

2021 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

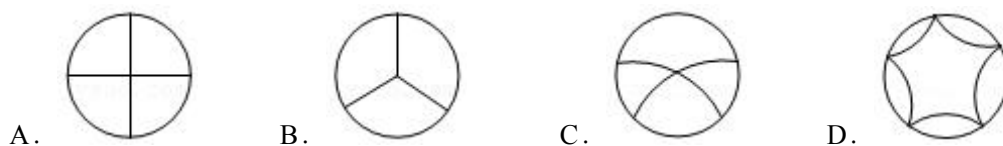
1. (3 分) (2021·哈尔滨) $-\frac{1}{7}$ 的绝对值是()

- A. -7 B. 7 C. $-\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

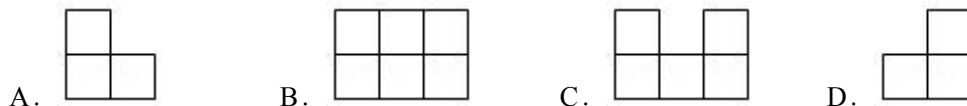
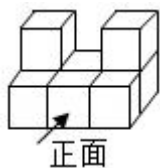
2. (3 分) (2021·哈尔滨) 下列运算一定正确的是()

- A. $a^2 \cdot a = a^3$ B. $(a^3)^2 = a^5$ C. $(a-1)^2 = a^2 - 1$ D. $a^5 - a^2 = a^3$

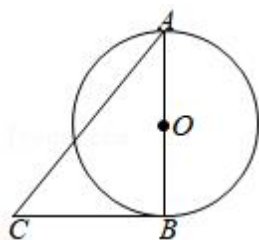
3. (3 分) (2021·哈尔滨) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是()



4. (3 分) (2021·哈尔滨) 八个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示，其主视图是()



5. (3 分) (2021·哈尔滨) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的切线，点 B 为切点，若 $AB = 8$ ， $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$ ，则 BC 的长为()

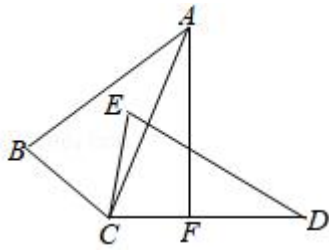


- A. 8 B. 7 C. 10 D. 6

6. (3 分) (2021·哈尔滨) 方程 $\frac{1}{2+x} = \frac{2}{3x-1}$ 的解为()

- A. $x = 5$ B. $x = 3$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

7. (3 分) (2021·哈尔滨) 如图， $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，点 A 和点 D 是对应顶点，点 B 和点 E 是对应顶点，过点 A 作 $AF \perp CD$ ，垂足为点 F ，若 $\angle BCE = 65^\circ$ ，则 $\angle CAF$ 的度数为()

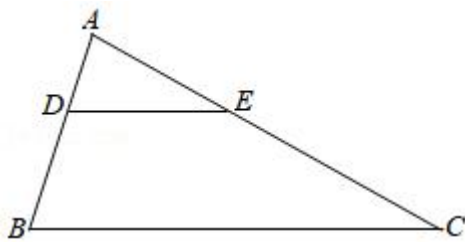


- A. 30° B. 25° C. 35° D. 65°

8. (3分) (2021·哈尔滨) 一个不透明的袋子中装有 12 个小球，其中 8 个红球、4 个黄球，这些小球除颜色外无其它差别，从袋子中随机摸出一个小球，则摸出的小球是红球的概率是 ()

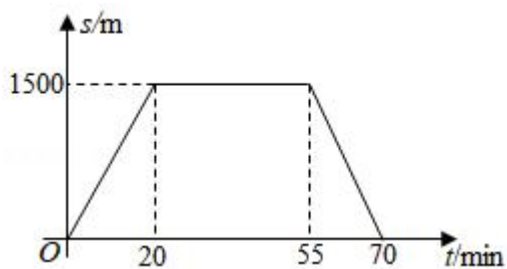
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{2}{3}$

9. (3分) (2021·哈尔滨) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD=2$ ， $BD=3$ ， $AC=10$ ，则 AE 的长为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. (3分) (2021·哈尔滨) 周日，小辉从家步行到图书馆读书，读了一段时间后，小辉立刻按原路回家. 在整个过程中，小辉离家的距离 s (单位: m) 与他所用的时间 t (单位: min) 之间的关系如图所示，则小辉从家去图书馆的速度和从图书馆回家的速度分别为 ()



- A. $75m/min$ ， $90m/min$ B. $80m/min$ ， $90m/min$
C. $75m/min$ ， $100m/min$ D. $80m/min$ ， $100m/min$

二、填空题 (每小题 3 分，共计 30 分)

11. (3分) (2021·哈尔滨) 火星赤道半径约为 3396000 米，用科学记数法表示为 _____ 米.

12. (3分) (2021·哈尔滨) 在函数 $y = \frac{2x}{7x-5}$ 中，自变量 x 的取值范围是 _____.

13. (3分)(2021·哈尔滨) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(2, -5)$, 则 k 的值为 ____.

14. (3分)(2021·哈尔滨) 计算 $\sqrt{18} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的结果是 ____.

15. (3分)(2021·哈尔滨) 把多项式 $a^2b - 25b$ 分解因式的结果是 ____.

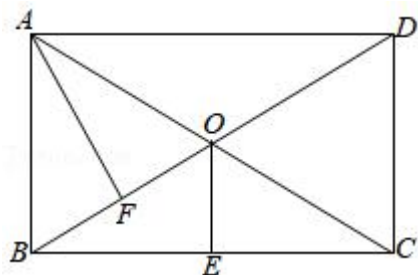
16. (3分)(2021·哈尔滨) 二次函数 $y = -3x^2 - 2$ 的最大值为 ____.

17. (3分)(2021·哈尔滨) 不等式组 $\begin{cases} 3x - 7 < 2 \\ x - 5 \leq 10 \end{cases}$ 的解集是 ____.

18. (3分)(2021·哈尔滨) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 6$, $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E , 若 $CE = 2$, 则 $\square ABCD$ 的周长为 ____.

19. (3分)(2021·哈尔滨) 一个扇形的弧长是 8π cm, 圆心角是 144° , 则此扇形的半径是 ____ cm.

