

2022 年抚顺本溪辽阳市初中毕业生学业考试

数学试卷

※考试时间 120 分钟 试卷满分 150 分

考生注意：请在答题卡各题目规定答题区域内作答，答在本试卷上无效

第一部分 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 5 的相反数是 ()

- A. -5 B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 5

【答案】 A

【解析】

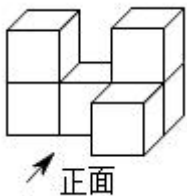
【分析】 根据一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号，求解即可.

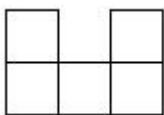
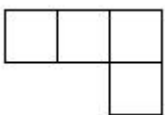
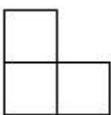
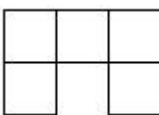
【详解】 解：5 的相反数是-5，

故选：A.

【点睛】 本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号：一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0. 不要把相反数的意义与倒数的意义混淆.

2. 下图是由 6 个完全相同的小正方体搭成的几何体，这个几何体的俯视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

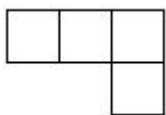
【答案】 B

【解析】

【分析】 根据题意得：从上往下看，得到一共 3 列，从左往右依次有 1，1，2 块，即可求解.

【详解】 解：根据题意得：从上往下看，得到一共 3 列，从左往右依次有 1，1，2 块，

∴这个几何体的俯视图是



故选：B

【点睛】本题主要考查了简单组合体的三视图，熟练掌握俯视图就是从上往下看得到的图形是解题的关键.

3. 下列运算正确的是 ()

- A. $(a^2)^4 = a^6$ B. $a^2 \cdot a^4 = a^6$ C. $a^2 + a^4 = a^6$ D. $a^2 \div a^4 = a^6$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘除法，幂的乘方，合并同类项的计算法则求解判断即可.

【详解】解：A、 $(a^2)^4 = a^8$ ，计算错误，不符合题意；

B、 $a^2 \cdot a^4 = a^6$ ，计算正确，符合题意；

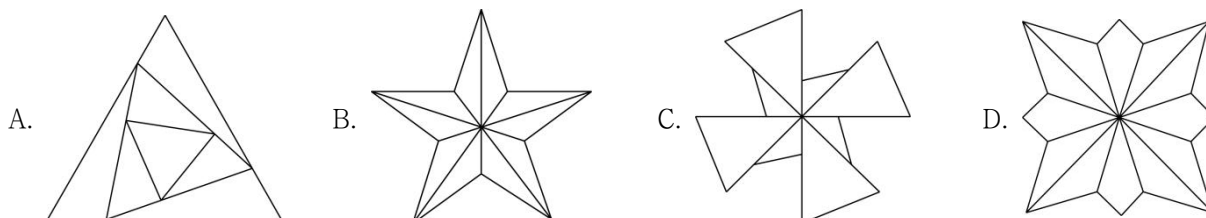
C、 a^2 与 a^4 不是同类项，不能合并，计算错误，不符合题意；

D、 $a^2 \div a^4 = a^{-2}$ ，计算错误，不符合题意；

故选 B.

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘除法，幂的乘方，合并同类项，熟知相关计算法则是解题的关键.

4. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念逐项判断即可.

【详解】A. 既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项符合题意；

C. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D. 既是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项不符合题意；

故选：D.

【点睛】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

5. 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋 30 双，各种尺码的销售量如下表所示：

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

所售 30 双女鞋尺码的众数是 ()

- A. 25cm B. 24cm C. 23.5cm D. 23cm

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据众数的定义：一组数据中出现最多的数据叫做这组数据的众数，进行求解即可.

【详解】 解：由表格可知尺码为 23.5cm 的鞋子销售量为 11，销售量最多，

∴ 众数为 23.5cm，

故选 C.

【点睛】 本题主要考查了众数，熟知众数的定义是解题的关键.

6. 下列一元二次方程无实数根的是 ()

- A. $x^2 + x - 2 = 0$ B. $x^2 - 2x = 0$
C. $x^2 + x + 5 = 0$ D. $x^2 - 2x + 1 = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式判断即可；

【详解】 解：A. $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ ，方程有两个不等的实数根，不符合题意；

B. $\Delta = 4 > 0$ ，方程有两个不等的实数根，不符合题意；

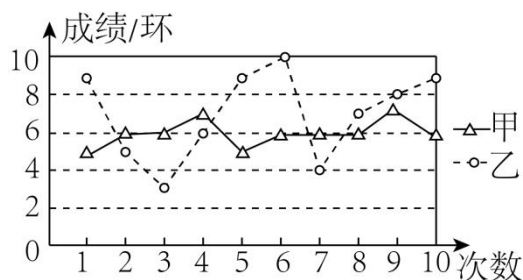
C. $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$ ，方程没有实数根，符合题意；

D. $\Delta = 4 - 4 = 0$ ，方程有两个相等的实数根，不符合题意；

故选： C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ： $\Delta > 0$ 时方程有两个不等的实数根； $\Delta = 0$ 时方程有两个相等的实数根； $\Delta < 0$ 时方程没有实数根.

