

2023 学年第一学期期末学情诊断

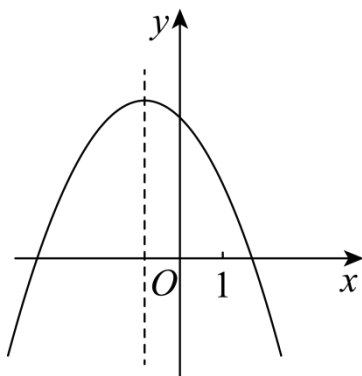
初三数学试卷

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

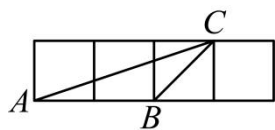
一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 1 个单位后得到的抛物线表达式是 ()
A. $y = 2x^2 - 1$ B. $y = 2x^2 + 1$ C. $y = 2(x+1)^2$ D. $y = 2(x-1)^2$
2. 已知点 E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 上一点, 连接 CE 和 BD 相交于点 F , 如果 $AE:ED = 1:2$, 那么 $DF:FB$ 为 ()
A. 1:2 B. 1:3 C. 2:3 D. 2:5
3. 在直角坐标平面的第一象限内有一点 $A(a, b)$, 如果射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 那么下列各式正确的是 ()
A. $b = a \cdot \tan \alpha$ B. $b = a \cdot \cot \alpha$
C. $b = a \cdot \sin \alpha$ D. $b = a \cdot \cos \alpha$
4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图像如图所示, 下列判断中不正确的是 ()



- A. $a < 0$ B. $b < 0$ C. $c > 0$ D. $a + b + c < 0$
5. 将一张矩形纸片沿较长边的中点对折, 如果得到的两个矩形都和原来的矩形相似, 那么原来矩形较长边和较短边的比是 ()
A. 2:1 B. $\sqrt{2}:1$ C. 3:1 D. $\sqrt{3}:1$

6. 如图在 4×1 的方格中，每一个小正方形的顶点叫做格点，以其中三个格点为顶点的三角形称为格点三角形， $\triangle ABC$ 就是一个格点三角形，现从 $\triangle ABC$ 的三个顶点中选取两个格点，再从余下的格点中选取一个格点联结成格点三角形，其中与 $\triangle ABC$ 相似的有()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ ($b \neq 0$)，那么 $\frac{a-b}{b} =$ _____.

8. 化简： $2(-\vec{a} + 3\vec{b}) - 6\vec{b} =$ _____.

9. 已知两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，那么这两个三角形的周长比为_____.

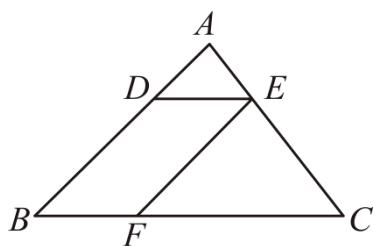
10. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)，如果 $AB = 2$ ，那么 $AP =$ _____.

11. 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$ 的顶点坐标是_____.

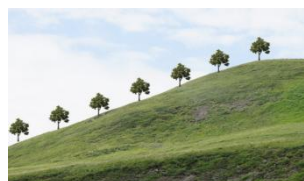
12. 如果点 $A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在二次函数 $y = x^2 - 3x$ 的图像上，那么 a _____ b 填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

13. 如果 α 是直角三角形的一个锐角， $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，那么 $\tan \alpha =$ _____.

14. 如图，已知 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 、 BC 上的点， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ， $\triangle ADE$ 、 $\triangle EFC$ 的面积分别为 1、4，四边形 $BFED$ 的面积为_____.

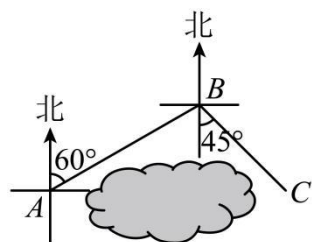


15. 如图，在山坡上种树，要求株距（相邻两树间的水平距离）是 4 米，斜坡的坡度 $i = 1:2$ ，那么相邻两树间的坡面距离为_____米.



16. 如图，为了避开岛礁区，一艘船从 A 处向北偏东 60° 的方向行驶 8 海里到 B 处，再从 B 处向南偏东 45°

方向行驶到发点 A 正东方向上的 C 处, 此时这艘船距离出发点 A 处_____海里.



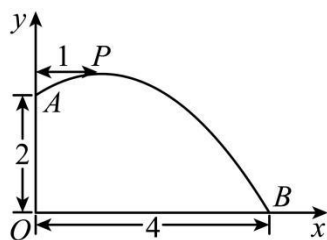
17. 把矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到矩形 $A'B'CD'$, 其中点 A 对应点 A' 在 BD 的延长线上, 如果 $AB = 1$, 那么 $BC =$ _____.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 6$, P 是 AB 上的一点, Q 为 AC 上一点, 直线 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 且 $\triangle APQ$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 如果这样的直线 PQ 有两条, 那么边 AB 长度的取值范围是_____.