20. (3分)(2021·哈尔滨) 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 过点 O 作 $OE \perp BC$, 垂足为点 E , 过点 A 作 $AF \perp OB$, 垂足为点 F . 若 $BC = 2AF$, $OD = 6$, 则 BE 的长为 ____.



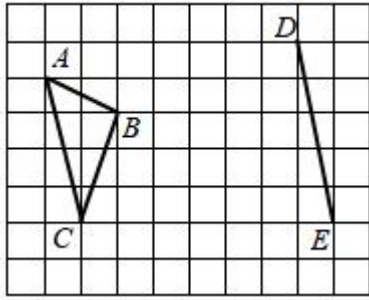
三、解答题 (其中 21-22 题各 7 分, 23-2 题各 8 分, 25-27 题各 10 分, 共计 60 分)

21. (7分)(2021·哈尔滨) 先化简, 再求代数式 $(\frac{3}{a-1} - \frac{2a+3}{a^2-1}) \div \frac{a}{a-1}$ 的值, 其中 $a = 2\sin 45^\circ - 1$.

22. (7分)(2021·哈尔滨) 如图, 方格纸中每个小正方形的边长均为 1 个单位长度, $\triangle ABC$ 的顶点和线段 DE 的端点均在小正方形的顶点上.

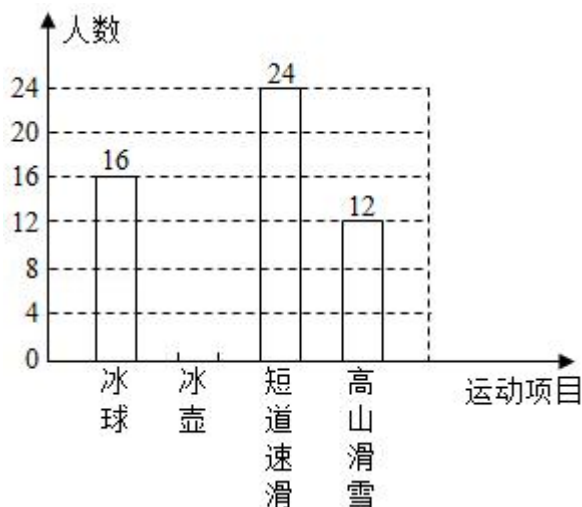
(1) 在方格纸中将 $\triangle ABC$ 向上平移 1 个单位长度, 再向右平移 2 个单位长度后得到 $\triangle MNP$ (点 A 的对应点是点 M , 点 B 的对应点是点 N , 点 C 的对应点是点 P), 请画出 $\triangle MNP$;

(2) 在方格纸中画出以 DE 为斜边的等腰直角三角形 DEF (点 F 在小正方形的顶点上). 连接 FP , 请直接写出线段 FP 的长.



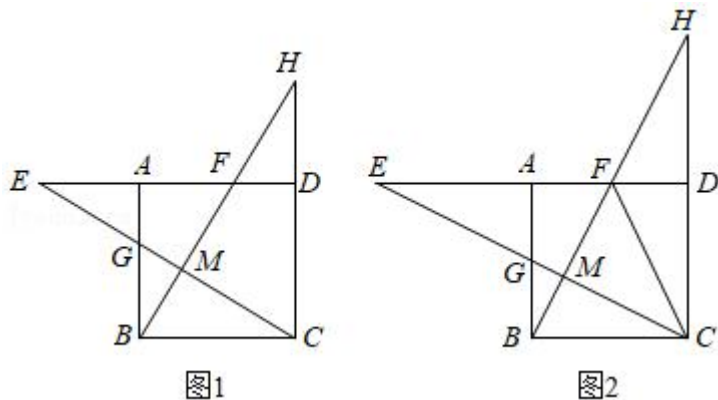
23. (8分)(2021·哈尔滨)春宁中学开展以“我最喜欢的冰雪运动项目”为主题的调查活动,围绕“在冰球、冰壶、短道速滑、高山滑雪四种冰雪运动项目中,你最喜欢哪一种?(必选且只选一种)”的问题,在全校范围内随机抽取部分学生进行问卷调查,将调查结果整理后绘制成如图所示的不完整的条形统计图,其中最喜欢短道速滑的学生人数占所调查人数的40%.请你根据图中提供的信息解答下列问题:

- (1)在这次调查中,一共抽取了多少名学生?
- (2)请通过计算补全条形统计图;
- (3)若春宁中学共有1500名学生,请你估计该中学最喜欢高山滑雪的学生共有多少名.



24. (8分)(2021·哈尔滨)已知四边形 $ABCD$ 是正方形,点 E 在边 DA 的延长线上,连接 CE 交 AB 于点 G ,过点 B 作 $BM \perp CE$,垂足为点 M , BM 的延长线交 AD 于点 F ,交 CD 的延长线于点 H .

- (1)如图1,求证: $CE = BH$;
- (2)如图2,若 $AE = AB$,连接 CF ,在不添加任何辅助线的情况下,请直接写出图2中的四个三角形($\triangle AEG$ 除外),使写出的每个三角形都与 $\triangle AEG$ 全等.



25. (10分)(2021·哈尔滨)君辉中学计划为书法小组购买某种品牌的A、B两种型号的毛笔.若购买3支A种型号的毛笔和1支B种型号的毛笔需用22元;若购买2支A种型号的毛笔和3支B种型号的毛笔需用24元.

(1)求每支A种型号的毛笔和每支B种型号的毛笔各多少元;

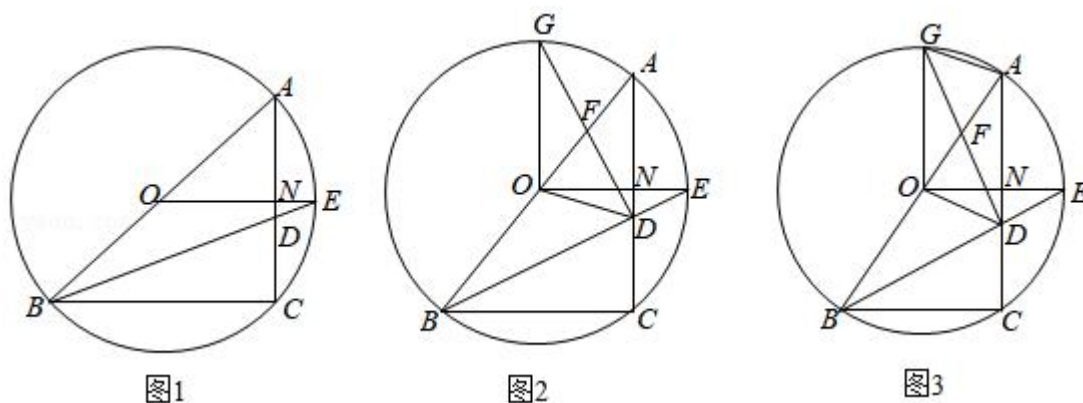
(2)君辉中学决定购买以上两种型号的毛笔共80支,总费用不超过420元,那么该中学最多可以购买多少支A种型号的毛笔?