7. 甲、乙两人在相同的条件下各射击 10 次，将每次命中的环数绘制成如图所示统计图. 根据统计图得出的结论正确的是 ()



- A. 甲的射击成绩比乙的射击成绩更稳定
- B. 甲射击成绩的众数大于乙射击成绩的众数
- C. 甲射击成绩的平均数大于乙射击成绩的平均数
- D. 甲射击成绩的中位数大于乙射击成绩的中位数

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据统计图上数据的变化趋势，逐项分析即可得出结论.

【详解】 解： A、甲的成绩在 6 环上下浮动，变化较小，乙的成绩变化大，所以，甲的射击成绩比乙的射击成绩更稳定，此选项正确，符合题意；

B、甲射击成绩的众数是 6（环），

乙射击成绩的众数是 9（环），

所以，甲射击成绩的众数小于乙射击成绩的众数，此选项错误，不符合题意；

C、甲射击成绩的平均数是 $\frac{5 \times 2 + 6 \times 6 + 7 \times 2}{10} = 6$ （环），

乙射击成绩的平均数是 $\frac{3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \times 3 + 10}{10} = 7$ （环），

所以，甲射击成绩的平均数小于乙射击成绩的平均数，此选项错误，不符合题意；

D、甲射击成绩的中位数是 6（环），

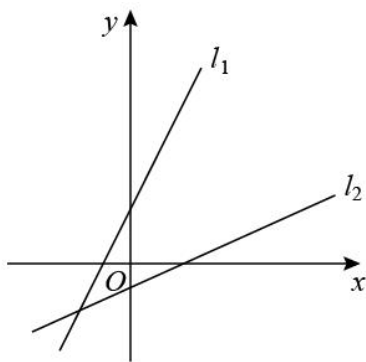
乙射击成绩的中位数是 $\frac{7+8}{2} = 7.5$ （环），

所以，甲射击成绩的中位数小于乙射击成绩的中位数，此选项错误，不符合题意；

故选： A

【点睛】 本题主要考查了数据的稳定性，众数，平均数和中位数，熟练掌握相关知识是解答本题的关键.

8. 如图，在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象分别为直线 l_1 和直线 l_2 ，下列结论正确的是（ ）



- A. $k_1 \cdot k_2 < 0$ B. $k_1 + k_2 < 0$ C. $b_1 - b_2 < 0$ D. $b_1 \cdot b_2 < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据两条直线的图象得到 $k_1 > 0$, $b_1 > 0$, $k_2 > 0$, $b_2 < 0$, 然后再进行判定求解.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象分别为直线 l_1 和直线 l_2 ,

$$\therefore k_1 > 0, b_1 > 0, k_2 > 0, b_2 < 0,$$

$$\therefore k_1 \cdot k_2 > 0, k_1 + k_2 > 0, b_1 - b_2 > 0, b_1 \cdot b_2 < 0,$$

故 A, B, C 项均错误, D 项正确.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了一次函数图象与 k 和 b 符号的关系, 掌握当直线与 y 轴交于正半轴上时, $b > 0$; 当直线与 y 轴交于负半轴时, $b < 0$ 是解答关键.

9. 《孙子算经》中有一道题, 原文是: “今有木, 不知长短, 引绳度之, 余绳四尺五寸; 屈绳量之, 不足一尺, 木长几何?” 意思是: 用一根绳子去量一根长木, 绳子还剩余 4.5 尺; 将绳子对折再量长木, 长木还剩余 1 尺, 木长多少尺? 若设绳子长 x 尺, 木长 y 尺, 所列方程组正确的是 ()

- A. $\begin{cases} x - y = 4.5 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$ B. $\begin{cases} y - x = 4.5 \\ 2x - 1 = y \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 4.5 \\ \frac{1}{2}x + 1 = y \end{cases}$ D. $\begin{cases} y - x = 4.5 \\ \frac{1}{2}x - 1 = y \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题的等量关系是: 绳长-木长=4.5, 木长- $\frac{1}{2}$ 绳长=1, 据此可以列方程求解;

【详解】设绳子长 x 尺, 木长 y 尺,

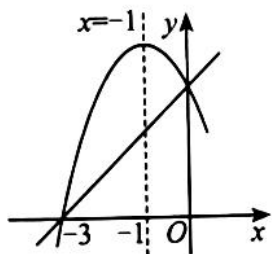
依题意可得:
$$\begin{cases} x - y = 4.5 \\ \frac{1}{2}x + 1 = y \end{cases},$$

故选: C

【点睛】此题考查二元一次方程组问题, 关键是弄清题意, 找准等量关系, 列方程求解.

10. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示, 对称轴为直线 $x = -1$, 直线 $y = kx + c$ 与抛物线都经过点 $(-3, 0)$, 下列说法: ① $ab > 0$; ② $4a + c > 0$; ③ $(-2, y_1)$ 与 $(\frac{1}{2}, y_2)$ 是抛物线上的两个点, 则 $y_1 < y_2$;

④方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 $x_1 = -3, x_2 = 1$; ⑤当 $x = -1$ 时, 函数 $y = ax^2 + (b - k)x$ 有最大值, 其中正确的个数是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】

【分析】抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 开口向下, 可得 $a < 0$, $b = 2a < 0$, 故①正确; 根据抛物线过点 $(-3, 0)$, 可得 $9a - 3b + c = 0$, 从而得到 $3a + c = 0$, 故②错误; 由抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 开口向下, 可得当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, $(-2, y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(0, y_1)$, 可得到 $y_1 > y_2$, 故③错误; 令 $y = 0$, 则 $ax^2 + bx + c = 0$ 解得: $x_1 = -3, x_2 = 1$, 故④正确; 根据二次函数的性质可得当 $x = -\frac{b-k}{2a}$ 时, 函数 $y = ax^2 + (b-k)x$ 有最大值, 再由直线经过点 $(-3, 0)$, 可得 $k = \frac{1}{3}c$, 从而得到 $k = -a$, 进而得到 $x = -\frac{b-k}{2a} = -\frac{3}{2}$, 故⑤错误, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 开口向下,

$$\therefore a < 0, -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a < 0,$$

$$\therefore ab > 0, \text{ 故①正确;}$$

∵ 抛物线过点 $(-3, 0)$,

$$\therefore 9a - 3b + c = 0,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore 9a - 3 \times 2a + c = 0, \text{ 即 } 3a + c = 0,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore 4a + c = a < 0, \text{ 故②错误;}$$

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 开口向下,

∴ 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, $(-2, y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(0, y_1)$,

$$\therefore 0 < \frac{1}{2},$$

$$\therefore y_1 > y_2, \text{ 故③错误;}$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = -3, x_2 = 1,$$

$$\therefore \text{方程 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的两根为 } x_1 = -3, x_2 = 1, \text{ 故④正确;}$$

$$y = ax^2 + (b-k)x = a \left(x + \frac{b-k}{2a} \right)^2 - \frac{(b-k)^2}{4a},$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b-k}{2a} \text{ 时, 函数 } y = ax^2 + (b-k)x \text{ 有最大值,}$$

∵ 直线经过点 $(-3, 0)$,

$$\therefore -3k + c = 0, \text{ 即 } k = \frac{1}{3}c,$$

$$\therefore 3a + c = 0,$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore k = -a,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore x = -\frac{b-k}{2a} = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{3}{2} \text{ 时, 函数 } y = ax^2 + (b-k)x \text{ 有最大值, 故⑤错误;}$$

∴ 正确的有 2 个.

故选: A

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象和性质，一次函数的图形和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质，一次函数的图形和性质，并利用数形结合思想解答是解题的关键.

第二部分 非选择题 (共 120 分)

二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 2022 年北京冬奥会全冰面速滑馆的冰面面积约为 12000 平方米, 为亚洲最大, 将数据 12000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.2×10^4

【解析】

【分析】 科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同, 当原数绝对值大于等于 10 时, n 是正数, 当原数绝对值小于 1 时 n 是负数; 由此进行求解即可得到答案.

【详解】 解: $12000 = 1.2 \times 10^4$

故答案为 1.2×10^4 .

【点睛】 本题主要考查了科学记数法, 解题的关键在于能够熟练掌握科学记数法的定义.

12. 分解因式: $ax^2 - a =$ _____.

【答案】 $a(x+1)(x-1)$

【解析】

【分析】 先提公因式 a , 再运用平方差公式分解即可.

【详解】 解: $ax^2 - a$

$$= a(x^2 - 1)$$

$$= a(x+1)(x-1)$$

故答案为: $a(x+1)(x-1)$.

【点睛】 本题考查提公因式法与公式法综合运用, 熟练掌握分解因式的提公因式法与公式法两种方法是解题的关键.

13. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 (1, 3), 则 k 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】直接把点 $(1, 2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，求出 k 的值即可.

【详解】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(1, 3)$,

$$\therefore 3 = \frac{k}{1}, \text{ 解得 } k=3.$$

故答案为 3.

【点睛】考查反比例函数图象上点的坐标特征，把点的坐标代入反比例函数解析式是解题的关键.

14. 质检部门对某批产品的质量进行随机抽检，结果如下表所示：

抽检产品数 n	100	150	200	250	300	500	1000
合格产品数 m	89	134	179	226	271	451	904
合格率 $\frac{m}{n}$	0.890	0.893	0.895	0.904	0.903	0.902	0.904

在这批产品中任取一件，恰好是合格产品的概率约是（结果保留一位小数）_____.

【答案】0.9

【解析】

【分析】根据表中给出的合格率数据即可得出该产品的合格概率.

【详解】解：根据题意得：该产品的合格率大约为 0.9,

$\therefore$ 恰好是合格产品的概率约是 0.9.

故答案为：0.9

【点睛】本题考查利用频率估计概率的知识，训练了从统计表中获取信息的能力及统计中用样本估计总体的思想.

