

2024 学年度初三年级第二次学生学习能力诊断练习数学练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{0.5}$ D. $\sqrt[3]{3}$

2. 若单项式 $2x^n y z^2$ 的次数是 8, 则 n 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 下列函数中, y 的值随 x 的增大而减小的是 ()

- A. $y = -2x + 1$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = x^2$ D. $y = -\frac{1}{x}$

4. 小明对学校戏剧社 20 名成员进行年龄调查, 结果如表所示, 其中有部分数据被墨迹遮挡, 那么关于这 20 名成员年龄的统计量中, 能够分析得出的是 ()

年龄 (岁)	11	12	13	14
人数 (名)	6	5		

- A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差.

5. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 下列条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()

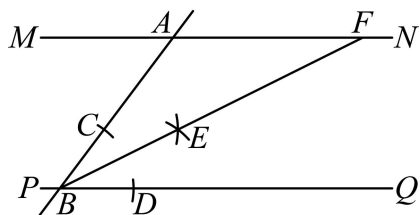
- A. $AC = BD$ B. $OA = OB$ C. $\angle DAC = \angle BAC$ D. $\angle ABC = \angle BAD$.

6. 如图 1, 直线 $MN \parallel PQ$, 直线 AB 分别与 MN 、 PQ 相交于点 A 、 B , MN 与 PQ 之间的距离为 8,

$\sin \angle MAB = \frac{4}{5}$. 小明同学利用尺规按以下步骤作图: ①以点 B 为圆心, 以任意长为半径作弧交 AB 于点 C ,

交 BQ 于点 D ; ②分别以 C 、 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle ABQ$ 内交于点 E ; ③

作射线 BE 交 MN 于点 F . 那么 AF 的长是 ()



A. 6

B. 6.4

C. 8

D. 10

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算: $(-2a)^2 =$ _____.

8. 计算: $\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} =$ _____.

9. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 k 的值是_____.

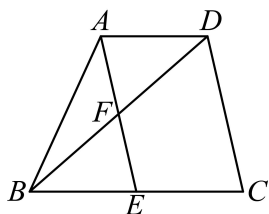
10. 不等式组 $\begin{cases} x-3 < 0 \\ 2(x+2) \geq x \end{cases}$ 的解集是_____:

11. 已知反比例函数的图像经过点 $A(2, m)$ 和点 $B(n, -1)$, 如果点 A 与 B 关于原点对称, 那么该反比例函数的解析式是_____.

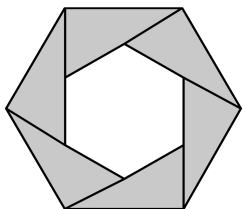
12. 如果将抛物线 $y = (x-4)^2$ 先向下平移 3 个单位, 再向左平移 5 个单位, 那么所得新抛物线的表达式是_____.

13. 某学校的一个小品节目入选区艺术节汇演. 参与该小品表演的全体成员中, 六年级学生有 4 名, 七年级学生有 6 名, 八年级学生有 5 名, 九年级学生有 3 名. 如果随机选取参加该小品表演的 1 位成员接受采访, 那么选到九年级学生的概率是_____.

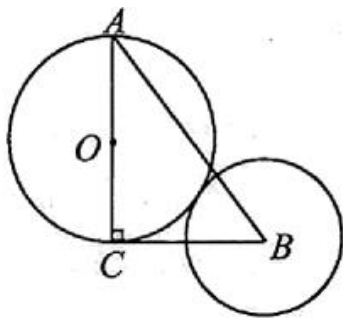
14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 点 E 是边 BC 的中点, 连接 AE 、 BD 交于点 F , 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BF}$ 是_____.



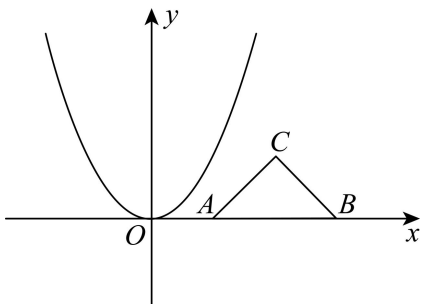
15. 如图, 由六块相同的含 30° 的直角三角形拼成一个大的正六边形, 内部留下一个小的正六边形空隙. 如果直角三角形最短边的长为 2, 那么小正六边形的边心距是_____.