26. (10分)(2021·哈尔滨)已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为 $\odot O$ 的直径,点 N 为 AC 的中点,连接 ON 并延长交 $\odot O$ 于点 E ,连接 BE , BE 交 AC 于点 D .

(1)如图1,求证: $\angle CDE + \frac{1}{2}\angle BAC = 135^\circ$;

(2)如图2,过点 D 作 $DG \perp BE$, DG 交 AB 于点 F ,交 $\odot O$ 于点 G ,连接 OG , OD ,若 $DG = BD$,求证: $OG \parallel AC$;

(3)如图3,在(2)的条件下,连接 AG ,若 $DN = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,求 AG 的长.



27. (10分)(2021·哈尔滨)在平面直角坐标系中,点 O 为坐标系的原点,抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过 $A(10,0)$, $B(\frac{5}{2}, 6)$ 两点,直线 $y = 2x - 4$ 与 x 轴交于点 C ,与 y 轴交于点 D ,点 P 为直线 $y = 2x - 4$ 上的一个动点,连接 PA .

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图 1, 当点 P 在第一象限时, 设点 P 的横坐标为 t , $\triangle APC$ 的面积为 S , 求 S 关于 t 的函数解析式 (不要求写出自变量 t 的取值范围);

(3) 如图 2, 在 (2) 的条件下, 点 E 在 y 轴的正半轴上, 且 $OE = OD$, 连接 CE , 当直线 BP 交 x 轴正半轴于点 L , 交 y 轴于点 V 时, 过点 P 作 $PG \parallel CE$ 交 x 轴于点 G , 过点 G 作 y 轴的平行线交线段 VL 于点 F , 连接 CF , 过点 G 作 $GQ \parallel CF$ 交线段 VL 于点 Q , $\angle CFG$ 的平分线交 x 轴于点 M , 过点 M 作 $MH \parallel CF$ 交 FG 于点 H , 过点 H 作 $HR \perp CF$ 于点 R , 若 $FR + MH = GQ$, 求点 P 的坐标.

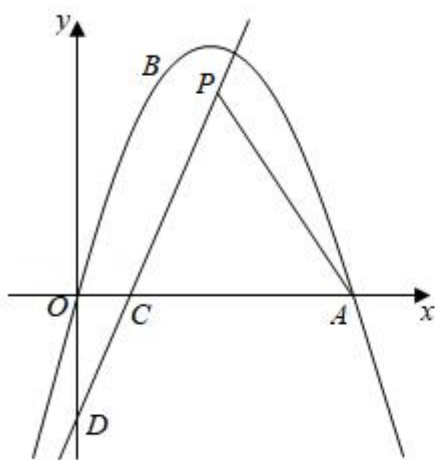


图1

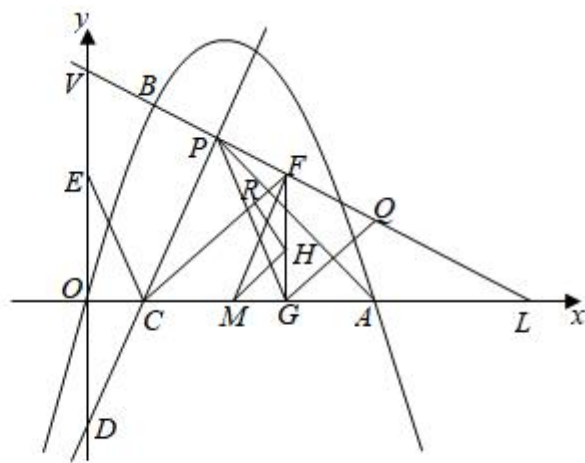


图2

2021 年黑龙江省哈尔滨市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

1. (3 分) (2021·哈尔滨) $-\frac{1}{7}$ 的绝对值是()

- A. -7 B. 7 C. $-\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

【解答】解： $|\frac{1}{7}| = \frac{1}{7}$ ，

故选：D.

2. (3 分) (2021·哈尔滨) 下列运算一定正确的是()

- A. $a^2 \cdot a = a^3$ B. $(a^3)^2 = a^5$ C. $(a-1)^2 = a^2 - 1$ D. $a^5 - a^2 = a^3$

【解答】解：A、 $a^2 \cdot a = a^3$ ，原计算正确，故此选项符合题意；

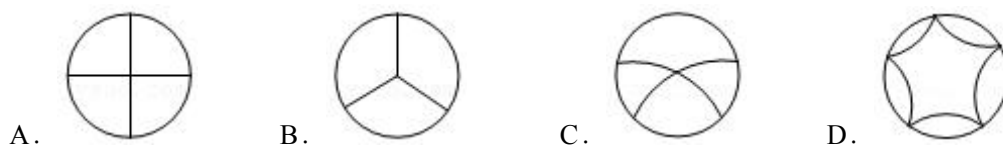
B、 $(a^2)^3 = a^6$ ，原计算错误，故此选项不符合题意；

C、 $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ ，原计算错误，故此选项不符合题意；

D、 a^5 与 a^2 不是同类项，不能合并，原计算错误，故此选项不符合题意.

故选：A.

3. (3 分) (2021·哈尔滨) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是()



【解答】解：A. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项符合题意；

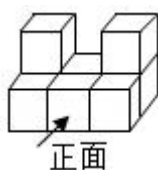
B. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

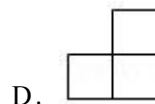
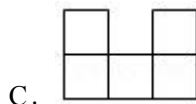
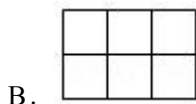
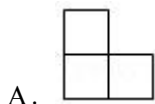
C. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

D. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

故选：A.

