

2023 学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷初三数学试卷

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意:

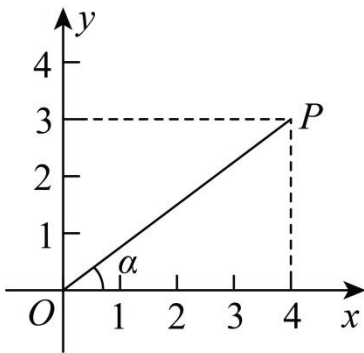
1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分). 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 下列抛物线中, 对称轴为直线 $x=1$ 的抛物线的表达式是 ()

- A. $y=x^2+1$ B. $y=x^2-1$ C. $y=x^2+2x$ D. $y=x^2-2x$

2. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(4,3)$, OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 则 $\sin \alpha$ 的值为 ()

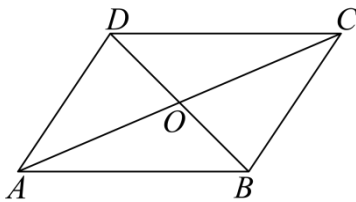


- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

3. 下列两个三角形一定相似的是 ()

- A. 两个直角三角形 B. 两个等腰三角形
C. 两个等边三角形 D. 两个面积相等的三角形

4. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式中, 下列结论正确的是 ()

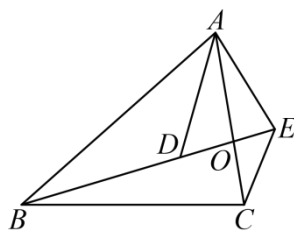


- A. $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$ B. $\overrightarrow{OD} = -\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ D. $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

5. 进博会期间，从一架离地 200 米的无人机 A 上，测得地面监测点 B 的俯角是 60° ，那么此时无人机 A 与地面监测点 B 的距离是 ()

- A. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ 米 B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ 米 C. 200 米 D. $200\sqrt{3}$ 米

6. 如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，点 E 在线段 BD 的延长线上，BE 与 AC 交于点 O，分别连接 AD、AE、CE，如果 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，那么下列结论正确的是 ()



- A. $CE \parallel AD$ B. $BD = AD$
C. $\angle ABE = \angle CBE$ D. $BO \cdot AE = AO \cdot BC$

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

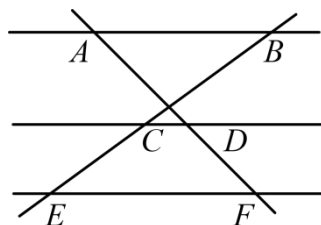
7. 计算： $2\sin 60^\circ - \cot 30^\circ =$ _____.

8. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)，如果 $AB = 2$ ，那么 BP 的长是_____.

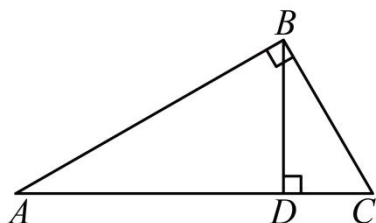
9. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，如果它们对应高的比 $AM : DN = \sqrt{2} : 3$ ，那么 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积比是_____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $AD : AB = 2 : 3$ ， $AE = 4$ ， $CE = 2$ ， $DE = 3$ ，那么 BC 的长是_____.

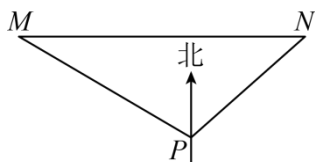
11. 如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，如果 $AD = 2$ ， $DF = 1.5$ ， $CE = 1.8$ ，那么 BE 的长是_____.



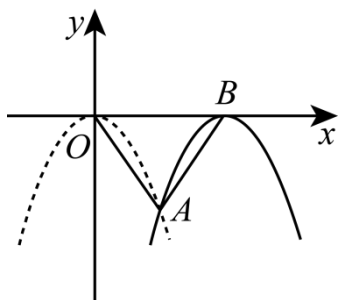
12. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BD \perp AC$ 于 D，如果 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 的面积比为 $9 : 16$ ， $CD = 12$ ，那么 AB 的长是_____.



