

2025 年上海市松江区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

- 下列单项式中，与 ab^2 是同类项的是（ ）
A. $2ab$ B. $2a^2b$ C. $-ab^2$ D. $-a^2b^3$
- 某商店在一周内卖出某品牌运动鞋的尺寸记录如：39，36，38，39，37，41，39，37，41，39，40. 如果商店老板要再购进一批同样品牌的运动鞋，他应该关注这组数据的（ ）
A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差
- 某商场对一款无人机进行降价促销，其售价由最初的 400 元经过两次降价后变为 225 元，且两次降价的百分率相同. 设每次降价的百分率为 x ，可列方程为（ ）
A. $400(1-x^2) = 225$ B. $225(1+x)^2 = 400$
C. $400(1-x)^2 = 225$ D. $400(1-2x) = 225$
- 下列命题中真命题是（ ）
A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 对角线互相垂直的四边形是菱形
D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形
- 已知 $\odot O_1$ 的半径是 5， $\odot O_2$ 的半径是 6. 圆心 O_2 在 $\odot O_1$ 上. 那么两圆的公共弦长是（ ）
A. $\frac{24}{5}$ B. $\frac{48}{5}$ C. 10 D. 12
- 我们把一个等腰三角形的腰与底边的比值叫做这个等腰三角形的“特征值”. 设等腰 $\triangle ABC$ 的特征值是 k ，下列命题中假命题是（ ）
A. 如果 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形
B. 如果 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，那么 $\triangle ABC$ 有一内角为 30°
C. 如果 $\triangle ABC$ 是直角三角形，那么 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$
D. 如果 $\triangle ABC$ 有一内角为 30° ，那么 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

二、填空题（本大题共 12 题）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $(-2\sqrt{3})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 因式分解: $a^2 - a - 6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根, 那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

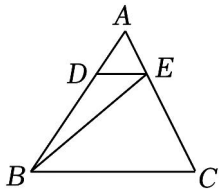
11. 如果一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$, 且与 x 轴的交点在原点右侧, 那么函数值 y 随 x 的增大而 $\underline{\hspace{2cm}}$ (填“增大”或“减小”).

12. 去年我国成为全球第一大汽车出口国, 全年共出口汽车约 6.3×10^6 辆, 平均每月约出口汽车 $\underline{\hspace{2cm}}$ 辆. (用科学记数法表示)

13. 一般情况下路口会设置红色、黄色、绿色三种颜色的信号灯. 已知某路口三种信号灯的时长依次是: 红灯 40 秒、黄灯 4 秒、绿灯 36 秒, 一辆汽车行驶到该路口遇到绿灯的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 $A(2, a)$ 、 $B(m, b)$ 是抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 上不同的两点, 如果 $a = b$, 那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

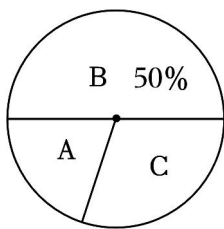
15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别在 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, $BD = 2AD$. 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BE}$ 可用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



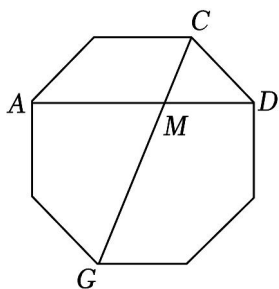
16. 某学习小组想了解本校学生课外阅读时间的情况, 在全校随机调查了部分学生, 对他们一周的课外阅读时长进行统计、整理, 并绘制成两幅不完整的统计图表.

编码	课外阅读时长 (分钟)	人数
A	$0 < x \leq 120$	10
B	$120 < x \leq 240$	25
C	$x > 240$	a

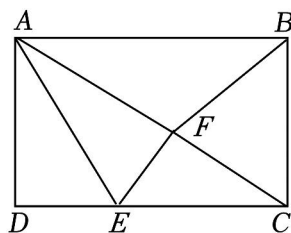
如果该校有 1200 名学生, 那么该校一周课外阅读时长超过 240 分钟的学生大约有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人.



17. 如图，正八边形的对角线 AD 、 CG 交于点 M ，那么 $\frac{AM}{MD}$ 的值为 ____ .



18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $AD=5$ ，点 E 在边 CD 上，将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折，点 D 落在点 F 处，联结 BF 、 CF ．如果 $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形，那么 DE 的长是 ____ .



三、解答题（本大题共 7 题）

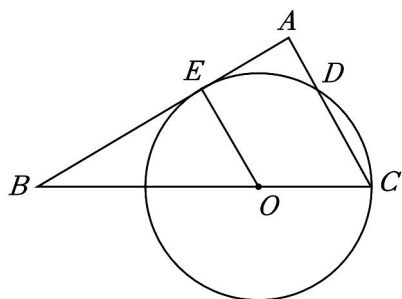
19. 计算： $8^{\frac{1}{2}} + |\sqrt{2} - 2| + (\frac{1}{2 + \sqrt{2}})^0 - (\sqrt{2} - 1)^{-1}$.

20. 解不等式组：
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2(1 - x) \\ \frac{x - 10}{3} < 2x \end{cases}$$
 .

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，点 O 在边 BC 上，以 O 为圆心， OC 为半径的圆与边 AC 交于点 D ，与边 AB 相切于点 E .

(1) 当 $BC = 12$ 时，求 $\odot O$ 的半径长；

(2) 求 $\frac{AD}{CD}$ 的值.



22. 图 1 是某商场入口处摆放的“楼层导购图”展板. 图 2 是其横断面的示意图.

