

杨浦区 2025 学年度第一学期初三年级期末质量调研

数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列各组线段的长度中, 成比例的是 ()

- A. 1, 2, 3, 4 B. 2, 4, 4, 8 C. 1.5, 3, 4.5, 6 D. 3, 4, 5, 6

2. 已知点 C 在线段 AB 上, 如果 $AB = 3AC$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{BC}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{3}\vec{a}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a}$ C. $-\frac{1}{3}\vec{a}$ D. $-\frac{2}{3}\vec{a}$

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 1$, 下列结论中正确的是 ()

- A. $\sin B = \frac{1}{3}$ B. $\cos B = \frac{1}{3}$ C. $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\cot B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

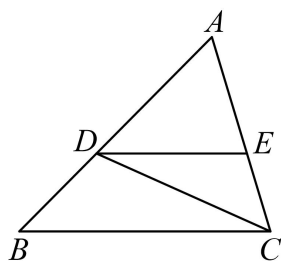
4. 一传送带和地面所成斜坡的坡比为 1:2.4, 如果要把物体从地面送到离地面 10 米高的地方, 那么物体所经过的路程是 ()

- A. 12 米 B. 13 米 C. 24 米 D. 26 米

5. 如果将抛物线 $y = -(x+6)^2 + 8$ 向右平移 10 个单位, 那么此抛物线与 y 轴的交点 P 在平移过程中的位置变化情况符合下列哪种情形 ()

- A. 持续向上 B. 持续向下 C. 先向上再向下 D. 先向下再向上

6. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, $\angle ACD = \angle B$, 下列结论中错误的是 ()



A. $\frac{DC^2}{BC^2} = \frac{AE}{AC}$

B. $\frac{DE^2}{DC^2} = \frac{AD}{AB}$

C. $\frac{AD^2}{AC^2} = \frac{AE}{AB}$

D. $\frac{EC^2}{BD^2} = \frac{DE}{BC}$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 请将结果直接填入答题纸的相应位置上.

7. 计算: $\cot 60^\circ =$ _____.

8. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{a+b}{b} =$ _____.

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3$, 那么 $\vec{a} =$ _____. (用向量 $\vec{e}$ 的式子表示)

10. 如果二次函数 $y = x^2 - mx + m + 1$ 的图象经过原点, 那么 m 的值是_____.

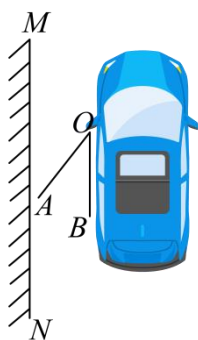
11. 如果抛物线 $y = ax^2 + 2x$ 的开口向上, 那么 a 的取值范围是_____.

12. 已知抛物线 $y = -x^2 + c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“<”、或 “=”)

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 和中线 CE 相交于 G , 则 $AG: AD =$ _____.

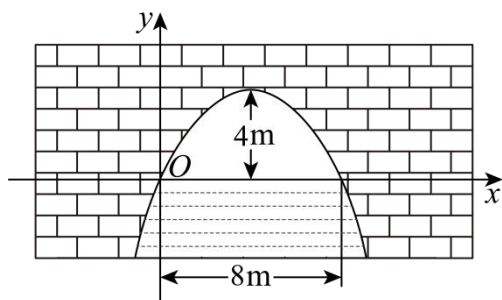
14. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC = 4$, $\angle A = 30^\circ$, $\tan B = \frac{2}{3}$, 那么 BC 的长为_____.