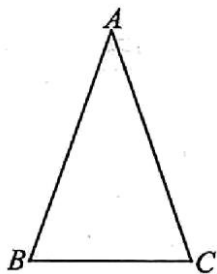
16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $AB = 5$ ，如果以点 B 为圆心的 $\odot B$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切，那么 $\odot B$ 的半径长是_____.



17. 如图，已知点 $A(2,0)$ 、 $B(6,0)$ 和 $C(4,2)$ ，平移 $\triangle ABC$ 得到 $\triangle A'B'C'$ ，顶点 A 、 B 、 C 分别与顶点 A' 、 B' 、 C' 对应. 如果点 A' 、 B' 都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上，那么点 C 到点 C' 的距离是_____.



18. 我们把只有一组邻边相等，且对角互补的四边形叫做“邻补四边形”. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 3$ ， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，点 M 、 N 分别在边 AC 、 BC 上. 如果四边形 $ABNM$ 是“邻补四边形”，那么四边形 $ABNM$ 的面积是_____.

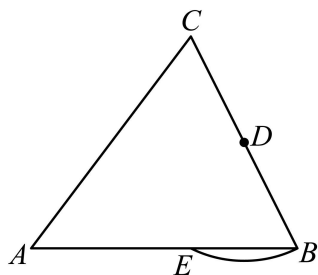


三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算: $(\pi - 3.14)^0 + (3 - 2\sqrt{2})^{-1} - \sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 3x - y = 4 & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

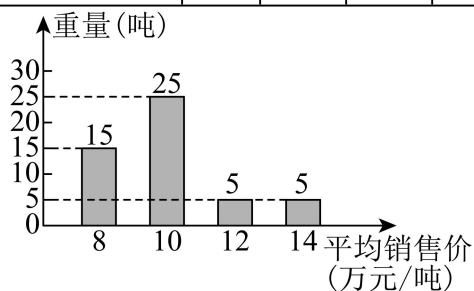
21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5\sqrt{5}$, $\tan C = 2$, 点 D 为边 BC 的中点, 以 D 为圆心, 以 DB 为半径作弧交边 AB 于点 E , 求 BC 和 BE 的长.



22. 其工厂采购蓝莓并加工成蓝莓蜜饯进行销售, 该工厂一年最多能生产 200 吨, 已知蓝莓的采购成本价 y (万元/吨) 与蓝莓的采购量 x (吨) 成一次函数关系, 其中的几组数据如表 2 所示. 每吨原材料 (蓝莓) 的加工费为 1 万元, 减重率为 50%, 蓝莓蜜饯销售价格会随季节、市场供需等波动, 从一年中随机抽取若干单交易作为样本进行统计, 并绘制了条形统计图 (如图).

表 2

x (吨)	50	100	150	200
y (万元/吨)	1.9	1.8	1.7	1.6

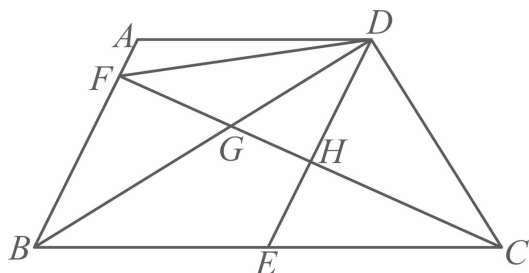


- 求 y 与 x 的函数解析式 (不写定义域);
- 求样本中蓝莓蜜饯的平均销售价;
- 根据样本中蓝莓蜜饯的平均销售价, 该工厂一年能否恰好获得 780 万元的利润: 如果能, 求需要采购蓝莓的重量; 如果不能, 请说明理由.