4. (3 分) (2021·哈尔滨) 八个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示，其主视图是()



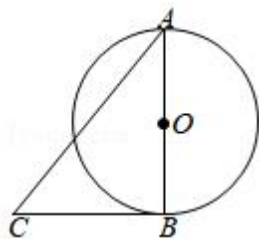


【解答】解：从正面看，共有三列，每列的小正方形个数分别为 2、1、2，

故选：C．

5. (3 分) (2021·哈尔滨) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的切线，点 B 为切点，若 $AB = 8$ ，

$\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$ ，则 BC 的长为 ()



A. 8

B. 7

C. 10

D. 6

【解答】解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AB \perp BC$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\because \tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore BC = \frac{3}{4} \times 8 = 6$ ．

故选：D．

6. (3 分) (2021·哈尔滨) 方程 $\frac{1}{2+x} = \frac{2}{3x-1}$ 的解为 ()

A. $x = 5$

B. $x = 3$

C. $x = 1$

D. $x = 2$

【解答】解：去分母得： $3x - 1 = 2(2 + x)$ ，

去括号得： $3x - 1 = 4 + 2x$ ，

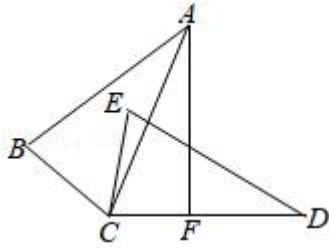
移项合并得： $x = 5$ ，

检验：当 $x = 5$ 时， $(2 + x) \cdot (3x - 1) \neq 0$ ，

$\therefore$ 分式方程的解为 $x = 5$ ．

故选：A．

7. (3 分) (2021·哈尔滨) 如图， $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，点 A 和点 D 是对应顶点，点 B 和点 E 是对应顶点，过点 A 作 $AF \perp CD$ ，垂足为点 F ，若 $\angle BCE = 65^\circ$ ，则 $\angle CAF$ 的度数为 ()



A. 30°

B. 25°

C. 35°

D. 65°

【解答】解：∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle BCE = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE = 65^\circ,$$

$$\therefore AF \perp CD,$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ,$$

故选：B.

8. (3分) (2021·哈尔滨) 一个不透明的袋子中装有 12 个小球，其中 8 个红球、4 个黄球，这些小球除颜色外无其它差别，从袋子中随机摸出一个小球，则摸出的小球是红球的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{12}$

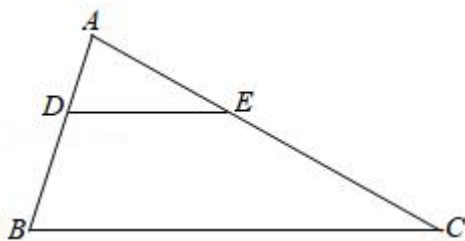
D. $\frac{2}{3}$

【解答】解：∵ 从袋子中随机摸出一个小球共有 12 种等可能结果，摸出的小球是红球的结果数为 8，

$$\therefore \text{摸出的小球是红球的概率为 } \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

故选：D.

9. (3分) (2021·哈尔滨) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ， $AC = 10$ ，则 AE 的长为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【解答】解：∵ $DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

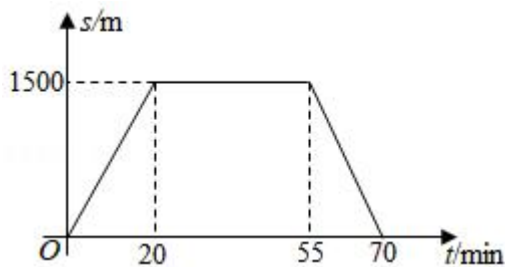
$$\because AD = 2, BD = 3, AC = 10,$$

$$\therefore \frac{2}{2+3} = \frac{AE}{10},$$

$$\therefore AE = 4.$$

故选：B.

10. (3分) (2021·哈尔滨) 周日，小辉从家步行到图书馆读书，读了一段时间后，小辉立刻按原路回家. 在整个过程中，小辉离家的距离 s (单位： m) 与他所用的时间 t (单位： min) 之间的关系如图所示，则小辉从家去图书馆的速度和从图书馆回家的速度分别为()



A. $75m/min$, $90m/min$

B. $80m/min$, $90m/min$

C. $75m/min$, $100m/min$

D. $80m/min$, $100m/min$

【解答】解：由题意，得：

小辉从家去图书馆的速度为： $1500 \div 20 = 75(m/min)$ ；

小辉从图书馆回家的速度为： $1500 \div (70 - 55) = 100(m/min)$ 。

故选：C.

二、填空题 (每小题 3 分，共计 30 分)

11. (3分) (2021·哈尔滨) 火星赤道半径约为 3396000 米，用科学记数法表示为 3.396×10^6 米。

【解答】解： $3396000 = 3.396 \times 10^6$ 。

故答案是： 3.396×10^6 。

12. (3分) (2021·哈尔滨) 在函数 $y = \frac{2x}{7x-5}$ 中，自变量 x 的取值范围是 $x \neq \frac{5}{7}$ 。

【解答】解： $7x - 5 \neq 0$, $x \neq \frac{5}{7}$ 。

故答案为： $x \neq \frac{5}{7}$ 。

13. (3分)(2021·哈尔滨) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(2, -5)$, 则 k 的值为 -10 .

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(2, -5)$,

$$\therefore k = 2 \times (-5) = -10,$$

故答案为: -10 .

14. (3分)(2021·哈尔滨) 计算 $\sqrt{18} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的结果是 $2\sqrt{2}$.

【解答】解: 原式 $= 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

15. (3分)(2021·哈尔滨) 把多项式 $a^2b - 25b$ 分解因式的结果是 $b(a+5)(a-5)$.

【解答】解: $a^2b - 25b$

$$= b(a^2 - 25)$$

$$= b(a+5)(a-5).$$

故答案为: $b(a+5)(a-5)$.

16. (3分)(2021·哈尔滨) 二次函数 $y = -3x^2 - 2$ 的最大值为 -2 .

【解答】解: 在二次函数 $y = -3x^2 - 2$ 中,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(0, -2)$,

且 $a = -3 < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 二次函数 $y = -3x^2 - 2$ 的最大值为 -2 .

故答案为: -2 .