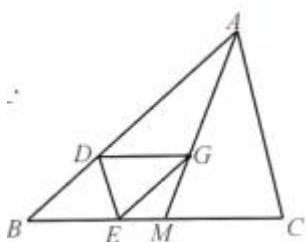
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\sin^2 45^\circ - 1}{\tan 45^\circ} + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

20. 某学校有一喷水池, 如果以喷水口 (点 A) 所在的铅垂线为 y 轴, 相应的地面水平线为 x 轴, 1 米为单位长度建立直角坐标系 xOy , 喷出的抛物线形水柱在最高处 (点 P) 距离 y 轴 1 米, 水柱落地处 (点 B) 距离 y 轴 4 米, 喷水口距离地面为 2 米, 求抛物线形水柱的最高处距离地面的高度.



21. 已知: 如图, AM 是 $\triangle ABC$ 的中线, 点 G 是重心, 点 D 、 E 分别在边 AB 和 BC 上, 四边形 $BEGD$ 是平行四边形.

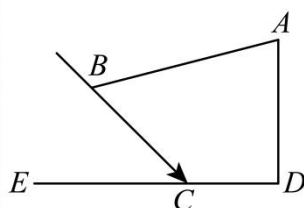


(1) 求证: $DE \parallel AC$;

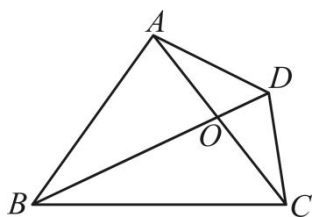
(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE} =$ _____.

22. 随着人民生活水平的日益提高, 许多农村的房屋普遍进行了改造, 小明家改造时在门前安装了一个遮阳棚, 如图, 在侧面示意图中, 遮阳篷 AB 长为 4 米, 与墙面 AD 的夹角 $\angle BAD = 75.5^\circ$, 靠墙端 A 离地高 AD

为 3 米，当太阳光线 BC 与地面 DE 的夹角为 45° 时，求阴影 CD 的长. (结果精确到 0.1 米；参考数据： $\sin 75.5^\circ \approx 0.97$, $\cos 75.5^\circ \approx 0.25$, $\tan 75.5^\circ \approx 3.87$)



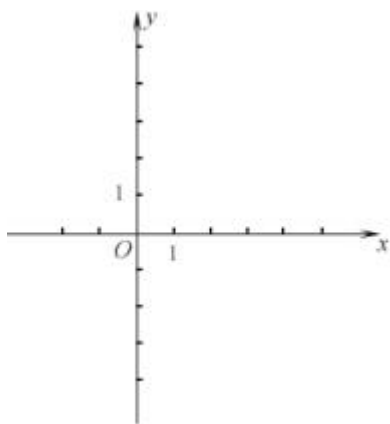
23. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $\angle BAC = \angle BDC$.



(1) 求证： $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ ；

(2) 过点 A 作 $AE \parallel CD$ ， AE 交 BD 于点 E . 求证： $AB \cdot AD = AE \cdot BC$.

24. 已知：在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, -3)$.

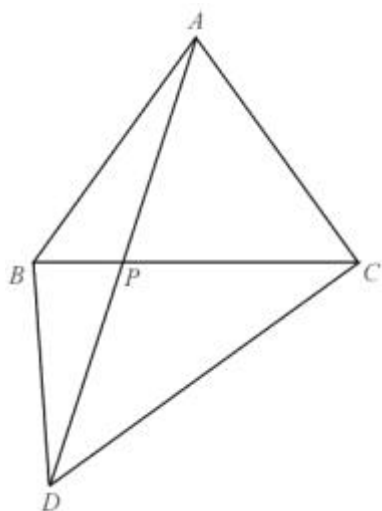


(1) 求抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；

(2) 点 D 在抛物线对称轴上， $\angle PAD = 90^\circ$ ，求点 D 的坐标；

(3) 抛物线的对称轴和 x 轴相交于点 M ，把抛物线平移，得到新抛物线的顶点为点 Q ， $QB = QM$ ， QO 的延长线交原抛物线为 E ， $QO = OE$ ，求新抛物线的表达式.

25. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle CAD = \angle ABC$ ， $DC \perp AC$ ， AD 与边 BC 相交于点 P .



- (1) 求证: $AB^2 = \frac{1}{2} AD \cdot BC$;
- (2) 如果 $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$, 求 $BP:PC$ 的值;
- (3) 如果 $\triangle BCD$ 是直角三角形, 求 $\angle ABC$ 的正切值.