

九年级数学试卷 2024 年 1 月

(满分: 150 分, 考试时间: 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

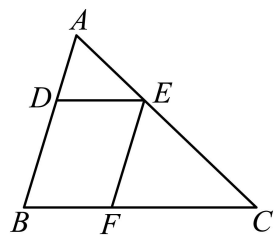
1. 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 如果一个直角三角形的一个锐角等于另一个直角三角形的锐角, 那么这两个三角形相似
- B. 如果一个等腰三角形的一个内角等于另一个等腰三角形的内角, 那么这两个三角形相似
- C. 如果一个直角梯形的一个锐角等于另一个直角梯形的锐角, 那么这两个梯形相似
- D. 如果一个等腰梯形的一个内角等于另一个等腰梯形的内角, 那么这两个梯形相似

2. 已知: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$, 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 2, $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 相似比为 4, 那么 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 的相似比为 ()

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

3. 如图, $\triangle ABC$ 三边上点 D 、 E 、 F , 满足 $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 那么下列等式中, 成立的是 ()



- A. $\frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC}$
- B. $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{FC}$
- C. $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$
- D. $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{BC}$

4. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 记 $\vec{a} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 那么下列等式中, 成立的是 ()

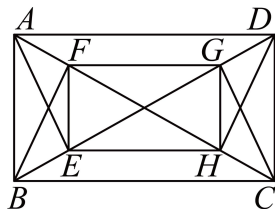
- A. $\vec{b} = \vec{a}$
- B. $\vec{b} = 2\vec{a}$
- C. $\vec{b} = 3\vec{a}$
- D. $\vec{b} = 4\vec{a}$

5. 将二次函数 $y = x^2 + 2x + 3$ 和 $y = -x^2 + 2x - 3$ 的图象画在同一平面直角坐标系中, 那么这两个图象都是

上升的部分，所对应自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x \leq -1$ C. $-1 \leq x \leq 1$ D. $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$

6. 如图，过矩形 $ABCD$ 的顶点分别作对角线的垂线，垂足分别为 E 、 F 、 G 、 H ，依次连接四个垂足，可得到矩形 $EFGH$ 。设对角线 AC 与 BD 的夹角为 α ($0 < \alpha < 90^\circ$)，那么矩形 $EFGH$ 与矩形 $ABCD$ 面积的比值为 ()



- A. $\sin^2 \alpha$ B. $\cos^2 \alpha$ C. $\tan^2 \alpha$ D. $\cot^2 \alpha$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, 则 $\frac{b-a}{b+a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是互不平行的非零向量, 如果 $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$, 那么向量 $\vec{n}$ 与 $\vec{m}$ 是否平行?

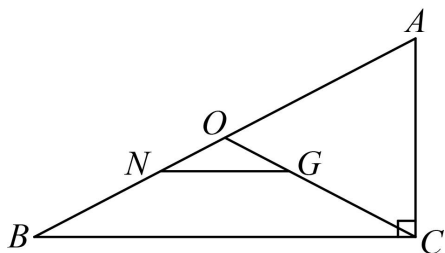
答: $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 顶点位于第三象限内, 且其开口向上, 请写出一个满足上述特征的抛物线的表达式 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上, 且经过点 $(3, 4)$ 和 $(-2, 4)$, 如果点 $(1, y_1)$ 与 $(2, y_2)$ 在此抛物线上, 那么 y_1 $\underline{\hspace{1cm}}$ y_2 . (填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

11. 已知点 $A(1, 4)$ 、 $B(-2, 0)$, 那么直线 AB 与 x 轴夹角的正弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 6$, CO 是边 AB 上的中线, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 $GN \parallel BC$ 交 AB 于点 N , 那么 $\triangle OGN$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

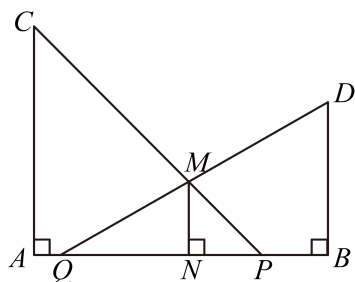


13. 已知等腰三角形的腰与底边之比为 $3:2$, 那么这个等腰三角形底角的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