信息 1: 经过测量得到: $AC = CB = 50\text{cm}$, $CM = 125\text{cm}$, $\angle CME = 53^\circ$, $\angle ACM = 106^\circ$. (底座 EF 的高度忽略不计)

信息 2: P 为顾客看展板时眼睛所在的位置, $PQ \perp EF$, 垂足 Q 在 FE 的延长线上, 当视线 PC 与展板 AB 垂直时, 称点 P 为“最佳观察点”.

任务 (1): 求展板最低点 B 到地面 EF 的距离;

任务 (2): 如果 $PQ = 160\text{cm}$, 当点 P 为“最佳观测点”时, 求点 B 到 PQ 的距离. (参考数据:

$$\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}, \cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}, \tan 53^\circ \approx \frac{4}{3})$$



图1

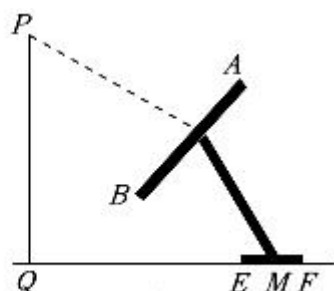
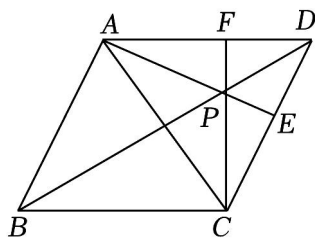


图2

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, P 是对角线 BD 上一点, 联结 AP 、 CP 并延长, 分别与边 CD 、 AD 交于点 E 、 F .

(1) 求证: $AE = CF$;

(2) 如果 $\angle APF = 2\angle ABD$, 求证: $BP \cdot BD = 2AB^2$.

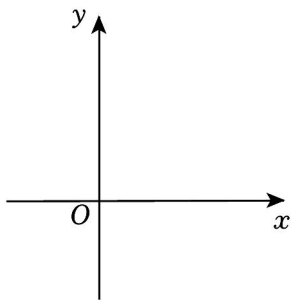


24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, (点 A 在点 B 的右侧) 与 y 轴正半轴交于点 C , 顶点为 P .

(1) 求 PC 的长;

(2) 当 $AC \perp PC$ 时, 求抛物线的表达式;

(3) 将该抛物线平移, 新抛物线的顶点 P_1 落在 y 轴上, 与原抛物线交于点 D , 如果点 P_1 与点 C 关于原点对称, 且 $P_1D \parallel PC$, 求 $\triangle PP_1C$ 的面积.



25. 已知 AB 是半圆 O 的直径, P 是弦 AC 延长线上一点.

(1) 联结 PO 与半圆交于点 D .

①如图 1, 如果点 C 是弧 AB 的中点, 且 $\tan P = \frac{1}{3}$, $PC = 2\sqrt{2}$, 求 PD 的长;

②如图 2, 如果点 C 是弧 AD 的中点, 且 $PA = PO$, 求 $\frac{PC}{PD}$ 的值.

(2) 设 M 是弦 AC 的中点, 如果以点 A 为圆心、 AP 为半径的圆与 $\odot O$ 相切, 以点 P 为圆心、 PM 为半径的圆与直线 AB 相切, 求 $\sin \angle PAB$ 的值.

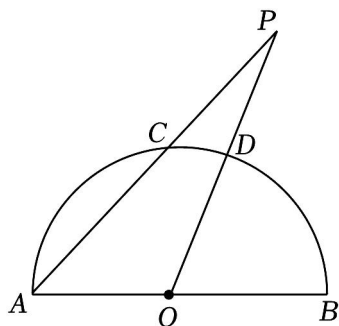


图1

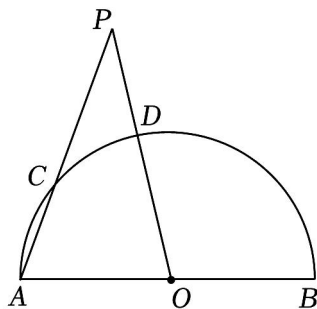
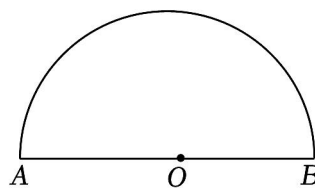


图2



备用图

参考答案

一. 选择题（共 6 小题）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C.	B	C	A	B	D

一、选择题（本大题共 6 题）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列单项式中，与 ab^2 是同类项的是()

A. $2ab$

B. $2a^2b$

C. $-ab^2$

D. $-a^2b^3$

解：A、相同字母的指数不相同，不是同类项；

B、相同字母的指数不相同，不是同类项；

C、符合同类项的定义，是同类项；

D、相同字母的指数不相同，不是同类项；

故选：C .

2. 某商店在一周内卖出某品牌运动鞋的尺寸记录如：39，36，38，39，37，41，39，37，41，39，40. 如果商店老板要再购进一批同样品牌的运动鞋，他应该关注这组数据的()

A. 平均数

B. 众数

C. 中位数

D. 方差

解：如果商店老板要再购进一批同样品牌的运动鞋，他应该关注这组数据的众数.

故选：B .

3. 某商场对一款无人机进行降价促销，其售价由最初的 400 元经过两次降价后变为 225 元，且两次降价的百分率相同. 设每次降价的百分率为 x ，可列方程为()

A. $400(1-x^2) = 225$

B. $225(1+x)^2 = 400$

C. $400(1-x)^2 = 225$

D. $400(1-2x) = 225$

解：由题意可得，

$$400(1-x)^2 = 225 ,$$

故选：C .