15. 如图, 是一辆小汽车与墙平行停放的平面示意图, 汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 米, 这辆小汽车车门宽 AO 为 1.2 米, 当车门打开角度 $\angle AOB$ 为 40° 时, 车门是否会碰到墙? _____. (填 “是” 或 “否”) (参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$)

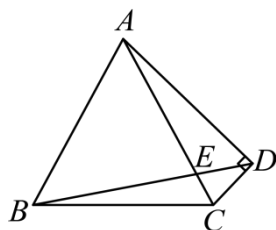


16. 已知抛物线形拱桥的横截面示意图, 当拱顶离水面 4 米时, 水面宽 8 米. 如图建立平面直角坐标系 xOy ,

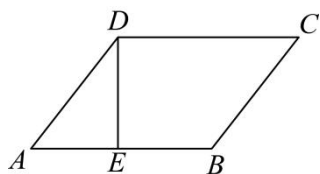
如果水面上升 3 米，那么水面宽度减少_____米.



17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC = 6$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 E ，若 $BE = 3DE$ ，则 $BD =$ _____.

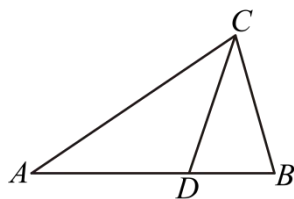


18. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 5$ ，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为点 E ，将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转得到 $\triangle FGE$ ，点 A 的对应点 F 落在边 AD 上，点 D 的对应点 G 落在边 BC 上，连接 FG 与 DE 交于点 H ，那么 $\frac{FH}{GH}$ 的值_____.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $AD = 2BD$.



- (1) 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BC} =$ _____。（用含有向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示）
- (2) 如果 $\angle BCD = \angle A$ ， $BC = 6$ ，求 AB 的长.
20. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中，函数值 y 与自变量 x 之间的部分对应关系如下表所示.

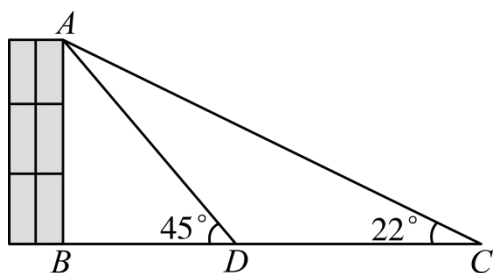
x	$\cdots$	0	1	2	3	$\cdots$
-----	----------	---	---	---	---	----------

y	$\cdots$	-3	0	1	0	$\cdots$
-----	----------	------	-----	-----	-----	----------

(1) 求该二次函数的解析式及其图像的对称轴;

(2) 设该二次函数图像与 x 轴相交于点 A (点 A 在对称轴的右侧), 与 y 轴相交于点 B , 顶点为 C , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. 如图, 为了测量学校教学楼 AB 的高度, 小慧同学先在教学楼前点 D 处测得楼顶 A 的仰角为 45° , 再沿 BD 方向后退了 16 米到点 C 处, 此时测得楼顶 A 的仰角为 22° (B 、 D 、 C 在一条直线上), 根据这些数据, 请你帮助小慧求出教学楼 AB 的高度 (精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 22^\circ = \frac{3}{8}$, $\cos 22^\circ \approx \frac{15}{16}$, $\tan 22^\circ \approx \frac{2}{5}$)



22. 新定义: 由边长为 1 的小正方形构成的网格图形中, 每个小正方形的顶点称为格点. 如图, 已知在 8×8 的网格图形中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 都在格点上. 请按要求完成下列问题:

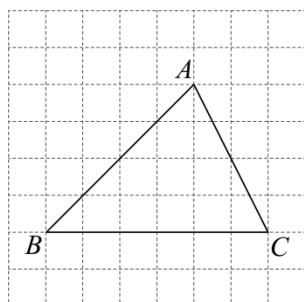


图1

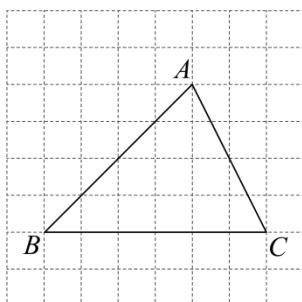


图2

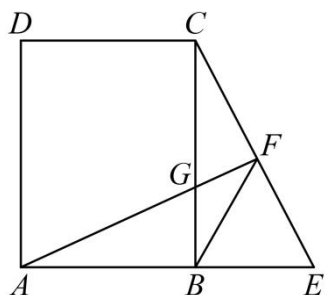
(1) $\sin \angle BAC =$ _____;

(2) 请仅用无刻度的直尺作图 (不要求写作法, 但保留作图痕迹, 写出结论).

