

2024 学年第一学期期末学情诊断初三数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤;

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 下列函数中, 一定是二次函数的是 ()

A. $y = \frac{3}{4}x + m^2$ (其中 m 是常数)

B. $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数)

C. $y = (2x - 1)x$

D. $y = (x + 4)^2 - x^2$

2. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 那么下列各式中, 正确的是 ()

A. $\sin B = \frac{3}{5}$

B. $\cos B = \frac{3}{5}$

C. $\cot B = \frac{3}{5}$

D. $\tan B = \frac{3}{5}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于抛物线 $y = -(x - 20)^2 + 25$, 下列叙述正确的是 ()

A. 抛物线有最低点, 最低点的坐标是 $(20, 25)$

B. 抛物线有最高点, 最高点的坐标是 $(-20, 25)$

C. 抛物线有最高点, 最高点的坐标是 $(20, 25)$

D. 抛物线有最低点, 最低点的坐标是 $(-20, 25)$

4. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 两个等腰三角形一定相似

B. 两个直角三角形一定相似

C. 含 45° 角的两个等腰三角形一定相似

D. 含 105° 角的两个等腰三角形一定相似

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别是边 AB , AC 的中点. 下列结论中, 错误的是 ()

A. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

B. $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

C. $DE = \frac{1}{2} BC$

D. $DE \parallel BC$

6. 已知二次函数 $y = f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线, 抛物线的对称轴在 y 轴右侧. 当抛物线与 x 轴两交

点的距离为 9 时，若 $f(-5)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(4)$ 、 $f(7)$ 这四个函数值中有且只有一个值不大于 0，那么在这四个函数值中，值不大于 0 是 ()

- A. $f(-5)$ B. $f(-1)$ C. $f(4)$ D. $f(7)$

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 已知 a 、 b 是不等于 0 的实数， $7a = 5b$ ，那么 $\frac{a+b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

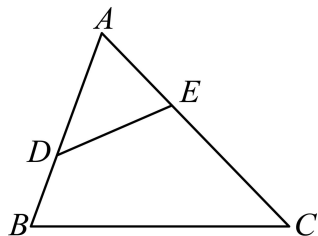
8. 已知 $f(x) = 4x^2 - 1$ ，那么 $f(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 将二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式: $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

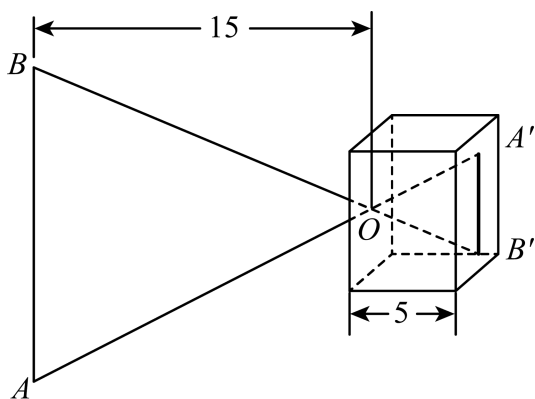
10. 第七届中国国际进口博览会 (简称“进博会”) 于 2024 年 11 月 5 日至 10 日在国家会展中心 (上海) 隆重举办. 以“新时代、共享未来”为主题，是世界上首个以进口为主题的国家级博览会. 小海在地图上 (如图 1) 测量他家与国家会展中心 (上海) 的距离为 2.6 厘米，那么请帮小海计算出他家与国家会展中心 (上海) 的实际距离为 千米.



11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上. 添加一个条件使 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，则这个条件可以是 . (写出一种情况即可)



12. (洞孔成像) 如图， $AB \parallel A'B'$ ，物像 $A'B'$ 所在正方体的面与平面 $A'B'AB$ 垂直，根据图中尺寸，已知物像 $A'B'$ 的长为 4，那么物 AB 长为 .



13. 已知两个相似三角形的一组对应边长分别是 5 厘米和 2 厘米，如果这组对应边上的高的长度相差 2.4 厘米，那么这两条高的长度和为_____厘米.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB = AC$ ，这个三角形的重心为点 G ，设 $\overrightarrow{GB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{GA} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

15. 如图，一座大楼前的残疾人通道是斜坡，用 AB 表示，沿着通道走 3.2 米可进入楼厅，楼厅比楼外的地面高 0.4 米，那么残疾人通道的坡度为_____。（结果保留根号的形式）



16. 某校初三数学活动小组在利用尺规把线段 AB 分割成两条线段.

①过点 B 作 $BC \perp AB$ ，使 $BC = \frac{1}{2} AB$.

②连接 AC ，在线段 CA 上截取 $CD = CB$.

③在线段 AB 上截取 $AE = AD$.

那么 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 13$ ，点 E 在边 DC 上，将矩形 $ABCD$ 沿 AE 翻折，点 D 恰好落在边 BC 上的点 F 处，那么 EC 的长为_____.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $l_1: y = ax^2 + bx + c$ （其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$ ），以原点为中心，旋转 180° 得抛物线 l_2 ，则称 l_2 是 l_1 的“中心对称抛物线”. 已知抛物线 $y_1 = x^2 - 3x - 4$ ，将抛物

线 y_1 向左平移 n 个单位长度, 与 x 轴的交点从左到右依次为 A 、 B . 将抛物线 y_1 的“中心对称抛物线” y_2 向右也平移 n 个单位长度, 与 x 轴的交点从左到右依次为 C 、 D . 当线段 BC 是线段 AB 、 BD 的比例中项时, n 的值为_____.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

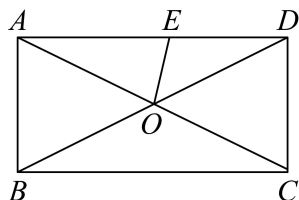
19. 计算: $\frac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ} - \cot^2 30^\circ + \frac{4 \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ + \tan 45^\circ}$.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知: 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(-4, 3)$ 和 $B(2, 1)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若点 $C(6, m)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ 上, 求 $\angle ACO$ 的正弦值.