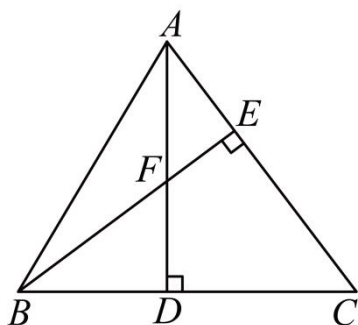
13. 如图，一段东西向的限速公路 MN 长 500 米，在此公路的南面有一监测点 P ，从监测点 P 观察，限速公路 MN 的端点 M 在监测点 P 的北偏西 60° 方向，端点 N 在监测点 P 的东北方向，那么监测点 P 到限速公路 MN 的距离是_____米（结果保留根号）.



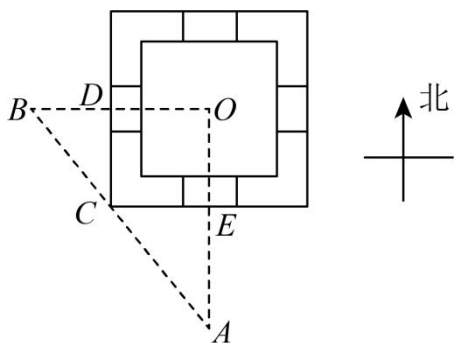
14. 将抛物线 $y = -x^2$ 向右平移后，所得新抛物线的顶点是 B ，新抛物线与原抛物线交于点 A （如图所示），联接 OA 、 AB 如果 $\triangle AOB$ 是等边三角形，那么点 B 的坐标是_____.



15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 和 BE 是 $\triangle ABC$ 的高，且交于点 F ，已知 $AB = 13$ ， $BC = 15$ ， $AC = 14$ ，那么 $\angle AFE$ 的正切值是_____.

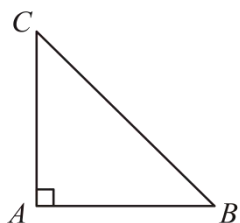


16. 中国古代数学书《御制数理精蕴》中有一道题大意如下：如图，从前有一座方城，四面城墙的中间都有城门，出南门后往前直走 8 里到宝塔 A 处(即 $EA = 8$ 里)，出西门往前直走 2 里到 B 处(即 $DB = 2$ 里)，此时，视线刚好能紧靠城墙角 C 看见宝塔 A ，如果设正方形的中心为 O ，点 O 、 D 、 B 在一直线上，点 O 、 E 、 A 在一直线上，那么这座方城每一面的城墙长是_____里.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6$, $BC = 4$, 如果将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 旋转, 使得点 C 落在边 AC 上, 此时, 点 A 落在点 A' 处, 连接 AA' , 那么 AA' 的长是_____.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = \sqrt{5}$, 如果点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且满足 $\angle APC = \angle BPC = 135^\circ$, 那么 CP 的长是_____.



三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. 已知: $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

(1) 求代数式 $\frac{a+4b}{2a-3b}$ 的值;

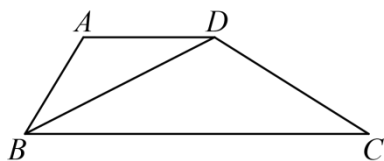
(2) 当 $2a+3b-3=35$ 时, 求 a 、 b 的值.

20. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 顶点为 D .

(1) 求此抛物线的表达式及顶点 D 坐标;

(2) 连接 CD 、 BD , 求 $\angle CDB$ 的余弦值.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, BD 平分 $\angle ABC$, $CD = BD = 8$, $AB = 5$.