17. (3分)(2021·哈尔滨) 不等式组 $\begin{cases} 3x-7 < 2 \\ x-5 \leq 10 \end{cases}$ 的解集是 $x < 3$.

【解答】解: 解不等式 $3x - 7 < 2$, 得: $x < 3$,

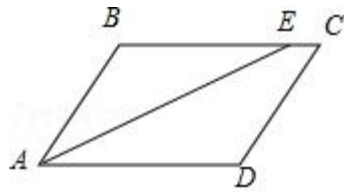
解不等式 $x - 5 \leq 10$, 得: $x \leq 15$,

则不等式组的解集为 $x < 3$,

故答案为： $x < 3$.

18. (3分) (2021·哈尔滨) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 6$, $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E , 若 $CE = 2$, 则 $\square ABCD$ 的周长为 20 或 28 .

【解答】解: 当 E 点在线段 BC 上时, 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore BC \parallel AD$,

$\therefore \angle BEA = \angle EAD$,

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAE = \angle EAD$,

$\therefore \angle BEA = \angle BAE$,

$\therefore BE = AB$,

$\because AB = 6$,

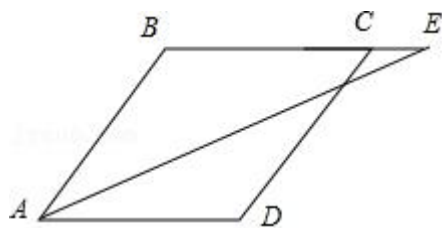
$\therefore BE = 6$,

$\because CE = 2$,

$\therefore BC = BE + CE = 6 + 2 = 8$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为: $2 \times (6 + 8) = 28$,

当 E 点在线段 BC 延长线上时, 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore BC \parallel AD$,

$\therefore \angle BEA = \angle EAD$,

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAE = \angle EAD$,

$$\therefore \angle BEA = \angle BAE ,$$

$$\therefore BE = AB ,$$

$$\because AB = 6 ,$$

$$\therefore BE = 6 ,$$

$$\because CE = 2 ,$$

$$\therefore BC = BE - CE = 6 - 2 = 4 ,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长为: } 2 \times (6 + 4) = 20 ,$$

综上, 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 20 或 28.

故答案为 20 或 28.

19. (3 分) (2021·哈尔滨) 一个扇形的弧长是 $8\pi \text{ cm}$, 圆心角是 144° , 则此扇形的半径是 10 cm .

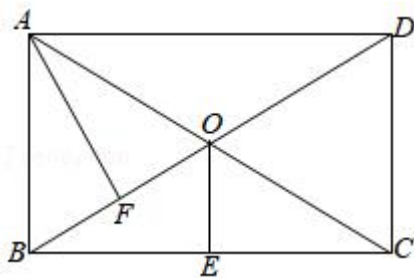
【解答】解: 设扇形的半径为 $r \text{ cm}$, 由题意得,

$$\frac{144\pi r}{180} = 8\pi ,$$

$$\text{解得 } r = 10(\text{cm}) ,$$

故答案为: 10.

20. (3 分) (2021·哈尔滨) 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 过点 O 作 $OE \perp BC$, 垂足为点 E , 过点 A 作 $AF \perp OB$, 垂足为点 F . 若 $BC = 2AF$, $OD = 6$, 则 BE 的长为 $3\sqrt{3}$.



【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OB = OC = OD ,$$

$$\because OE \perp BC ,$$

$$\therefore BE = CE , \angle BOE = \angle COE ,$$

$$\text{又} \because BC = 2AF ,$$

$$\therefore AF = BE ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFO$ 和 $\text{Rt}\triangle BEO$ 中,

$$\begin{cases} AF = BE \\ AO = BO \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle AFO \cong \text{Rt}\triangle BEO(\text{HL})$,

$\therefore \angle AOF = \angle BOE$,

$\therefore \angle AOF = \angle BOE = \angle COE$,

又 $\because \angle AOF + \angle BOE + \angle COE = 180^\circ$,

$\therefore \angle BOE = 60^\circ$,

$\because OB = OD = 6$,

$$\therefore BE = OB \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.

三、解答题 (其中 21-22 题各 7 分, 23-24 题各 8 分, 25-27 题各 10 分, 共计 60 分)

21. (7 分) (2021·哈尔滨) 先化简, 再求代数式 $(\frac{3}{a-1} - \frac{2a+3}{a^2-1}) \div \frac{a}{a-1}$ 的值, 其中 $a = 2\sin 45^\circ - 1$.

【解答】 解: 原式 $= \frac{3}{a-1} \cdot \frac{a-1}{a} - \frac{2a+3}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a-1}{a}$

$$= \frac{3}{a} - \frac{2a+3}{a(a+1)}$$
$$= \frac{3(a+1)}{a(a+1)} - \frac{2a+3}{a(a+1)}$$
$$= \frac{3a+3-2a-3}{a(a+1)}$$
$$= \frac{a}{a(a+1)}$$
$$= \frac{1}{a+1},$$

当 $a = 2\sin 45^\circ - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$ 时,

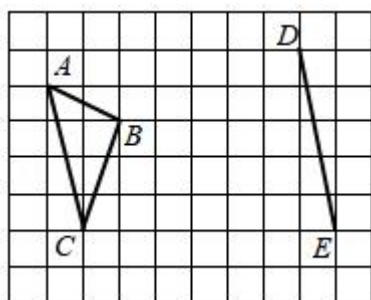
$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

22. (7 分) (2021·哈尔滨) 如图, 方格纸中每个小正方形的边长均为 1 个单位长度, $\triangle ABC$ 的顶点和线段 DE 的端点均在小正方形的顶点上.