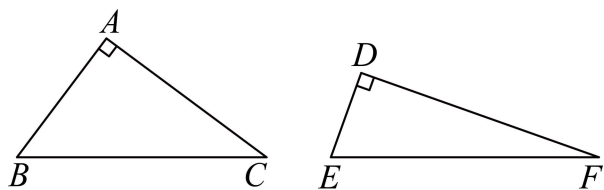
21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 4$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 在边 AD 上, 且 $\angle AEO = \angle AOE$.



(1) 求 AE 的长;

(2) 求 $\tan \angle AEO$ 的值.

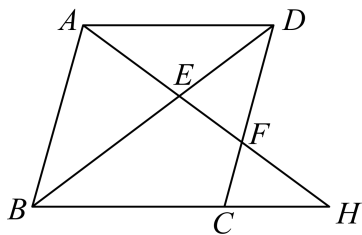
22. 如图, ABC 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形纸片, $\angle A = \angle D = 90^\circ$ 且 ABC 和 $\triangle DEF$ 不相似. 其中 $AB = a$, $AC = b$, $DE = m$, $DF = n$ ($n > b > a > m$). 是否存在经过锐角顶点的一条直线, 能把 ABC 和 $\triangle DEF$ 分割成两个三角形, 使分割得的两个三角形中有一个三角形 (记这个三角形的面积为 S) 与没有分割的三角形相似.



(1) 如果存在, 请写出你的分割方案 (只要写出一个方案即可), 并证明方案的正确性;

(2) 按照你写出的分割方案, 求出 S 的值 (可以用 a 或 b 或 m 或 n 的代数式表示).

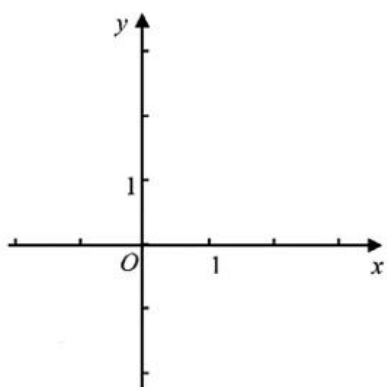
23. 已知: 如图, 点 E 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点, 射线 AE 与 DC 交于点 F , 与 BC 的延长线交于点 H .



(1) 求证: $AE^2 = EF \cdot EH$;

(2) 连接 DH , 若 $DH = AB$, $AD^2 = AE \cdot AH$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $f(x) = x^2 + (b+1)x + b$ ($b < 0$), $f(x)$ 的图像与 x 轴的两个交点为点 P 、点 Q (其中点 P 在点 Q 左侧).



(1) 若将 $f(x)$ 的图像向上平移 2 个单位, 得到的新抛物线 $g(x)$ 经过点 $(1, -3)$, 求抛物线 $g(x)$ 的表达式;

(2) 若 $f(x)$ 的图像在直线 $x=1$ 的右侧呈上升趋势, 求 b 的取值范围;

(3) 在 (1) 中所求的 $g(x)$ 的图像与 y 轴的交点记为点 B , 与 x 轴的正半轴交点记为点 A , 点 M 在 $g(x)$ 的图像上. 当直线 MQ 与直线 PB 垂直, 且 $QP = \frac{3}{5}QA$ 时, 求点 M 的坐标.

25. 已知三角形 ADE 的顶点 E 在三角形 ABC 的内部, 点 D 、点 E 在直线 AC 同侧.

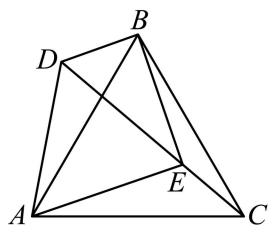


图1

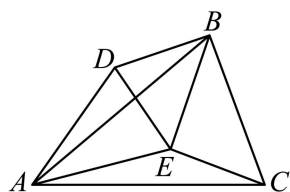
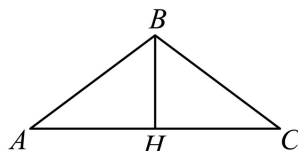


图2



备用图

(1) 如图 1, 连接 BD 、 BE 、 CE , 若 ABC 和 ADE 是等边三角形时, 点 C 、 D 、 E 三点共线, $CE:DE = 1:2$, 求 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ 的比值;

(2) 如图 2, 连接 BD 、 BE 、 CE (点 C 、 D 、 E 三点不共线), $\angle BAC = \angle DAE = n^\circ$ ($0 < n < 90$),

若 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，求 $\angle BEC - \angle DBE$ 的值（用含 n 的代数式表示）；

(3) 若 ABC 是等腰三角形， $AB = BC = 5$ ， $AC = 8$ ， $BH \perp AC$ ，点 E 在高 BH 上，点 D 在 HB 的延长线上，连接 AE 并延长交边 BC 于点 F ，连接 DF ， DA ，当 $\angle DAE = \angle ABH$ ， $\triangle ABD$ 与 BDF 相似时，求 EH 的长.