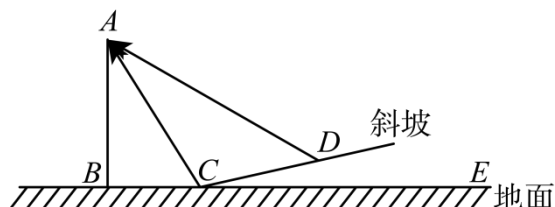


(1) 求 BC 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 求向量 $\overrightarrow{BD}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

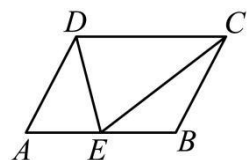
22. 小杰在学习了“仰角、俯角、坡比”后, 他在自己居住的小区设计了如下测量方案: 小杰利用小区中的

一个斜坡 CD ，首先在斜坡 CD 的底端 C 测得高楼顶端 A 的仰角是 60° ，然后沿斜坡 CD 向上走到 D 处，再测得高楼顶端 A 的仰角是 37° ，已知斜坡 CD 的坡比是 $i = 1:6$ ，斜坡 CD 的底端 C 到高楼 AB 底端 B 的距离是 $20\sqrt{3}$ 米，且 B 、 C 、 E 三点在一直线上（如图所示）。假设测角仪器的高度忽略不计，请根据小杰的方案，完成下列问题：

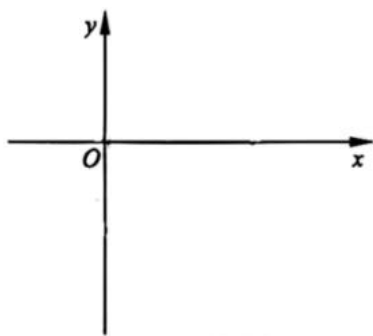
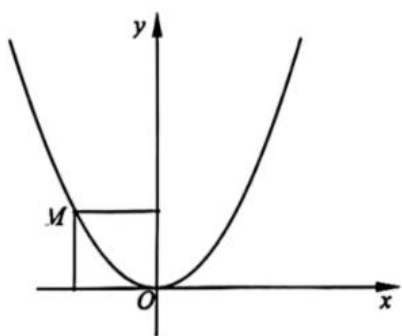


- (1) 求高楼 AB 的高度；
- (2) 求点 D 离地面的距离（结果精确到 0.1 米）。（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）

23. 如图，在 $ABCD$ 中，点 E 在边 AB 上， $DE^2 = AE \cdot CD$ 。



- (1) 求证： $AD \cdot CD = CE \cdot DE$ ；
 - (2) 当点 E 是边 AB 的中点时，分别延长 DE 、 CB 交于点 F ，求证： $AB^2 = 2EF^2$ 。
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，第二象限的点 M 在抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 上，点 M 到两坐标轴的距离都是 2。



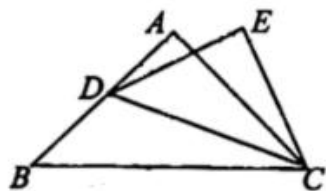
(备用图)

- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 将抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 先向右平移 $\frac{3}{2}$ 个单位，再向下平移 k ($k > 0$) 个单位后，所得新抛物线与 x 轴交于点 $A(m, 0)$ 和点 $B(n, 0)$ ，已知 $m < n$ ，且 $mn = -4$ ，与 y 轴负半轴交于点 C 。

①求 k 的值；

②设直线 $y = -\frac{4}{3}x$ 与上述新抛物线的对称轴的交点为 D ，点 P 是直线 $y = -\frac{4}{3}x$ 上位于点 D 下方的一点，分别连接 CD 、 CP ，如果 $\tan \angle PCD = \frac{3}{4}$ ，求点 P 的坐标.

25. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2\sqrt{2}$ ，点 D 是边 AB 上的动点（点 D 不与点 B 重合），以 CD 为斜边在直线 BC 上方作等腰直角三角形 DEC 。



- (1) 当点 D 是边 AB 的中点时，求 $\sin \angle DCB$ 的值；
- (2) AE ，点 D 在边 AB 上运动的过程中， $\angle EAC$ 的大小是否变化？如果变化，请说明理由；如果不变，请求出 $\angle EAC$ 的大小；
- (3) 设 DE 与 AC 的交点为 G ，点 P 是边 BC 上的一点，且 $\angle CPD = \angle CGD$ ，如果点 P 到直线 CD 的距离等于线段 GE 的长度，求 $\triangle CDE$ 的面积.