15. 在平面直角坐标系中，线段 AB 的端点 $A(3, 2), B(5, 2)$ ，将线段 AB 平移得到线段 CD ，点 A 的对应点 C 的坐标是 $(-1, 2)$ ，则点 B 的对应点 D 的坐标是_____.

【答案】 $(1, 2)$

【解析】

【分析】根据点的平移法则：横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减解答即可.

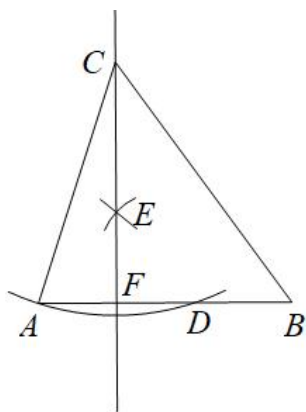
【详解】解： $\because$ 点 $A(3, 2)$ ，点 A 的对应点 $C(-1, 2)$ ，将点 $A(3, 2)$ 向左平移 4 个单位，所得到的 $C(-1, 2)$,

$\therefore B(5, 2)$ 的对应点 D 的坐标为 $(1, 2)$,

故答案为： $(1, 2)$.

【点睛】本题考查了坐标与图形变化—平移，平移中点的变化规律是：横坐标右移加，左移减；纵坐标上移加，下移减。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $\angle B = 54^\circ$ ，以点 C 为圆心， CA 长为半径作弧交 AB 于点 D ，分别以点 A 和点 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AD$ 长为半径作弧，两弧相交于点 E ，作直线 CE ，交 AB 于点 F ，则 $\angle ACF$ 的度数是_____。



【答案】 18° ## 18 度

【解析】

【分析】先根据作图方法得到 CF 是线段 AD 的垂直平分线，则 $\angle AFC = 90^\circ$ ，再根据等边对等角和三角形内角和定理求出 $\angle BAC$ 的度数，即可得到答案。

【详解】解：由作图方法可知 CF 是线段 AD 的垂直平分线，

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 54^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle B = 54^\circ,$$

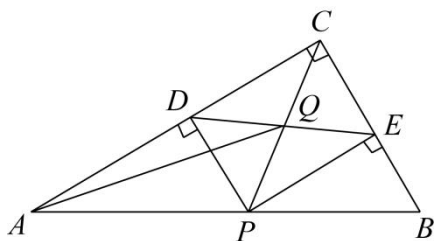
$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle ACB = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 90^\circ - \angle BAC = 18^\circ,$$

故答案为： 18° 。

【点睛】本题主要考查了线段垂直平分线的尺规作图，等边对等角，三角形内角和定理，直角三角形两锐角互余，熟知相关知识是解题的关键。

17. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 2$ ，点 P 为斜边 AB 上的一个动点（点 P 不与点 A 、 B 重合），过点 P 作 $PD \perp AC$, $PE \perp BC$ ，垂足分别为点 D 和点 E ，连接 DE , PC 交于点 Q ，连接 AQ ，当 $\triangle APQ$ 为直角三角形时， AP 的长是_____。



【答案】 3 或 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据题意，由 $\triangle APQ$ 为直角三角形，可进行分类讨论：①当 $\angle APQ = 90^\circ$ ；②当 $\angle AQP = 90^\circ$ 两种情况进行分析，然后进行计算，即可得到答案.

【详解】 解：根据题意，

$\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, BC = 2$,

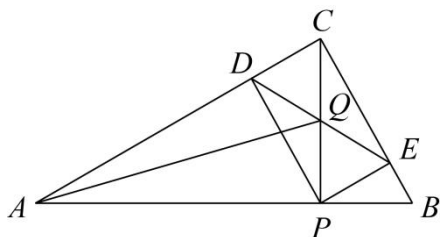
$\therefore \angle BAC = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2BC = 2 \times 2 = 4$,

$\therefore AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

$\because$ 当 $\triangle APQ$ 为直角三角形时， 可分情况进行讨论

①当 $\angle APQ = 90^\circ$ 时， 如图：



则 $AP \perp CP$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CP ,$$

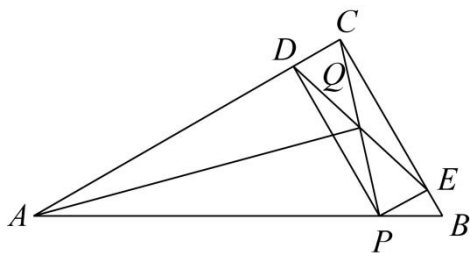
$$\therefore 2\sqrt{3} \times 2 = 4CP ,$$

$$\therefore CP = \sqrt{3} ;$$

在直角 $\triangle ACP$ 中， 由勾股定理， 则

$$AP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3 ;$$

②当 $\angle AQP = 90^\circ$ 时，如图



$\therefore PD \perp AC, PE \perp BC, \angle ACB = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $CDPE$ 是矩形,

$\therefore CQ = PQ,$

$\therefore AQ \perp CP,$

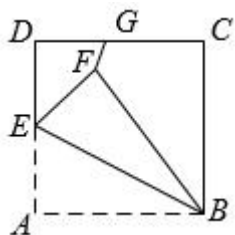
$\therefore \triangle ACP$ 是等腰三角形，即 $AP = AC = 2\sqrt{3}$

综合上述， AP 的长是 3 或 $2\sqrt{3}$ ；

故答案为：3 或 $2\sqrt{3}$ ；

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定和性质，矩形的判定和性质，勾股定理，30 度直角三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握所学的知识，运用分类讨论的思想进行解题.

18. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 10，点 G 是边 CD 的中点，点 E 是边 AD 上一动点，连接 BE ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折得到 $\triangle FBE$ ，连接 GF ．当 GF 最小时， AE 的长是_____.



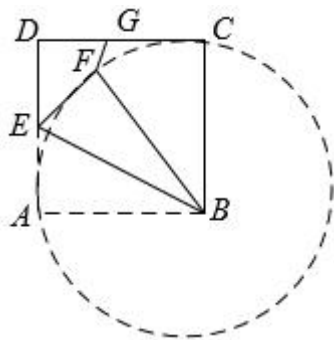
【答案】 $5\sqrt{5} - 5$

【解析】

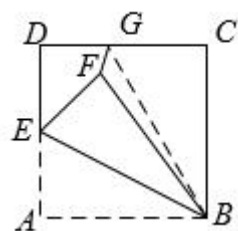
【分析】 根据动点最值问题的求解步骤：①分析所求线段端点（谁动谁定）；②动点轨迹；③最值模型（比如将军饮马模型）；④定线段；⑤求线段长（勾股定理、相似或三角函数），结合题意求解即可得到结论.

【详解】 解：①分析所求线段 GF 端点： G 是定点、 F 是动点；②动点 F 的轨迹： 正方形 $ABCD$ 的边长为 10，点 E 是边 AD 上一动点，连接 BE ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折得到 $\triangle FBE$ ，连接 GF ，则 $BF = BA = 10$ ，

因此动点轨迹是以 B 为圆心， $BA=10$ 为半径的圆周上，如图所示：



③最值模型为点圆模型；④ GF 最小值对应的线段为 $GB-10$ ；⑤求线段长，连接 GB ，如图所示：

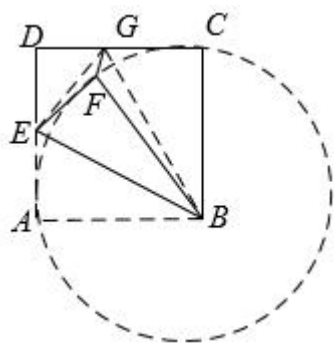


在 $Rt\triangle BCG$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，正方形 $ABCD$ 的边长为 10，点 G 是边 CD 的中点，则 $CG=5, BC=10$ ，

根据勾股定理可得 $BG = \sqrt{CG^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ ，

当 G, F, B 三点共线时， GF 最小为 $5\sqrt{5}-10$ ，

接下来，求 AE 的长：连接 EG ，如图所示



根据翻折可知 $EF=EA, \angle EFB = \angle EAB = 90^\circ$ ，设 $AE=x$ ，则根据等面积法可知

$S_{\text{正方形}} = S_{\triangle EDG} + S_{\triangle BCG} + S_{\triangle BAE} + S_{\triangle BEG}$ ，即

$$100 = \frac{1}{2} DE \cdot DG + \frac{1}{2} BC \cdot CG + \frac{1}{2} AB \cdot AE + \frac{1}{2} BG \cdot EF = \frac{1}{2} [5(10-x) + 5 \times 10 + 10x + 5\sqrt{5}x]$$
 整理得

$$(\sqrt{5}+1)x=20, \text{ 解得 } x=AE=\frac{20}{\sqrt{5}+1}=\frac{20(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=5\sqrt{5}-5,$$

故答案为: $5\sqrt{5}-5$.

【点睛】 本题考查动点最值下求线段长, 涉及到动点最值问题的求解方法步骤, 熟练掌握动点最值问题的相关模型是解决问题的关键.

三、解答题 (第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分, 共 22 分)

19. 先化简, 再求值: $\left(\frac{3}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right)\div\frac{a+1}{a+2}$, 其中 $a=4$.

【答案】 $\frac{4}{a-2}, 2$

【解析】

【分析】 先根据分式的混合计算法则化简, 然后代值计算即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: 原式} &= \frac{3(a+2)+(a-2)}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a+2}{a+1} \\ &= \frac{3a+6+a-2}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a+2}{a+1} \\ &= \frac{4(a+1)}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a+2}{a+1} \\ &= \frac{4}{a-2}\end{aligned}$$

$$\text{当 } a=4 \text{ 时, 原式} = \frac{4}{4-2} = 2.$$

【点睛】 本题主要考查了分式的化简求值, 熟知相关计算法则是解题的关键.