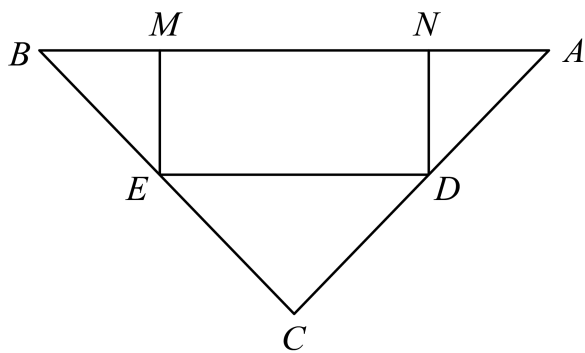
14. 如图, N 是线段 AB 上一点, $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, $NM \perp AB$, 连接 CM 并延长交 AB 于点 P ,

连接 DM 并延长交 AB 于点 Q . 已知 $AB = 4$, $AC = 3$, $BD = 2$, $MN = 1$, $PN = 1.2$, 那么

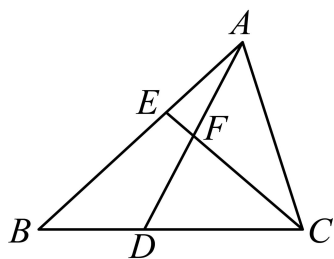
$QN =$ _____.



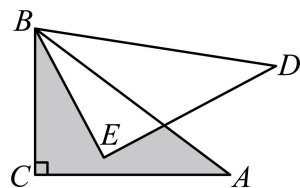
15. 在一块等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮. 如图, 已有的铁皮是等腰直角三角形 ABC , 它的底边 AB 长 20 厘米. 要截得的矩形 $DEMN$ 的边 MN 在 AB 上, 顶点 D 、 E 分别在边 AC 、 BC 上, 设 DE 的长为 x 厘米, 矩形 $DEMN$ 的面积为 y 平方厘米, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____. (不必写定义域)



16. 如图, 点 D 、 E 分别位于 $\triangle ABC$ 边 BC 、 AB 上, AD 与 CE 交于点 F . 已知 $AF : FD = 1 : 1$, $EF : FC = 1 : 4$, 则 $BD : CD =$ _____.



17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转到 $\triangle DBE$ 的位置, 其中点 D 与点 A 对应, 点 E 与点 C 对应. 如果图中阴影部分的面积为 4.5, 那么 $\angle CBE$ 的正切值是_____.



18. 为了研究抛物线 $L_1 : y = ax^2 + bx + c$ 与 $L_2 : y = -ax^2 + bx - c$ 在同一平面直角坐标系中的位置特征,

我们可以先取字母常数 a 、 b 、 c 的一些特殊值, 试着画出相应的抛物线, 通过观察来发现 L_1 与 L_2 的位置特

征，你的发现是：_____；我们知道由观察得到的特征，其可靠性是需要加以论证才能成为一个结论的，那么请你就你所发现的特征，简述一下理由吧。理由是：_____。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

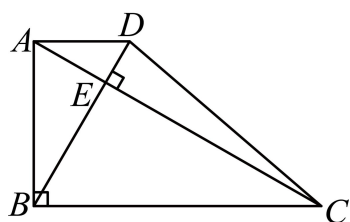
19. 计算： $2\sin 60^\circ + \frac{2}{\cot 45^\circ - \tan 60^\circ} - \cos^2 30^\circ$.

20. 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 的顶点为 A，它与 y 轴的交点为 B.

(1) 求线段 AB 的长；

(2) 平移该抛物线，使其顶点在 y 轴上，且与 x 轴两交点间的距离为 4，求平移后所得抛物线的表达式.

21. 如图，在四边形 ABCD 中， $AD \parallel BC$, $AD = 1$, $BC = 3$ ，对角线 AC、BD 交于点 E.

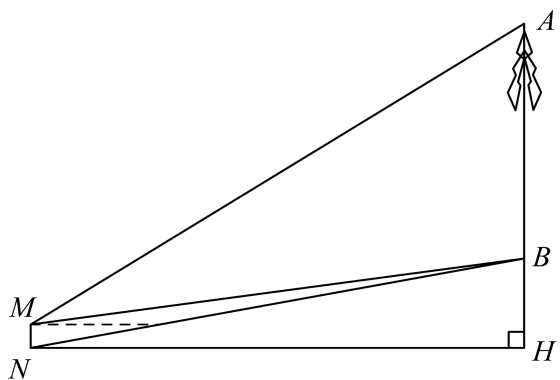


(1) 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{CD}$.