4. 下列命题中真命题是()

- A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
- B. 对角线相等的四边形是矩形
- C. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

解：A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形，是真命题，故本选项符合题意；

B. 对角线相等的平行四边形是矩形，原命题是假命题，故本选项不符合题意；

C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，原命题是假命题，故本选项不符合题意；

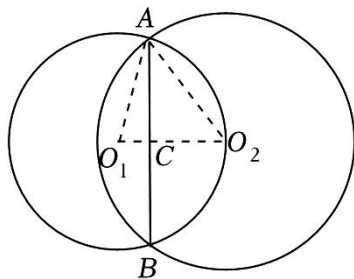
D. 对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形，原命题是假命题，故本选项不符合题意；

故选：A.

5. 已知 $\odot O_1$ 的半径是 5， $\odot O_2$ 的半径是 6. 圆心 O_2 在 $\odot O_1$ 上. 那么两圆的公共弦长是 ()

- A. $\frac{24}{5}$
- B. $\frac{48}{5}$
- C. 10
- D. 12

解：设 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A ， B ，连接 AB ， O_1O_2 ， O_1A ， O_2B ， O_1O_2 ，设 AB 与 O_1O_2 相交于点 C ，如图所示：



设 $O_1C = a$ ，

$\because \odot O_1$ 的半径是 5， $\odot O_2$ 的半径是 6. 圆心 O_2 在 $\odot O_1$ 上，

$$\therefore O_1A = O_1O_2 = 5, \quad O_2A = 6, \quad AC = BC, \quad AB \perp O_1O_2,$$

$$\therefore O_2C = O_1O_2 - O_1C = 5 - a, \quad AB = 2AC,$$

在 $Rt \triangle O_1AC$ 和 $Rt \triangle O_2AC$ 中，由勾股定理得： $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = O_2A^2 - O_2C^2$ ，

$$\therefore 5^2 - a^2 = 6^2 - (5 - a)^2,$$

$$\text{解得：} a = \frac{7}{5},$$

$$\therefore O_1C = \frac{7}{5},$$

$$\therefore AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5},$$

$$AB = 2AC = 2 \times \frac{24}{5} = \frac{48}{5}.$$

故选：B.

6. 我们把一个等腰三角形的腰与底边的比值叫做这个等腰三角形的“特征值”. 设等腰 $\triangle ABC$ 的特征值是 k , 下列命题中假命题是()

A. 如果 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形

B. 如果 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\triangle ABC$ 有一内角为 30°

C. 如果 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 那么 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 如果 $\triangle ABC$ 有一内角为 30° , 那么 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

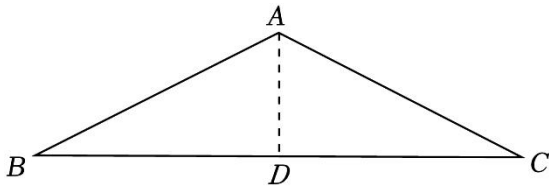
解: 选项A: 当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 可设腰长为 $\sqrt{2}$, 则底长为2,

$$\therefore (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形是直角三角形,

故A选项正确, 不符合题意;

选项B: 如图, 过A作 $AD \perp BC$ 于点D,



$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 设 $AB = \sqrt{3}$, 则 $BC = 3$,

$\therefore AD \perp BC$, 且 $AB = AC$,

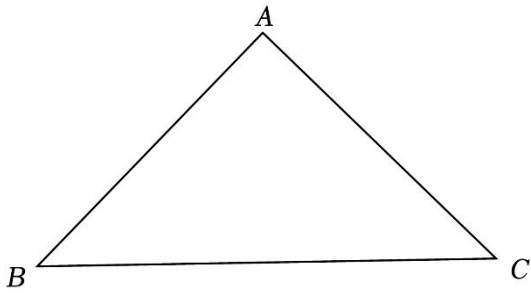
$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

故B选项正确, 不符合题意;

选项C: 如图, $AB = AC$, $\angle A = 90^\circ$,



$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

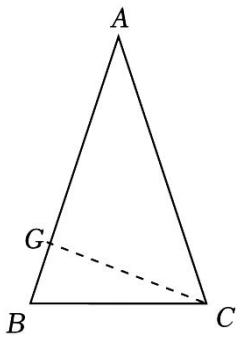
$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 C 选项正确，不符合题意；

选项 D：当这个角底角为 30° 时，由选项 B 可知，此时 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

当顶角为 30° 时，如图， $AB = AC$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

过 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G，



在 $Rt \triangle ACG$ 中，设 $CG = 1$ ，则 $AC = AB = 2$ ， $AG = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore BG = 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{在 } Rt \triangle BCG \text{ 中, } BC = \sqrt{BG^2 + CG^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2 \times \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1),$$

$$\therefore k = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故 D 选项错误，符合题意；

故选：D。

二、填空题（本大题共 12 题）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算： $(-2\sqrt{3})^2 = \underline{12}$ 。

解：原式 $= 4 \times 3 = 12$ ，

故答案为：12。

8. 因式分解: $a^2 - a - 6 = \underline{(a+2)(a-3)}$.

解: $a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3)$.

故答案为: $(a+2)(a-3)$.

9. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

解: 因为 $x + y = 1$, $x^2 - y^2 = 5$,

所以 $(x+y)(x-y) = 5$,

即 $1 \times (x-y) = 5$,

得 $x-y = 5$,

此时得到新的方程组:

$$\begin{cases} x + y = 1 \text{ ①} \\ x - y = 5 \text{ ②} \end{cases},$$

① + ② 得: $2x = 6$, $x = 3$,

将 $x = 3$ 代入①得: $y = -2$,

所以方程组的解是: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

故答案为: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根, 那么 a 的取值范围是 $\underline{a \leq \frac{1}{4}}$.