(1) 在方格纸中将 $\triangle ABC$ 向上平移 1 个单位长度, 再向右平移 2 个单位长度后得到 $\triangle MNP$ (点 A 的对应点是点 M , 点 B 的对应点是点 N , 点 C 的对应点是点 P), 请画出 $\triangle MNP$;

(2) 在方格纸中画出以 DE 为斜边的等腰直角三角形 DEF (点 F 在小正方形的顶点上). 连

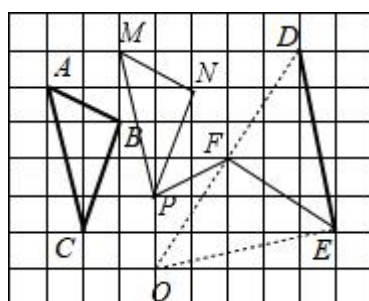
接 FP ，请直接写出线段 FP 的长．



【解答】解：（1）如图， $\triangle MNP$ 为所作；

（2）如图， $\triangle DEF$ 为所作；

$$FP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

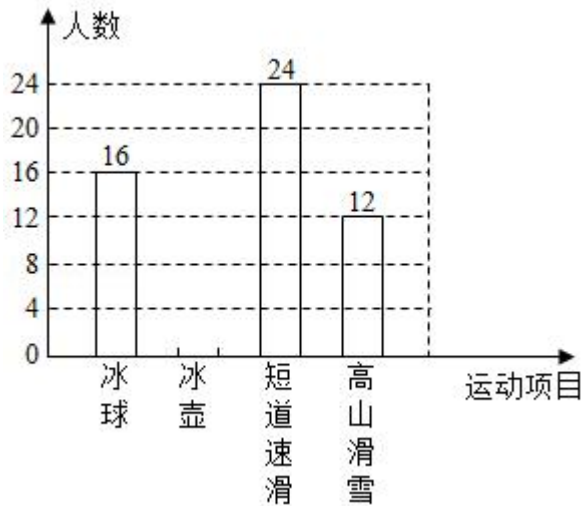


23.（8分）（2021·哈尔滨）春宁中学开展以“我最喜欢的冰雪运动项目”为主题的调查活动，围绕“在冰球、冰壶、短道速滑、高山滑雪四种冰雪运动项目中，你最喜欢哪一种？（必选且只选一种）”的问题，在全校范围内随机抽取部分学生进行问卷调查，将调查结果整理后绘制成如图所示的不完整的条形统计图，其中最喜欢短道速滑的学生人数占所调查人数的40%．请你根据图中提供的信息解答下列问题：

（1）在这次调查中，一共抽取了多少名学生？

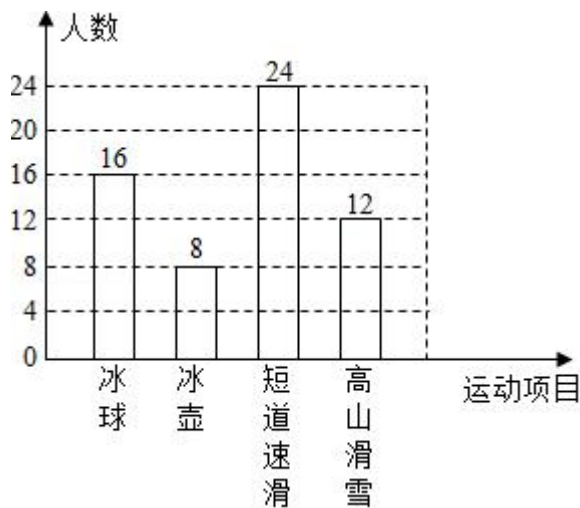
（2）请通过计算补全条形统计图；

（3）若春宁中学共有1500名学生，请你估计该中学最喜欢高山滑雪的学生共有多少名．



【解答】解：（1）本次调查共抽取的学生数有： $24 \div 40\% = 60$ （名）；

（2）最喜欢冰球项目的人数有： $60 - 16 - 24 - 12 = 8$ （名），补全统计图如下：



（3）根据题意得：

$$1500 \times \frac{12}{60} = 300 \text{（名）},$$

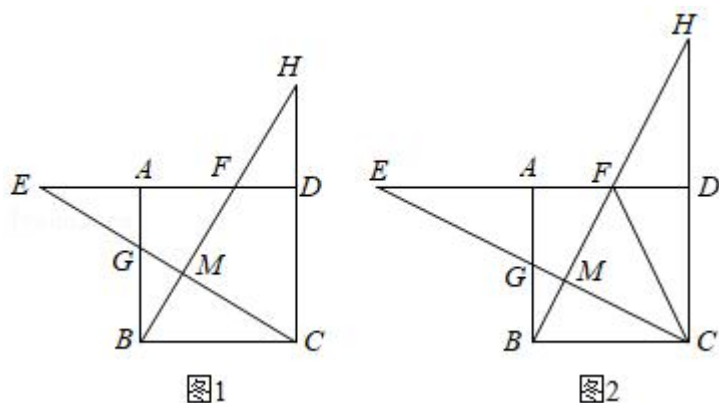
答：估计该中学最喜欢高山滑雪的学生共有 300 名．

24.（8分）（2021·哈尔滨）已知四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 在边 DA 的延长线上，连接 CE 交 AB 于点 G ，过点 B 作 $BM \perp CE$ ，垂足为点 M ， BM 的延长线交 AD 于点 F ，交 CD 的延长线于点 H ．

（1）如图 1，求证： $CE = BH$ ；

（2）如图 2，若 $AE = AB$ ，连接 CF ，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图 2 中的

四个三角形($\triangle AEG$ 除外), 使写出的每个三角形都与 $\triangle AEG$ 全等.



【解答】证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = CD = AD = AB, \quad \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because BM \perp CE,$$

$$\therefore \angle HMC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle H + \angle HCM = 90^\circ = \angle E + \angle ECD,$$

$$\therefore \angle H = \angle E,$$

在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle HCB$ 中,

$$\begin{cases} \angle E = \angle H \\ \angle EDC = \angle HCB = 90^\circ, \\ CD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDC \cong \triangle HCB (AAS),$$

$$\therefore CE = BH;$$

$$(2) \triangle BCG, \triangle DCF, \triangle DHF, \triangle ABF,$$

理由如下: $\because AE = AB,$

$$\therefore AE = BC = AD = CD,$$

$$\because \triangle EDC \cong \triangle HCB,$$

$$\therefore ED = HC,$$

$$\because AD = CD,$$

$$\therefore AE = HD = CD = AB,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle BCG$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAG = \angle CBG = 90^\circ \\ \angle AGE = \angle BGC \\ AE = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BCG(AAS),$$

$$\therefore AG = BG = \frac{1}{2}AB,$$

同理可证 $\triangle AFB \cong \triangle DFH$,

$$\therefore AF = DF = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AG = AF = DF,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AB \\ \angle EAG = \angle BAF = 90^\circ, \\ AG = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle ABF(SAS),$$

同理可证 $\triangle AEG \cong \triangle DHF$, $\triangle AEG \cong \triangle DCF$.