①如图 1, 在边 AB 上求作一点 P , 使 $\angle ACP = 45^\circ$;

②如图 2, 在边 AC 上求作一点 Q , 使 $BQ \perp AC$.

23. 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 的延长线上, 过 A 作 $AF \perp CE$, 垂足为点 F , $CF = EF$, AF 与边 BC 交于点 G , 联结 BF .



(1) 求证: $FB^2 = FA \cdot FG$;

(2) 连接 BD 与 AG 交于点 H , 如果 $AB = BC$, 求证: $\frac{AH}{HG} = \frac{HF}{FG}$.

24. 在一场篮球赛中, 运动员小杨在距篮下 4 米处跳起投篮, 球运行的路线呈抛物线形, 当球运行的水平距离为 2.5 米时, 到达最高点, 此时球离地面的距离是 3.5 米, 然后准确落入篮圈, 已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 米.

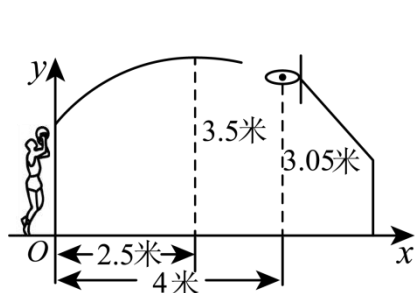


图1

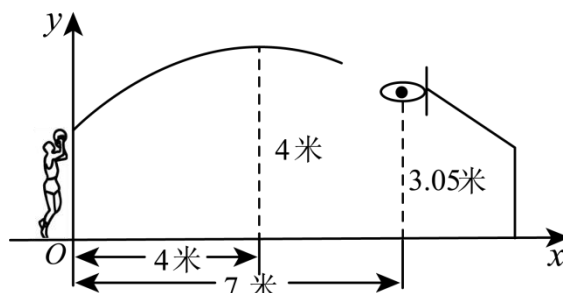


图2

(1) 如图 1 建立平面直角坐标系.

①求此抛物线的表达式;

②如果小杨的身高是 1.8 米, 在这次跳投中, 球在头顶上方 0.25 米, 那么球出手时, 他跳离地面的高度是多少米?

(2) 如图 2, 在这场篮球赛中, 另一位运动员小浦跳起投篮, 已知球出手时离地面高 $\frac{20}{9}$ 米, 与篮圈中心的水平距离为 7 米, 当球出手后水平距离为 4 米时到达最高点, 此时球离地面的距离是 4 米, 设篮球运行的路线也呈抛物线形, 问此球能否投中这个篮圈?