解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = 1 - 4a \geq 0$,

解得 $a \leq \frac{1}{4}$,

故答案为: $a \leq \frac{1}{4}$.

11. 如果一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$, 且与 x 轴的交点在原点右侧, 那么函数值 y 随 x 的增大而 减小 (填“增大”或“减小”).

解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-2, 3)$, 且与 x 轴的交点在原点右侧,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象不经过第三象限,

$\therefore$ 该函数图象经过第一、二、四象限,

∴函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，

故答案为：减小．

12. 去年我国成为全球第一大汽车出口国，全年共出口汽车约 6.3×10^6 辆，平均每月约出口汽车 5.25×10^5 辆．（用科学记数法表示）

解：平均每月约出口汽车： $6.3 \times 10^6 \div 12 = 5.25 \times 10^5$ （辆）．

故答案为： 5.25×10^5 ．

13. 一般情况下路口会设置红色、黄色、绿色三种颜色的信号灯．已知某路口三种信号灯的时长依次是：红灯 40 秒、黄灯 4 秒、绿灯 36 秒，一辆汽车行驶到该路口遇到绿灯的概率是 0.45 ．

解：一辆汽车行驶到该路口遇到绿灯的概率是： $\frac{36}{40+4+36} = 0.45$ ．

故答案为：0.45．

14. 已知 $A(2, a)$ 、 $B(m, b)$ 是抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 上不同的两点，如果 $a = b$ ，那么 $m =$ -4 ．

解：∵抛物线 $y = -x^2 - 2x + c$ 的 $a = -1$ ， $b = -2$ ，

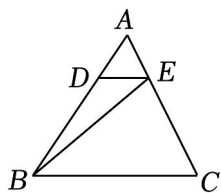
对称轴为： $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$ ，

∵ $A(2, a)$ 、 $B(m, b)$ 是抛物线上不同的两点，且 $a = b$ ，这意味着 A 、 B 两点的纵坐标相等，

$$\therefore \frac{2+m}{2} = -1,$$

∴解得 $m = -4$ ．

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别在 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $BD = 2AD$ ．设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BE}$ 可用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ．



解：∵ $DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC, \quad \angle AED = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{3AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \vec{b}.$$

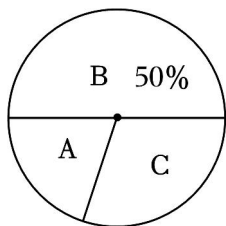
$$\begin{aligned} \because BD &= 2AD, \\ \therefore BD &= \frac{2}{3}AB, \\ \therefore \overrightarrow{BD} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\vec{a}, \\ \therefore \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

16. 某学习小组想了解本校学生课外阅读时间的情况, 在全校随机调查了部分学生, 对他们一周的课外阅读时长进行统计、整理, 并绘制成两幅不完整的统计图表.

编码	课外阅读时长 (分钟)	人数
<i>A</i>	$0 < x \leq 120$	10
<i>B</i>	$120 < x \leq 240$	25
<i>C</i>	$x > 240$	<i>a</i>

如果该校有 1200 名学生, 那么该校一周课外阅读时长超过 240 分钟的学生大约有 360 人.



解: 由题意得, 样本容量为: $25 \div 50\% = 50$,

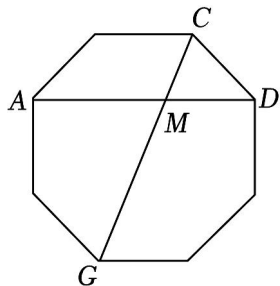
故 $a = 50 - 10 - 25 = 15$,

$$1200 \times \frac{15}{50} = 360 \text{ (人)},$$

即该校一周课外阅读时长超过 240 分钟的学生大约有 360 人.

故答案为: 360.

17. 如图, 正八边形的对角线 AD 、 CG 交于点 M , 那么 $\frac{AM}{MD}$ 的值为 $\sqrt{2}$.



解：如图，设正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心为点 O ，连接 OB 、 OA 、 OH ，

$$\therefore \angle GOH = \angle HOA = \angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{8} \times 360^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GOH + \angle HOA + \angle AOB + \angle BOC = 4 \times 45^\circ = 180^\circ,$$

$\therefore G$ 、 O 、 C 三点在同一条直线上，

$\therefore$ 点 O 在 CG 上，

连接 CA 、 OD ，则 $OD = OC = OA$ ，

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC = 45^\circ, \quad CA = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}OD,$$

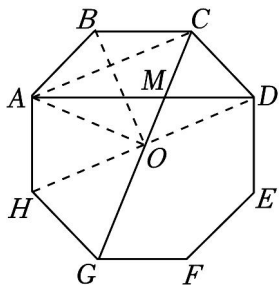
$$\therefore \angle OCA = \angle COD,$$

$$\therefore CA \parallel OD,$$

$$\therefore \triangle ACM \sim \triangle DOM,$$

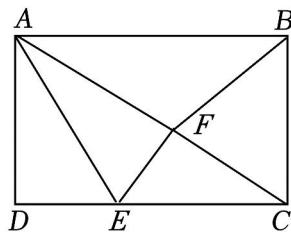
$$\therefore \frac{AM}{MD} = \frac{CA}{OD} = \frac{\sqrt{2}OD}{OD} = \sqrt{2},$$

故答案为： $\sqrt{2}$ 。



18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ，点 E 在边 CD 上，将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折，点 D 落在点 F

处，联结 BF 、 CF 。如果 $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形，那么 DE 的长是 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 。



解：如图 1， $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形，且 $BF = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ，

$$\therefore AD = BC, \quad \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ,$$