25. (10分)(2021·哈尔滨)君辉中学计划为书法小组购买某种品牌的 A 、 B 两种型号的毛笔.若购买 3 支 A 种型号的毛笔和 1 支 B 种型号的毛笔需用 22 元;若购买 2 支 A 种型号的毛笔和 3 支 B 种型号的毛笔需用 24 元.

(1) 求每支 A 种型号的毛笔和每支 B 种型号的毛笔各多少元;

(2) 君辉中学决定购买以上两种型号的毛笔共 80 支,总费用不超过 420 元,那么该中学最多可以购买多少支 A 种型号的毛笔?

【解答】解:(1) 设每支 A 种型号的毛笔 x 元,每支 B 种型号的毛笔 y 元;

$$\text{由题意可得: } \begin{cases} 3x + y = 22 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases},$$

答:每支 A 种型号的毛笔 6 元,每支 B 种型号的毛笔 4 元;

(2) 设 A 种型号的毛笔为 a 支,

$$\text{由题意可得: } 6a + 4(80 - a) \leq 420,$$

$$\text{解得: } a \leq 50,$$

答:最多可以购买 50 支 A 种型号的毛笔.

26. (10分)(2021·哈尔滨)已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为 $\odot O$ 的直径,点 N 为 AC 的中点,连接 ON 并延长交 $\odot O$ 于点 E ,连接 BE , BE 交 AC 于点 D .

(1) 如图 1, 求证: $\angle CDE + \frac{1}{2}\angle BAC = 135^\circ$;

(2) 如图 2, 过点 D 作 $DG \perp BE$, DG 交 AB 于点 F , 交 $\odot O$ 于点 G , 连接 OG , OD , 若 $DG = BD$, 求证: $OG \parallel AC$;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 连接 AG , 若 $DN = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 AG 的长.

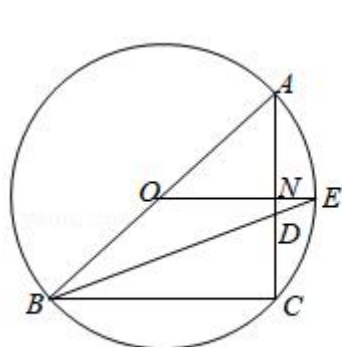


图1

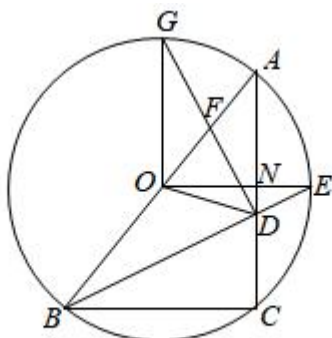


图2

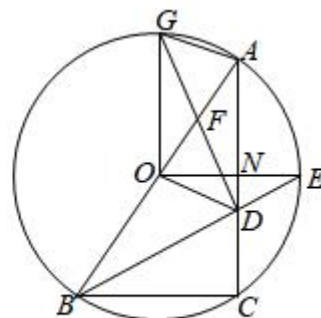


图3

【解答】(1) 证明: 如图 1, 过点 O 作 $OP \perp BC$, 交 $\odot O$ 于点 P , 连接 AP 交 BE 于 Q ,

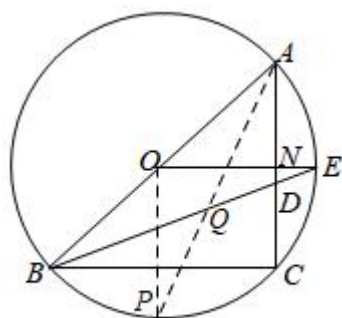


图1

$$\therefore \widehat{BP} = \widehat{PC},$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP,$$

$\because$ 点 N 为 AC 的中点,

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{CE},$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QAB + \angle QBA = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AQB = \angle EQP = 135^\circ,$$

$\triangle AQD$ 中, $\angle EQP = \angle CAP + \angle ADQ = 135^\circ$,

$$\therefore \angle CDE + \frac{1}{2}\angle BAC = 135^\circ;$$

(2) 证明: 在 $\triangle DGO$ 和 $\triangle DBO$ 中,

$$\begin{cases} DG = BD \\ OD = OD, \\ OG = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle DGO \cong \triangle DBO (SSS)$,

$\therefore \angle ABD = \angle DGO$,

$\because DG \perp BE$,

$\therefore \angle GDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADG + \angle BDC = 90^\circ$,

$\because \angle BDC + \angle CBE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADG = \angle CBE = \angle ABD = \angle DGO$,

$\therefore OG \parallel AD$;

(3) 解: 如图 3, 过点 G 作 $GK \perp AC$ 于 K , 延长 GO 交 BC 于点 H ,

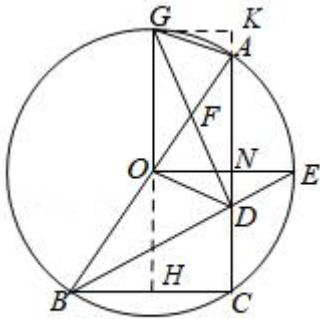


图3

由 (2) 知: $OG \parallel AC$,

$\therefore GH \parallel AC$,

$\therefore \angle OHB = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore OH \perp BC$,

$\therefore BH = CH$,

$\because \angle K = \angle C = \angle OHC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $GHCK$ 是矩形,

$\therefore CH = GK$,

设 $GK = y$ ，则 $BC = 2y$ ， $ON = GK = y$ ，

由 (2) 知： $\angle ADG = \angle DBC$ ，

在 $\triangle GKD$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADG = \angle DBC \\ \angle K = \angle C \\ DG = BD \end{cases},$$

$\therefore \triangle GKD \cong \triangle DCB (AAS)$ ，

$\therefore GK = DC = y$ ，

$\because OE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle E = \angle DBC$ ，

$\therefore \tan \angle DBC = \tan E$ ，

$$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{DN}{EN}, \text{ 即 } \frac{y}{2y} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{EN},$$

$$\therefore EN = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AN = CN = y + \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad ON = y,$$