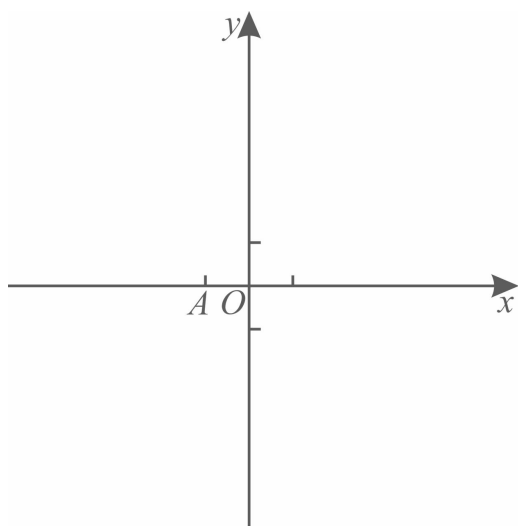
(备注: 蓝莓从新鲜状态制成蓝莓蜜饯后重量减轻, 衡量这一变化的指标通常叫做“减重率”, 其计算公式:

$$\text{减重率} = \frac{\text{原始重量} - \text{最终重量}}{\text{原始重量}} \times 100\%$$

23. 如图 9, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 连接 BD , $\angle BDC = 90^\circ$, 点 E 在 BC 上, 连接 DE , 使得 $\angle EDC = \angle ECD$, 点 F 在边 AB 上, 连接 CF , 分别交 BD 、 ED 于点 G 、 H , 且 $FH = CH$, 连接 DF .

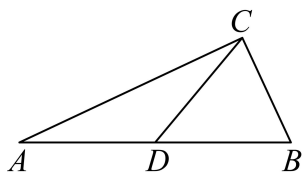


- (1) 求证: 四边形 $ABED$ 为菱形;
 - (2) 如果 $\angle BDE = \angle DFC$, 求证: $4EH \cdot BE = BG \cdot BD$.
24. 如图, 已知抛物线 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 交 y 轴于点 C .



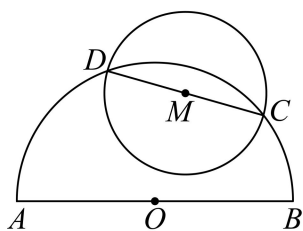
- (1) 求直线 AC 的表达式, 并用含 n 的代数式表示该抛物线的对称轴;
 - (2) 已知直线 $x = -4$ 与抛物线交于点 D , 与直线 AC 交于点 E , 如果 $m < 0$ 且 $DE = 12$, 求抛物线的表达式;
 - (3) 已知抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 点 P 在抛物线上且位于第一象限, 连接 AP 、 BC , 线段 AP 与 y 轴相交于点 E , 点 F 在线段 BC 上, 连接 PF 、 EF , 如果 $\angle PFE = 90^\circ$, 且 $S_{\triangle PEF} = 4AE^2$, 求点 P 的坐标.
25. 阅读材料:

我们学过有关直角三角形的性质定理: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 这条定理的逆命题 “如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形” 也是真命题.

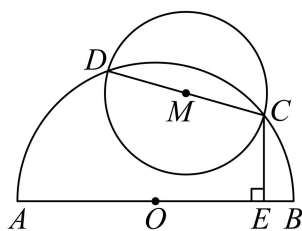


如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 为 AB 上的中线，如果 $CD = \frac{1}{2} AB$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$ 。也可以说，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $CD = AD = BD$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$ 。

根据上面的阅读材料，完成下列问题：（若需要，可直接运用直角三角形性质定理的逆命题）如图， AB 为半圆 O 的直径， CD 是半圆 O 的弦，以 CD 为直径作 $\odot M$ 。



①



②

(1) 如图①，过点 C 作 $CE \perp AB$ ，垂足为 E 。

①求证： $CE^2 = AE \cdot BE$ ；

②已知 $BE = 1$ ， $CE = 3$ ，如果 $\odot M$ 经过点 O （如图②），求直线 CD 与直线 AB 夹角的正弦值；

(2) 已知 $\odot M$ 与线段 AB 相交于点 P 、 Q ， $CD = 6\sqrt{2}$ ，如果 $AP : PQ : BQ = 7 : 4 : 9$ ，求 AB 的长。