∵ 将 $\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折, 点 D 落在点 F 处,

$$\therefore AF = AD = BC = 5,$$

$$\therefore AF = BF,$$

过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G , 交 DC 于点 H , 则 $AG = BG = \frac{1}{2}AB = 4$,

$$\therefore \angle AGH = \angle GAD = \angle ADH = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $AGHD$ 是矩形,

$$\therefore DH = AG = 4, \quad GH = AD = 5, \quad \angle DHG = 90^\circ,$$

$$\therefore GF = \sqrt{AF^2 - AG^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore FH = GH - GF = 5 - 3 = 2,$$

$$\therefore EH^2 + FH^2 = FE^2, \quad \text{且 } EH = 4 - DE, \quad FE = DE,$$

$$\therefore (4 - DE)^2 + 2^2 = DE^2,$$

$$\text{解得 } DE = \frac{5}{2};$$

如图 2, $\triangle BCF$ 是以 BF 为腰的等腰三角形, 且 $BF = CF$,

连接 DF , 过点 F 作 $FQ \perp BC$ 于点 Q , 交 AD 于点 P , 则 $BQ = CQ = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$,

$$\therefore \angle PQB = \angle ABQ = \angle BAP = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $APQB$ 是矩形,

$$\therefore AP = BQ = \frac{5}{2}, \quad \angle APQ = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = DP = \frac{5}{2},$$

∴ PQ 垂直平分 AD ,

$$\therefore AF = DF,$$

$$\therefore AF = AD = DF,$$

∴ $\triangle ADF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FAE = \frac{1}{2}\angle DAF = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2DE,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{(2DE)^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE = 5,$$

$$\therefore DE = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

综上所述, DE 的长是 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

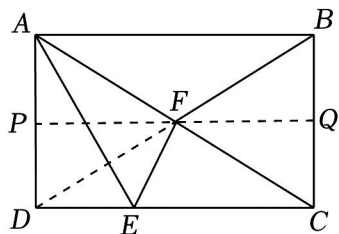


图2

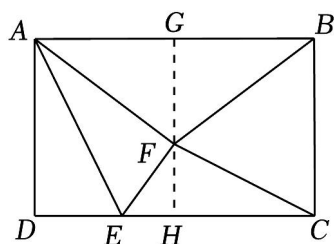


图1

三、解答题 (本大题共 7 题)

19. 计算: $8^{\frac{1}{2}} + |\sqrt{2} - 2| + (\frac{1}{2 + \sqrt{2}})^0 - (\sqrt{2} - 1)^{-1}$.

解: 原式 $= 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$$= \sqrt{2} + 3 - (\sqrt{2} + 1)$$

$$= \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} - 1$$

$$= 2.$$

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2(1 - x) \\ \frac{x - 10}{3} < 2x \end{cases}.$$

解:
$$\begin{cases} 3x - 2 < 2(1 - x) \text{ ①} \\ \frac{x - 10}{3} < 2x \text{ ②} \end{cases},$$

由①得, $x < \frac{4}{5}$,

由②得, $x > -2$,

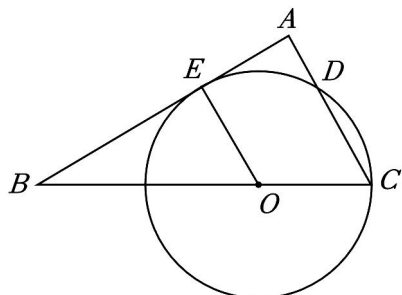
故不等式组的解集为: $-2 < x < \frac{4}{5}$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 点 O 在边 BC 上, 以 O 为圆心, OC 为半径的圆与边 AC

交于点 D ，与边 AB 相切于点 E 。

(1) 当 $BC = 12$ 时，求 $\odot O$ 的半径长；

(2) 求 $\frac{AD}{CD}$ 的值。



解：(1) $\because \odot O$ 与 AB 边相切于点 E ，

$\therefore AB \perp OE$ 于点 E ，

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$ ，

$\because \angle B = 30^\circ$ ， $OE = OC$ ，

$\therefore OB = 2OE = 2OC$ ，

$\because OB + OC = BC = 12$ ，

$\therefore 2OC + OC = 12$ ，

$\therefore OC = 4$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径长为 4。

(2) 连接 OD 、 ED ，则 $OD = OC = OE$ ，

$\because \angle OEB = \angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BOE = \angle C = 90^\circ - \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle COE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle COD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DOE = 180^\circ - \angle COD - \angle BOE = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle EOD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OED = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle OED - \angle OEB = 30^\circ$ ，

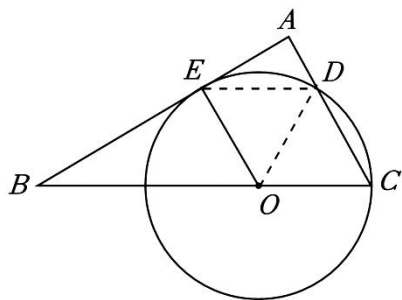
$\therefore AD = \frac{1}{2}ED$ ，

$\because ED = OD = CD$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} \text{ 的值为 } \frac{1}{2}.$$



22. 图 1 是某商场入口处摆放的“楼层导购图”展板. 图 2 是其横断面的示意图.

信息 1: 经过测量得到: $AC = CB = 50\text{cm}$, $CM = 125\text{cm}$, $\angle CME = 53^\circ$, $\angle ACM = 106^\circ$. (底座 EF 的高度忽略不计)

信息 2: P 为顾客看展板时眼睛所在的位置, $PQ \perp EF$, 垂足 Q 在 FE 的延长线上, 当视线 PC 与展板 AB 垂直时, 称点 P 为“最佳观察点”.