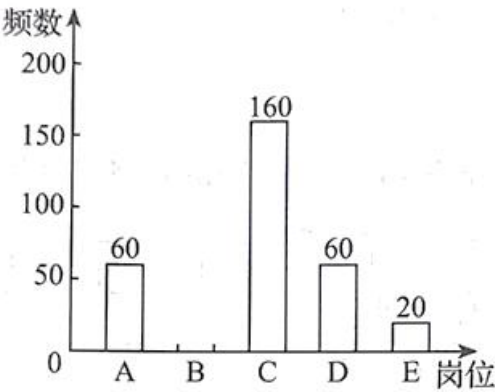
20. 根据防疫需求, 某市向全体市民发出“防疫有我”的志愿者招募令, 并设置了 5 个岗位: A. 防疫宣传; B. 协助核酸采样; C. 物资配送; D. 环境消杀; E. 心理服务, 众多热心人士积极报名, 但每个报名者只能从中选择一个岗位. 光明社区统计了本社区志愿者的报名情况, 并将统计结果绘制成如下统计图表.

光明社区志愿者报名情况统计表

岗位	频数 (人)	频率
A	60	0.15
B	a	0.25

<i>C</i>	160	0.40
<i>D</i>	60	0.15
<i>E</i>	20	<i>c</i>
合计	<i>b</i>	1.00

光明社区志愿者报名情况条形统计图



根据统计图表提供的信息，解答下列问题：

- (1) $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 光明社区约有 4000 人，请你估计该市市区 60 万人口中有多少人报名当志愿者？
- (4) 光明社区从报名“心理服务”岗位的 20 人中筛选出 4 名志愿者，这 4 人中有 2 人是一级心理咨询师，2 人是二级心理咨询师，现从 4 人中随机选取 2 人负责心理服务热线，请用列表或画树状图的方法求所选 2 人恰好都是一级心理咨询师的概率.

【答案】 (1) 400，0.05

(2) 补全条形统计图见解析

(3) 该市市区 60 万人口中约有 6 万人报名当志愿者

(4) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 (1) 根据光明社区志愿者报名情况统计表中频率与频数的对应即可得出结论；

(2) 根据 *B* 岗位的频率求出相对应的频数，补全条形统计图即可；

(3) 根据样本中志愿者的占比即可估算出该市市区 60 万人口中报名当志愿者的人数；

(4) 根据求两步概率的方法，选择列表法更清晰直接的表示可能的结果，根据概率公式求解即可得出结论.

【小问 1 详解】

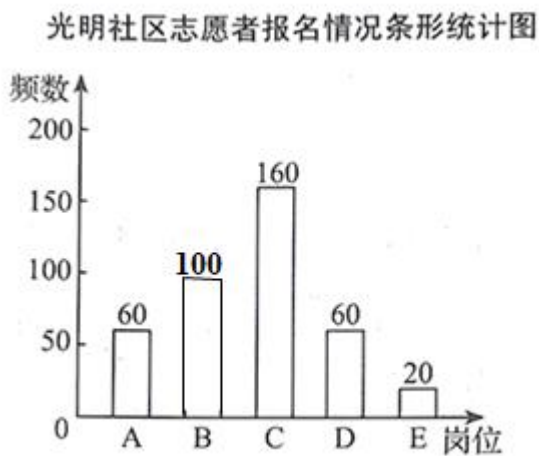
解：根据题中 A 岗位频率为 0.15，频数为 60 人可知样本容量为 $\frac{60}{0.15}=400$ （人），故 $b=400$ ；

根据五个岗位频率总和为 1 可得 $c=1-0.15-0.25-0.40-0.15=0.05$ ；

故答案为：400,0.05；

【小问 2 详解】

解：志愿者报名总人数为 400 人，则 $a=400\times 0.25=100$ （人），补全条形统计图如下：



【小问 3 详解】

解： $60\times \frac{400}{4000}=6$ （万人），

答：该市市区 60 万人口中约有 6 万人报名当志愿者；

【小问 4 详解】

解：用 F_1 和 F_2 表示两名一级心理咨询师，用 S_1 和 S_2 表示两名二级心理咨询师，根据题意，列表如下：

第一人 第二人	F_1	F_2	S_1	S_2
F_1		(F_2,F_1)	(S_1,F_1)	(S_2,F_1)
F_2	(F_1,F_2)		(S_1,F_2)	(S_2,F_2)
S_1	(F_1,S_1)	(F_2,S_1)		(S_2,S_1)
S_2	(F_1,S_2)	(F_2,S_2)	(S_1,S_2)	

由列表可知，从 4 名心理服务的志愿者中抽取 2 名志愿者，总共有 12 种结果，且每种结果出现的可能性相同，其中所选 2 人恰好都是一级心理咨询师的结果有 2 种，则 P （2 人恰好都是一级心理咨询师）= $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ ．

【点睛】 本题考查统计与概率综合，涉及到求统计图表中的相关数据、补全条形统计图、用样本估计总体、用列举法求两步概率问题，熟练掌握统计与概率相关知识与方法，读懂题意看懂统计图表是解决问题的关键.

四、解答题 (第 21 题 12 分, 第 22 题 12 分, 共 24 分)

21. 麦收时节, 为确保小麦颗粒归仓, 某农场安排 A , B 两种型号的收割机进行小麦收制作业. 已知一台 A 型收割机比一台 B 型收割机平均每天多收割 2 公顷小麦, 一台 A 型收割机收割 15 公顷小麦所用时间与一台 B 型收割机收割 9 公顷小麦所用时间相同.

