边  $MN$  在  $AB$  上, 顶点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AC$ 、 $BC$  上, 设  $DE$  的长为  $x$  厘米, 矩形  $DEMN$  的面积为  $y$  平方厘米, 那么  $y$  关于  $x$  的函数解析式是\_\_\_\_\_. (不必写定义域)



16. 如图, 点  $D$ 、 $E$  分别位于  $\triangle ABC$  边  $BC$ 、 $AB$  上,  $AD$  与  $CE$  交于点  $F$ . 已知  $AF : FD = 1 : 1$ ,  $EF : FC = 1 : 4$ , 则  $BD : CD =$  \_\_\_\_\_.



17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ , 将  $\triangle ABC$  绕点  $B$  旋转到  $\triangle DBE$  的位置, 其中点  $D$  与点  $A$  对应, 点  $E$  与点  $C$  对应. 如果图中阴影部分的面积为 4.5, 那么  $\angle CBE$  的正切值是\_\_\_\_\_.



18. 为了研究抛物线  $L_1 : y = ax^2 + bx + c$  与  $L_2 : y = -ax^2 + bx - c$  在同一平面直角坐标系中的位置特征,

我们可以先取字母常数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的一些特殊值, 试着画出相应的抛物线, 通过观察来发现  $L_1$  与  $L_2$  的位置特

征，你的发现是：\_\_\_\_\_；我们知道由观察得到的特征，其可靠性是需要加以论证才能成为一个结论的，那么请你就你所发现的特征，简述一下理由吧。理由是：\_\_\_\_\_。

### 三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

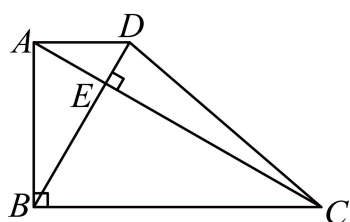
19. 计算： $2\sin 60^\circ + \frac{2}{\cot 45^\circ - \tan 60^\circ} - \cos^2 30^\circ$ .

20. 已知抛物线  $y = x^2 + 2x + 3$  的顶点为  $A$ ，它与  $y$  轴的交点为  $B$ .

(1) 求线段  $AB$  的长；

(2) 平移该抛物线，使其顶点在  $y$  轴上，且与  $x$  轴两交点间的距离为 4，求平移后所得抛物线的表达式.

21. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ,  $AD = 1$ ,  $BC = 3$ ，对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $E$ .

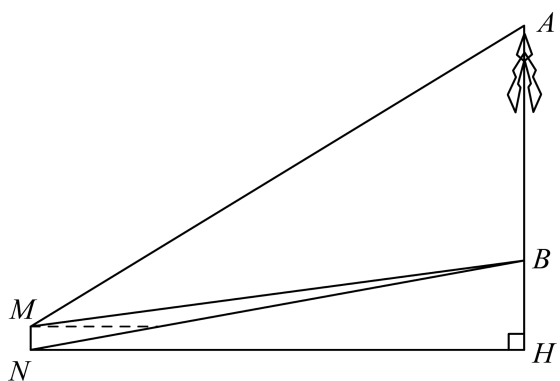


(1) 设  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的线性组合表示向量  $\overrightarrow{CD}$ .

(2) 如果  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AC \perp BD$ ，求四边形  $ABCD$  的面积.

22. 在世纪公园的小山坡上有一棵松树，初三（3）班的雏鹰小队带着工具对这棵松树进行测量，并试图利用所学的数学知识与方法推算出这棵松树的高度。他们选好位置架设测角仪先测出了这棵松树的根部与顶端的仰角，并绘制了如下示意图：测角仪为  $MN$ ，树根部为  $B$ 、树顶端为  $A$ ，其中  $MN = 1.5\text{m}$ ，视线  $MB$  的

仰角为  $\alpha$ （已知  $\tan \alpha = \frac{1}{6}$ ），视线  $MA$  的仰角为  $\beta$ （已知  $\tan \beta = \frac{3}{4}$ ）。

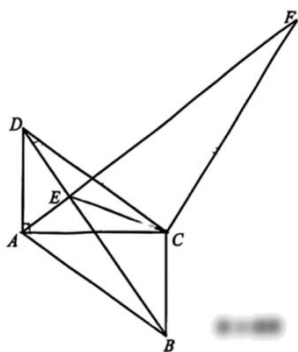


(1) 测得这两个数据后，小明说：“我可以算出这棵松树的高度了。”小聪接着说：“不对吧，只知道这两个角度，这个示意图显然是可以进行放大或缩小的，高度一定是确定不了的。如果还能测出测角仪到松树的垂直距离，即图示中  $NH$  的长度，就可以了。”设  $NH = a$ ，请你用含有  $a$  的代数式表示松树 ( $AB$ ) 的

高度.

(2) 小明又反问道: “虽然我们带了尺, 是一把刻度精确到 1 分米, 长为 2 米的直尺, 但也没有办法量出  $NH$  的长度, 我们总不能把坡给挖平了吧?” 请你想一个测量办法, 利用现有的工具, 测量出有关数据 (数据可以用字母常数表示), 并用含有这些字母常数的表达式表示出松树 ( $AB$ ) 的高度.

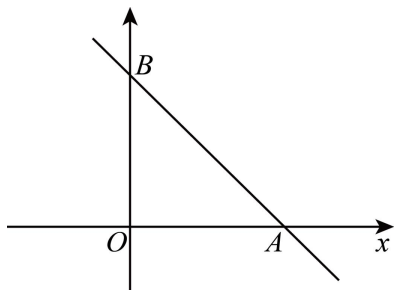
23. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AC \perp AD$ , 过点  $A$  作  $AE \perp BD$ , 垂足为  $E$ , 再过点  $C$  作  $CF \perp CD$  交直线  $AE$  于点  $F$ .



(1) 求证:  $CA \cdot CD = CB \cdot CF$ ;

(2) 连接  $CE$ , 求证:  $\angle ACE = \angle F$ .

24. 如图, 直线  $y = -x + 3$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于点  $A, B$ . 对称轴为直线  $x = 1$  的抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $A, B$ , 其与  $x$  轴的另一交点为  $C$ .



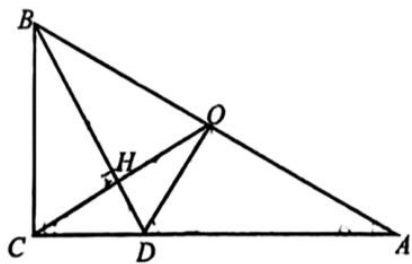
(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将该抛物线平移, 使其顶点在线段  $AB$  上点  $P$  处, 得到新抛物线  $L$ , 其与直线  $y = -x + 3$  的另一个交点为  $Q$ .

①如果抛物线  $L$  经过点  $A$ , 且与  $x$  轴的另一交点为  $D$ , 求线段  $CD$  的长;

②试问:  $\triangle CPQ$  的面积是否随点  $P$  在线段  $AB$  上的位置变化而变化? 如果变化, 请说明理由; 如果不变, 请求出  $\triangle CPQ$  面积.

25. 如图,  $O$  是  $\text{Rt}\triangle ABC$  斜边  $AB$  的中点,  $BH \perp CO$  交  $AC$  于  $D$ , 垂足为  $H$ , 连接  $OD$ .



- (1) 求证:  $BC^2 = AC \cdot CD$ ;
- (2) 如果  $\triangle ODH$  与  $\triangle ABC$  相似, 求其相似比;
- (3) 如果  $BH : DH = 4 : 1$ , 求  $\angle ADO$  的大小.