任务 (1): 求展板最低点 B 到地面 EF 的距离;

任务 (2): 如果 $PQ = 160\text{cm}$, 当点 P 为“最佳观测点”时, 求点 B 到 PQ 的距离. (参考数据:

$$\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}, \cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}, \tan 53^\circ \approx \frac{4}{3})$$



图1

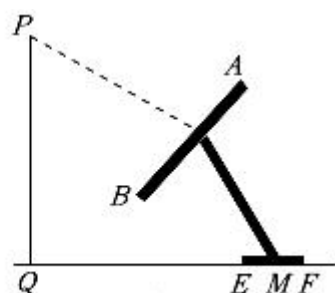


图2

解: (1) 如图 2, 过 C 作 $CH \perp QM$ 于 H , 过 B 点作 $BN \perp CH$ 于 N , 作 $BG \perp QM$ 于 G ,

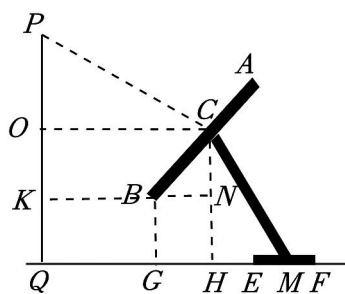


图2

$\therefore$ 在 $Rt \triangle CHM$ 中, $CM = 125cm$, $\angle CME = 53^\circ$,

$$\therefore CH = CM \cdot \sin 53^\circ \approx 125 \times \frac{4}{5} = 100,$$

$\therefore \angle ACM = 106^\circ$,

$$\therefore \angle BCM = 180^\circ - \angle ACM = 74^\circ,$$

又 $\therefore \angle HCM = 90^\circ - \angle CME = 37^\circ$,

$$\therefore \angle NCB = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle CBN = 90^\circ - \angle NCB = 53^\circ,$$

$\therefore CB = 50$,

$$\therefore \text{在 } Rt \triangle BCN \text{ 中, } CN = BC \cdot \sin \angle CBN = 50 \times \frac{4}{5} = 40,$$

$$\therefore BG = NH = CH - CN = 100 - 40 = 60(cm),$$

答: 展板最低点 B 到地面 EF 的距离为 $60cm$;

(2) 如图, 过 C 点作 $CO \perp PQ$ 于 O 点, 作 $BK \perp PQ$ 于 K 点,

$\therefore$ 由 (1) 知 $CN = 40$, $CB = 50cm$,

$$\therefore BN = 30,$$

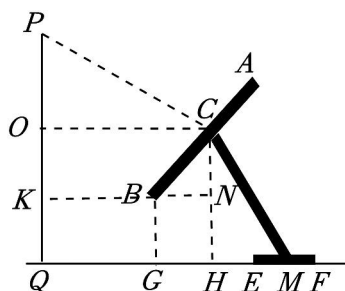


图2

$\therefore PC \perp AB$, $\angle PKB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle P + \angle CBK = 180^\circ,$$

$\therefore \angle CBK + \angle CBN = 180^\circ$,

$$\therefore \angle P = \angle CBN = 53^\circ,$$

设 $BK = x$,

$$\therefore CO = BK + BN = x + 30,$$

$\therefore PQ = 160$, $NH = 60$, $CN = 40$,

$$\therefore PO = PQ - NH - CN = 60,$$

$$\therefore \text{在 } Rt \triangle POC \text{ 中, } \tan \angle P = \tan 53^\circ = \frac{CO}{PO} = \frac{x+30}{60} \approx \frac{4}{3},$$

$$\therefore x = 50,$$

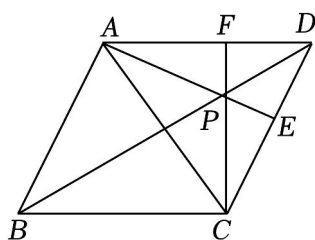
$$\therefore BK = 50(cm),$$

答：当点 P 为“最佳观测点”时，求点 B 到 PQ 的距离为 $50cm$.

23. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， P 是对角线 BD 上一点，联结 AP 、 CP 并延长，分别与边 CD 、 AD 交于点 E 、 F .

(1) 求证： $AE = CF$;

(2) 如果 $\angle APF = 2\angle ABD$ ，求证： $BP \cdot BD = 2AB^2$.



【解答】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = CD$ ， BD 垂直平分 AC ，

$\therefore \angle ACD = \angle CAD$ ，

$\because$ 点 P 在 BD 上，

$\therefore PA = PC$ ，

$\therefore \angle PAC = \angle PCA$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CAF$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle CAF \\ AC = CA \\ \angle EAC = \angle FCA \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CAF(ASA)$ ，

$\therefore AE = CF$.