(1) 一台 A 型收割机和一台 B 型收割机平均每天各收割小麦多少公顷?

(2) 该农场安排两种型号的收割机共 12 台同时进行小麦收割作业, 为确保每天完成不少于 50 公顷的小麦收割任务, 至少要安排多少台 A 型收割机?

【答案】 (1) 一台 A 型收割机平均每天收割小麦 5 公顷, 一台 B 型收割机平均每天收割小麦 3 公顷

(2) 至少要安排 7 台 A 型收割机

【解析】

【分析】 (1) 设一台 A 型收割机平均每天收割小麦 x 公顷, 则一台 B 型收割机平均每天收割小麦 $(x-2)$ 公顷, 然后根据一台 A 型收割机收割 15 公顷小麦所用时间与一台 B 型收割机收割 9 公顷小麦所用时间相同列出方程求解即可;

(2) 设每天要安排 y 台 A 型收割机, 然后根据确保每天完成不少于 50 公顷的小麦收割任务列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设一台 A 型收割机平均每天收割小麦 x 公顷, 则一台 B 型收割机平均每天收割小麦 $(x-2)$ 公顷.

根据题意, 得 $\frac{15}{x} = \frac{9}{x-2}$,

解得 $x = 5$

经检验: $x = 5$ 是所列分式方程的根

$\therefore x - 2 = 5 - 2 = 3$ (公顷).

答: 一台 A 型收割机平均每天收割小麦 5 公顷, 一台 B 型收割机平均每天收割小麦 3 公顷.

【小问 2 详解】

解: 设每天要安排 y 台 A 型收割机,

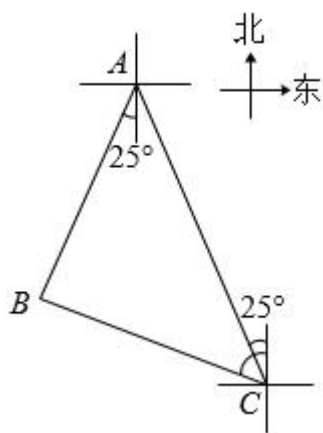
根据题意, 得 $5y + 3(12 - y) \geq 50$,

解得 $y \geq 7$,

答: 至少要安排 7 台 A 型收割机.

【点睛】本题主要考查了分式方程的实际应用，一元一次不等式的实际应用，正确理解题意列出对应的式子求解是解题的关键.

22. 如图， B 港口在 A 港口的南偏西 25° 方向上，距离 A 港口 100 海里处. 一艘货轮航行到 C 处，发现 A 港口在货轮的北偏西 25° 方向， B 港口在货轮的北偏西 70° 方向，求此时货轮与 A 港口的距离（结果取整数）.（参考数据： $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$, $\sqrt{2} \approx 1.414$ ）



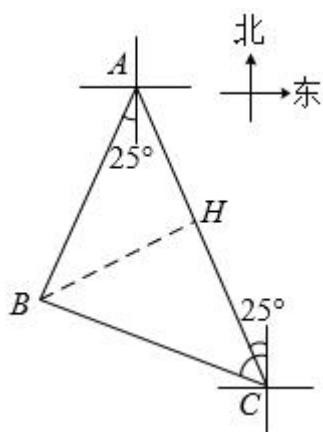
【答案】货轮距离 A 港口约 141 海里

【解析】

【分析】过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，分别解直角三角形求出 AH 、 HC 即可得到答案.

【详解】解：过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ,

根据题意得， $\angle BAC = 25^\circ + 25^\circ = 50^\circ$, $\angle BCA = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ$,



在 $Rt\triangle ABH$ 中， $\angle AHB = 90^\circ$,

$\because AB = 100, \angle BAC = 50^\circ$,

$$\sin \angle BAH = \frac{BH}{AB}, \cos \angle BAH = \frac{AH}{AB},$$

$$\therefore BH = AB \cdot \sin \angle BAC \approx 100 \times 0.766 = 76.6 \text{ (海里)}$$

$$AH = AB \cdot \cos \angle BAC \approx 100 \times 0.643 = 64.3 \text{ (海里)}$$

在 $Rt\triangle BHC$ 中, $\angle BHC = 90^\circ$

$$\therefore \angle BCH = 45^\circ, \tan \angle BCH = \frac{BH}{CH}$$

$$\therefore CH = \frac{BH}{\tan \angle BCH} \approx \frac{76.6}{\tan 45^\circ} = \frac{76.6}{1} = 76.6.$$

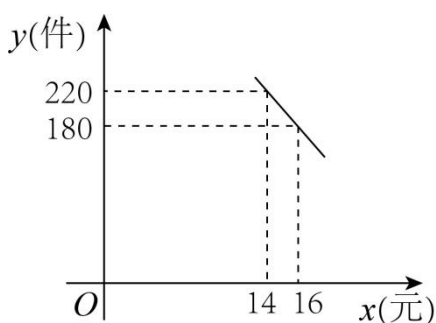
$$\therefore AC = AH + CH = 64.3 + 76.6 \approx 141 \text{ 海里}$$

答: 货轮距离 A 港口约 141 海里.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形的实际应用, 正确理解题意作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

五、解答题 (满分 12 分)

23. 某超市以每件 13 元的价格购进一种商品, 销售时该商品的销售单价不低于进价且不高于 18 元. 经过市场调查发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与销售单价 x (元) 之间满足如图所示的一次函数关系.