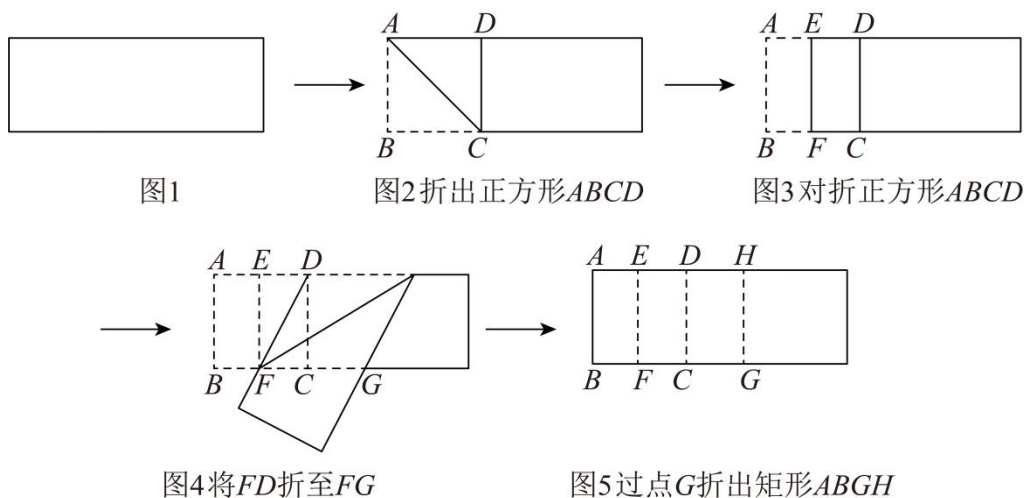
25. 综合与实践: 折黄金矩形

【问题提出】

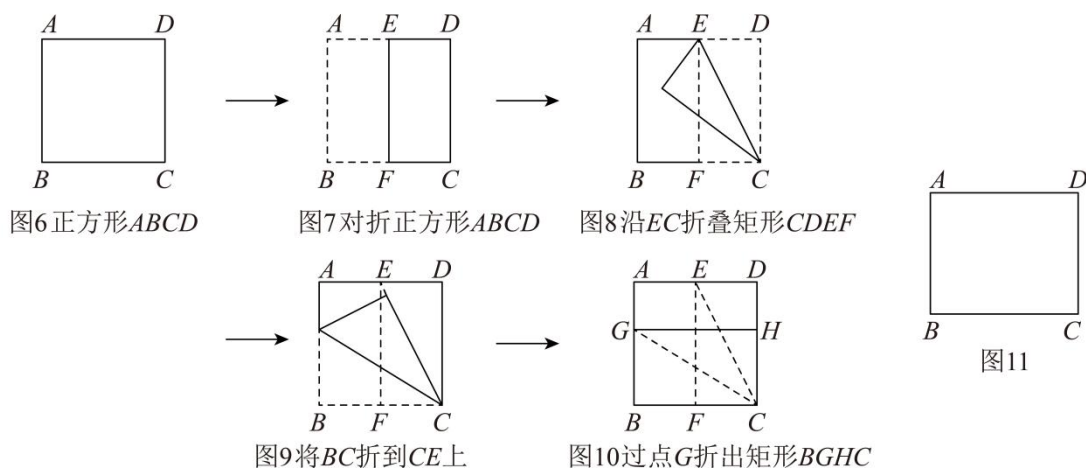
我们把宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形称为黄金矩形. 黄金矩形以协调、匀称的美感, 常见于艺术、建筑、自然界中, 那么, 如何用不同形状的纸片折出黄金矩形, 并证明这个矩形是黄金矩形呢?

【操作探究】

(1) 小创小组将一张矩形纸片 (如图 1) 按照图 2 至图 5 的方式操作, 那么图 5 中哪些矩形是黄金矩形? 请直接写出结论.



(2) 小智小组将一张正方形纸片 (如图 6) 按照图 7 至图 10 的方式操作, 得到矩形 $BGHC$, 你能证明矩形 $BGHC$ 是黄金矩形吗? 请写出证明过程.



【学以致用】

(3) 将一张矩形纸片 $ABCD$ (如图 11), 先按下列操作画出示意图, 再按要求解决问题.

- ①沿过点 C 的直线折叠, 使点 B 落在边 AD 上的点 E 处, 折痕交边 AB 于点 G ;
- ②沿过点 E 的直线折叠, 使点 D 落在线段 CE 上的点 H 处, 折痕交边 CD 于点 F ;
- ③沿过点 E 的直线折出矩形 $ENCD$, 折痕 EN 交线段 CG 于点 M , 连接 MH .

如果 $MH \perp EN$, 请说明点 G 是线段 AB 的黄金分割点.