(2) 设 AC 交 BD 于点 L ，则 $LB = LD = \frac{1}{2}BD$ ，

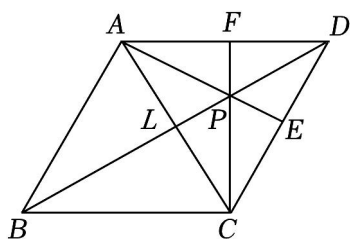
$\because AB = CB$ ， $BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，

$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD$ ，

$\because \angle APF = 2\angle ABD$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle APF = \angle ABC, \\
&\therefore \angle ABC + \angle APC = \angle APF + \angle APC = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BAP + \angle BCP = 360^\circ - (\angle ABC + \angle APC) = 180^\circ, \\
&\because \angle BAC = \angle BCA, \quad \angle PAC = \angle PCA, \\
&\therefore \angle BAP = \angle BAC + \angle PAC = \angle BCA + \angle PCA = \angle BCP, \\
&\therefore 2\angle BAP = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BLA = \angle BAP = 90^\circ, \\
&\because \angle ABL = \angle PBA, \\
&\therefore \triangle ABL \sim \triangle PBA, \\
&\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{LB}{AB}, \\
&\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{\frac{1}{2}BD}{AB}, \\
&\therefore BP \cdot BD = 2AB^2.
\end{aligned}$$

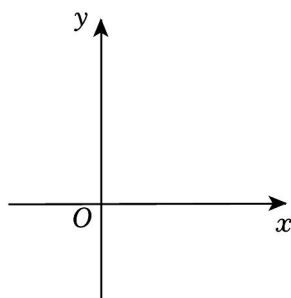


24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，（点 A 在点 B 的右侧）与 y 轴正半轴交于点 C ，顶点为 P 。

（1）求 PC 的长；

（2）当 $AC \perp PC$ 时，求抛物线的表达式；

（3）将该抛物线平移，新抛物线的顶点 P_1 落在 y 轴上，与原抛物线交于点 D ，如果点 P_1 与点 C 关于原点对称，且 $P_1D \parallel PC$ ，求 $\triangle P_1PC$ 的面积。



解：（1）由抛物线的表达式知，其对称轴为直线 $x=2$ ，

当 $x=2$ 时， $y=-x^2+4x+c=c+4$ ，则点 $P(2, c+4)$ ，

由点 $C(0, c)$ 、 P 的坐标得， $CP^2=2^2+(c+4-c)^2=20$ ，

则 $CP=2\sqrt{5}$ ；

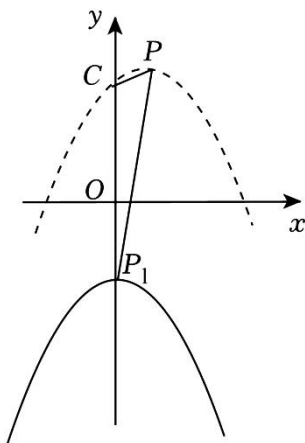
（2）点 $C(0, c)$ 、 P 的坐标得，直线 CP 的表达式为： $y=2x+c$ ，

$\because AC \perp PC$ ，则直线 AC 的表达式为： $y=-\frac{1}{2}x+c$ ，则点 $A(2c, 0)$ ，

将点 A 的坐标代入抛物线表达式得： $0=-4c^2+8c+c$ ，则 $c=0$ （舍去）或 $\frac{9}{4}$ ，

则抛物线的表达式为： $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ ；

（3）点 P_1 与点 $C(0, c)$ 关于原点对称，则点 $P_1(0, -c)$ ，



则新抛物线的表达式为： $y=-x^2-c$ ，

联立两个抛物线的表达式得： $-x^2+4x+c=-x^2-c$ ，

解得： $x=-\frac{1}{2}c$ ，则点 $C(-\frac{1}{2}c, -\frac{1}{4}c^2-c)$ ，

由点 D 、 P_1 的坐标得，该直线表达式函数值中的 k 值为： $\frac{1}{2}c$ ，

而直线 CP 的表达式为： $y=2x+c$ ， $P_1D \parallel PC$ ，

则 $2=\frac{1}{2}c$ ，则 $c=4$ ，

则 $\triangle PP_1C$ 的面积 $=\frac{1}{2} \times CP_1 \times x_p = \frac{1}{2}(2c) \times 2 = 2c = 8$ 。

25. 已知 AB 是半圆 O 的直径， P 是弦 AC 延长线上一点。

（1）联结 PO 与半圆交于点 D 。

①如图 1，如果点 C 是弧 AB 的中点，且 $\tan P = \frac{1}{3}$, $PC = 2\sqrt{2}$ ，求 PD 的长；

②如图 2，如果点 C 是弧 AD 的中点，且 $PA = PO$ ，求 $\frac{PC}{PD}$ 的值.

(2) 设 M 是弦 AC 的中点，如果以点 A 为圆心、 AP 为半径的圆与 $\odot O$ 相切，以点 P 为圆心、 PM 为半径的圆与直线 AB 相切，求 $\sin \angle PAB$ 的值.

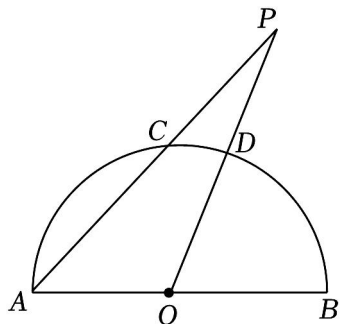


图1

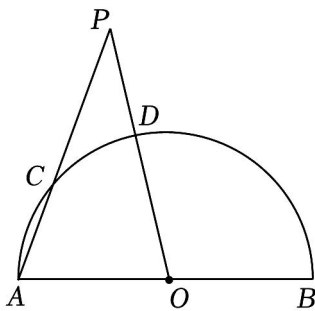
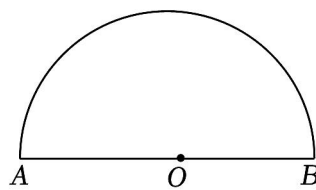
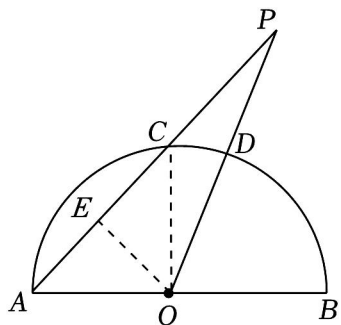