(2) 如果 $\angle ABC = 90^\circ$, $AC \perp BD$ ，求四边形 ABCD 的面积.

22. 在世纪公园的小山坡上有一棵松树，初三（3）班的雏鹰小队带着工具对这棵松树进行测量，并试图利用所学的数学知识与方法推算出这棵松树的高度。他们选好位置架设测角仪先测出了这棵松树的根部与顶端的仰角，并绘制了如下示意图：测角仪为 MN，树根部为 B、树顶端为 A，其中 $MN = 1.5\text{m}$ ，视线 MB 的

仰角为 α （已知 $\tan \alpha = \frac{1}{6}$ ），视线 MA 的仰角为 β （已知 $\tan \beta = \frac{3}{4}$ ）。

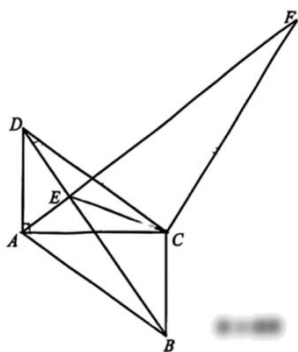


(1) 测得这两个数据后，小明说：“我可以算出这棵松树的高度了。”小聪接着说：“不对吧，只知道这两个角度，这个示意图显然是可以进行放大或缩小的，高度一定是确定不了的。如果还能测出测角仪到松树的垂直距离，即图示中 NH 的长度，就可以了。”设 $NH = a$ ，请你用含有 a 的代数式表示松树 (AB) 的

高度.

(2) 小明又反问道: “虽然我们带了尺, 是一把刻度精确到 1 分米, 长为 2 米的直尺, 但也没有办法量出 NH 的长度, 我们总不能把坡给挖平了吧?” 请你想一个测量办法, 利用现有的工具, 测量出有关数据 (数据可以用字母常数表示), 并用含有这些字母常数的表达式表示出松树 (AB) 的高度.

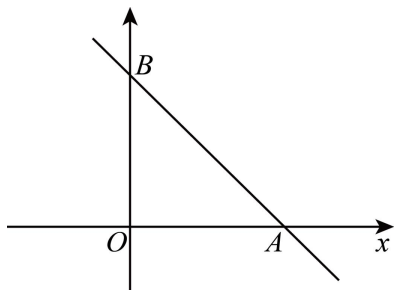
23. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp AD$, 过点 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为 E , 再过点 C 作 $CF \perp CD$ 交直线 AE 于点 F .



(1) 求证: $CA \cdot CD = CB \cdot CF$;

(2) 连接 CE , 求证: $\angle ACE = \angle F$.

24. 如图, 直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B . 对称轴为直线 $x = 1$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A, B , 其与 x 轴的另一交点为 C .



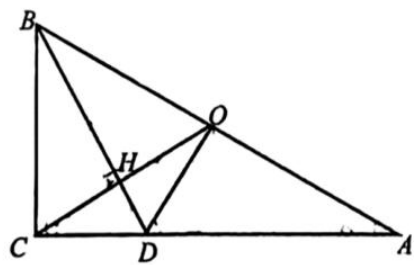
(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将该抛物线平移, 使其顶点在线段 AB 上点 P 处, 得到新抛物线 L , 其与直线 $y = -x + 3$ 的另一个交点为 Q .

①如果抛物线 L 经过点 A , 且与 x 轴的另一交点为 D , 求线段 CD 的长;

②试问: $\triangle CPQ$ 的面积是否随点 P 在线段 AB 上的位置变化而变化? 如果变化, 请说明理由; 如果不变, 请求出 $\triangle CPQ$ 面积.

25. 如图, O 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 的中点, $BH \perp CO$ 交 AC 于 D , 垂足为 H , 连接 OD .



- (1) 求证: $BC^2 = AC \cdot CD$;
- (2) 如果 $\triangle ODH$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求其相似比;
- (3) 如果 $BH : DH = 4 : 1$, 求 $\angle ADO$ 的大小.