由勾股定理得： $AO^2 = ON^2 + AN^2$ ，

$$\therefore (y + \frac{4\sqrt{5}}{5})^2 = y^2 + (y + \frac{2\sqrt{5}}{5})^2,$$

$$\text{解得：} y_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (舍)}, \quad y_2 = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AG = \sqrt{GK^2 + AK^2} = \sqrt{(\frac{6\sqrt{5}}{5})^2 + (y + \frac{4\sqrt{5}}{5} - y - \frac{2\sqrt{5}}{5})^2} = 2\sqrt{2}.$$

27. (10 分) (2021·哈尔滨) 在平面直角坐标系中，点 O 为坐标系的原点，抛物线 $y = ax^2 + bx$

经过 $A(10, 0)$ ， $B(\frac{5}{2}, 6)$ 两点，直线 $y = 2x - 4$ 与 x 轴交于点 C ，与 y 轴交于点 D ，点 P 为

直线 $y = 2x - 4$ 上的一个动点，连接 PA 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图 1，当点 P 在第一象限时，设点 P 的横坐标为 t ， $\triangle APC$ 的面积为 S ，求 S 关于 t 的函数解析式 (不要求写出自变量 t 的取值范围)；

(3) 如图 2，在 (2) 的条件下，点 E 在 y 轴的正半轴上，且 $OE = OD$ ，连接 CE ，当直线 BP 交 x 轴正半轴于点 L ，交 y 轴于点 V 时，过点 P 作 $PG \parallel CE$ 交 x 轴于点 G ，过点 G 作 y

轴的平行线交线段 VL 于点 F ，连接 CF ，过点 G 作 $GQ \parallel CF$ 交线段 VL 于点 Q ， $\angle CFG$ 的平分线交 x 轴于点 M ，过点 M 作 $MH \parallel CF$ 交 FG 于点 H ，过点 H 作 $HR \perp CF$ 于点 R ，若 $FR + MH = GQ$ ，求点 P 的坐标。

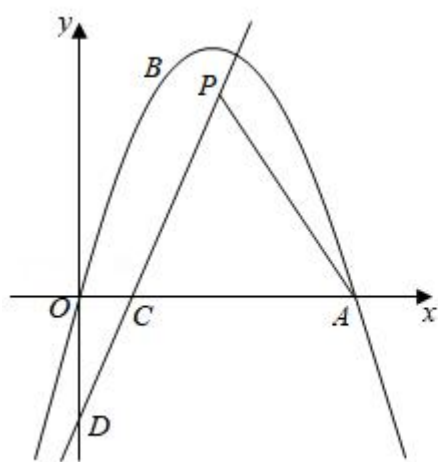


图1

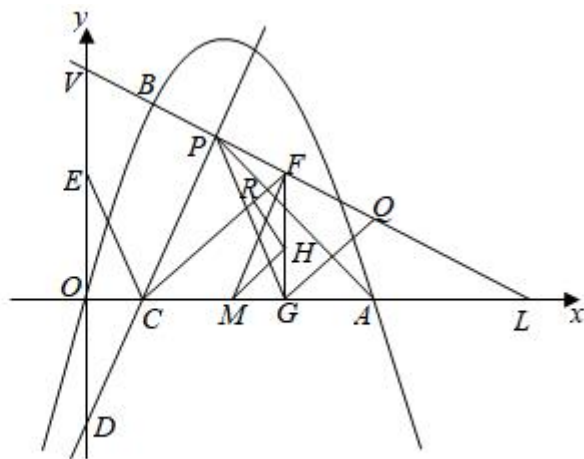


图2

【解答】解：（1）把 $A(10,0)$ ， $B(\frac{5}{2}, 6)$ 代入 $y = ax^2 + bx$ ，得到
$$\begin{cases} 100a + 10b = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{8}{25} \\ b = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{8}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$ 。

（2） $\because$ 直线 $y = 2x - 4$ 与 x 轴交于点 C ，与 y 轴交于点 D ，

$\therefore C(2,0)$ ， $D(0,-4)$ ，

$\because A(10,0)$ ，

$\therefore OA = 10$ ， $OC = 2$ ，

$\therefore AC = 8$ ，

由题意 $P(t, 2t - 4)$ ，

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot PT \cdot AC = \frac{1}{2} \times 8 \times (2t - 4) = 8t - 16.$$

（3）如图 2 中，过点 P 作 $PT \perp CG$ 于 T ，交 CF 于 W ，过点 F 作 $FJ \perp MH$ 交 MH 的延长线于 J ，连接 JQ 。

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle MHG \cong \triangle FHJ (AAS), \\
&\therefore MG = FJ = JQ, \quad \angle GMH = \angle HFJ, \\
&\therefore \angle JFQ = \angle JQF, \quad \angle GFJ = \angle GQJ, \\
&\therefore \angle GFQ = \angle GQF, \\
&\because CF \parallel GQ, \quad PT \parallel FG, \\
&\therefore \angle WPF = \angle GFQ, \quad \angle WFP = \angle GQF, \\
&\therefore \angle WPF = \angle WFP, \\
&\therefore WP = WF, \\
&\because D, E \text{ 关于 } x \text{ 轴对称}, \\
&\therefore \angle ECO = \angle DCO = \angle PCG, \\
&\because EC \parallel PG, \\
&\therefore \angle PGC = \angle ECO, \\
&\therefore \angle PCG = \angle PGC, \\
&\therefore PC = PG, \\
&\because PT \perp CG, \\
&\therefore CT = TG, \\
&\because WT \parallel FG, \\
&\therefore CW = WF, \\
&\therefore WP = WC = WF, \\
&\therefore \angle CPF = 90^\circ, \\
&\therefore \angle LCP + \angle PLC = 90^\circ, \\
&\because \angle ODC + \angle OCD = 90^\circ, \quad \angle OCD = \angle LCP, \\
&\therefore \angle PLC = \angle ODC, \\
&\therefore \tan \angle PLC = \tan \angle ODC = \frac{1}{2}, \\
&\because B\left(\frac{5}{2}, 6\right), \\
&\therefore OL = \frac{5}{2} + 12 = \frac{29}{2}, \\
&\therefore L\left(\frac{29}{2}, 0\right), \\
&\therefore \text{直线 } PB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{29}{4},
\end{aligned}$$

$$\text{由} \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{29}{4} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{9}{2}, \\ y = 5 \end{cases},$$

$$\therefore P\left(\frac{9}{2}, 5\right).$$