图2



备用图

解: (1) ①连接 OC ，过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E ，如图，



$\because AB$ 是半圆 O 的直径，点 C 是弧 AB 的中点，

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ,$$

$\because OA = OC$ ， $OE \perp AC$ ，

$$\therefore OE = EC = AE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}OA,$$

设 $OE = EC = x$ ，则 $PE = PC + CE = 2\sqrt{2} + x$ ，

$$\because \tan P = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{x}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

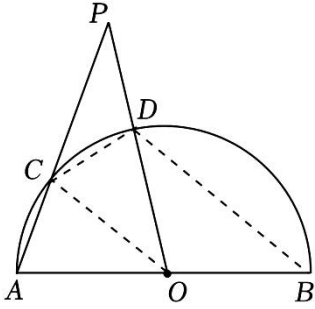
$$\therefore x = \sqrt{2},$$

$$\therefore PE = 3\sqrt{2}, \quad OE = \sqrt{2}, \quad OA = \sqrt{2}OE = 2,$$

$$\therefore PO = \sqrt{PE^2 + OE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore PD = PO - OD = 2\sqrt{5} - 2 .$$

②连接 OC , CD , BD , 如图,



$\because$ 点 C 是弧 AD 的中点,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD} ,$$

$$\therefore AC = CD , \quad \angle AOC = \angle DOC = \frac{1}{2} \angle AOD ,$$

$$\because \angle B = \frac{1}{2} \angle AOD ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle B .$$

$$\because PA = PO ,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle POA ,$$

$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle OCA ,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle POA ,$$

$$\because \angle A = \angle A ,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle APO ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle P ,$$

$$\therefore \angle P = \angle DOC ,$$

$$\therefore PC = OC ,$$

$$\therefore PC = OC = OA = OD ,$$

$\because$ 四边形 $ABDC$ 为圆的内接四边形,

$$\therefore \angle PCD = \angle B ,$$

$$\therefore \angle PCD = \angle P ,$$

$$\therefore PD = CD ,$$

$$\therefore AC = PD .$$

设 $PC = OC = OA = OD = x$, $PD = AC = y$, 则 $PO = x + y$,

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle APO$,

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{PO}{OC} ,$$

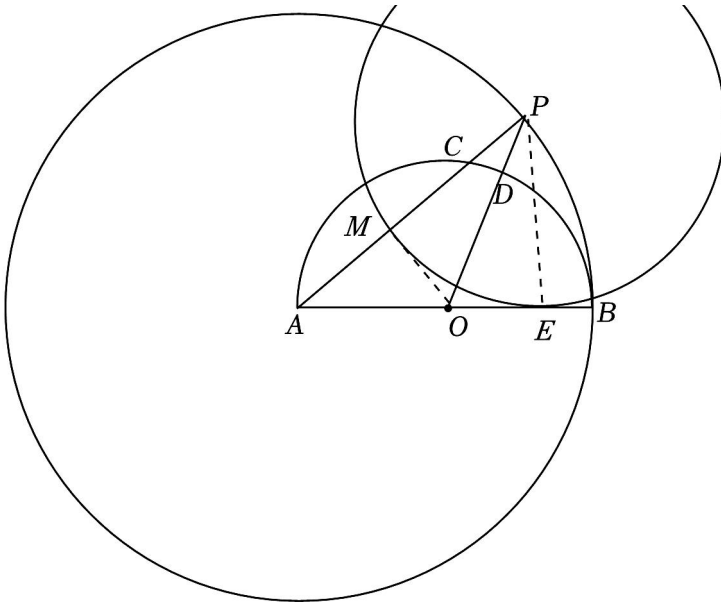
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} .$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} y \text{ (负数不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ,$$

$$\therefore \frac{PC}{PD} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ;$$

(2) 设 PM 为半径的圆与直线 AB 相切于点 E , 连接 OM , PE , 如图,



$\therefore$ 点 A 为圆心、 AP 为半径的圆与 $\odot O$ 相切,

$\therefore$ 点 B 为切点,

$$\therefore AP = AB ,$$

设 $AP = AB = 2r$, 则 $OA = r$,

$\therefore M$ 是弦 AC 的中点,

$$\therefore OM \perp AC , \quad AM = MC = \frac{1}{2} AC ,$$

$\therefore PM$ 为半径的圆与直线 AB 相切于点 E ,

$$\therefore PE \perp AB , \quad PE = PM ,$$

在 $Rt \triangle PMO$ 和 $Rt \triangle PEO$ 中,

$$\begin{cases} PM = PE \\ PO = PO \end{cases},$$

$$\therefore Rt \triangle PMO \cong Rt \triangle PEO(HL),$$

$$\therefore OM = OE,$$

$$\text{设 } OM = OE = a,$$

$$\because \angle A = \angle A, \quad \angle AMO = \angle AEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAM \sim \triangle PAE,$$

$$\therefore \frac{OM}{PE} = \frac{AM}{AE} = \frac{OA}{AP} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}PE, \quad AM = \frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore AE = AC = AO + OE = r + a, \quad PE = 2a,$$

$$\therefore PM = 2a,$$

$$\therefore AM = AP - PM = 2r - 2a,$$

$$\because AM = \frac{1}{2}AC = \frac{r+a}{2},$$

$$\therefore 2r - 2a = \frac{r+a}{2},$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}a.$$

$$\therefore AP = 2r = \frac{10}{3}a,$$

$$\therefore \sin \angle PAB = \frac{PE}{PA} = \frac{2a}{\frac{10}{3}a} = \frac{3}{5}.$$