(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 销售单价定为多少时, 该超市每天销售这种商品所获的利润最大? 最大利润是多少?

【答案】(1) $y = -20x + 500$ ($13 \leq x \leq 18$),

(2) 销售单价定为 18 元时, 该超市每天销售这种商品所获利润最大, 最大利润是 700 元

【解析】

【分析】(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = kx + b$ ($13 \leq x \leq 18$), 根据坐标 $(14, 220)$, $(16, 180)$ 代入求值即可;

(2) 根据利润 = 单价利润 $\times$ 销售量, 再根据二次函数的性质计算求值即可;

【小问 1 详解】

解: 设 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = kx + b$ ($13 \leq x \leq 18$), 由图象可知,

当 $x=14$ 时, $y=220$; 当 $x=16$ 时, $y=180$,

$$\therefore \begin{cases} 14k + b = 220 \\ 16k + b = 180 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -20 \\ b = 500 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式是 $y = -20x + 500$ ($13 \leq x \leq 18$),

【小问 2 详解】

设每天所获利润为 w 元,

$$w = (x - 13)(-20x + 500)$$

$$= -20x^2 + 760x - 6500$$

$$= -20(x - 19)^2 + 720$$

$$\because a = -20 < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $x < 19$ 时, w 随 x 的增大而增大,

$$\because 13 \leq x \leq 18,$$

$\therefore$ 当 $x = 18$ 时, w 有最大值,

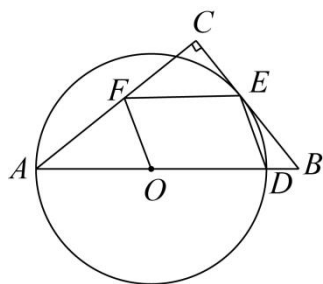
$$w_{\text{最大值}} = -20 \times (18 - 19)^2 + 720 = 700 \text{ (元)},$$

答: 销售单价定为 18 元时, 该超市每天销售这种商品所获利润最大, 最大利润是 700 元;

【点睛】 本题考查了一次函数解析式, 二次函数的实际应用, 掌握二次函数的图象和性质是解题关键.

六、解答题 (满分 12 分)

24. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\square ODEF$ 的顶点 O, D 在斜边 AB 上, 顶点 E, F 分别在边 BC, AC 上, 以点 O 为圆心, OA 长为半径的 $\odot O$ 恰好经过点 D 和点 E .



(1) 求证: BC 与 $\odot O$ 相切;

(2) 若 $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$, $CE = 6$, 求 OF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OE , 先证明四边形 $AOEF$ 是平行四边形, 得到 $OE \parallel AC$, 即可证明 $\angle OEB = \angle ACB = 90^\circ$, 由此即可证明结论;

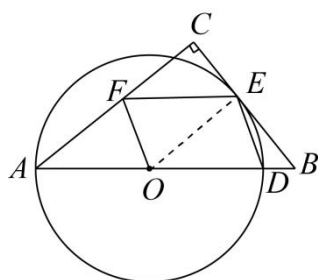
(2) 过点 F 作 $FH \perp OA$ 于点 H , 先解直角 $\triangle CEF$ 求出 EF 的长, 再证明四边形 $AOEF$ 是菱形, 得到 OA , AF 的长, 再解直角 $\triangle AHF$, 求出 AH , FH , 进而求出 OH , 即可利用勾股定理求出 OF .

【小问 1 详解】

证明: 连接 OE ,

$\because$ 四边形 $ODEF$ 是平行四边形,

$\therefore EF \parallel OD$; $EF = OD$,



$\because OA = OD$,

$\therefore EF \parallel OD$; $EF = OA$,

$\therefore$ 四边形 $AOEF$ 是平行四边形,

$\therefore OE \parallel AC$,

$\therefore \angle OEB = \angle ACB$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$,

$\therefore OE \perp BC$,

$\because OE$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切;

【小问 2 详解】

解: 过点 F 作 $FH \perp OA$ 于点 H ,

$\because$ 四边形 $AOEF$ 是平行四边形

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 线段 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AD (AD 不与 AC 重合), 旋转角记为 α , $\angle DAC$ 的平分线 AE 与射线 BD 相交于点 E , 连接 EC .

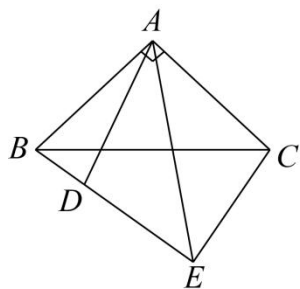


图 ①

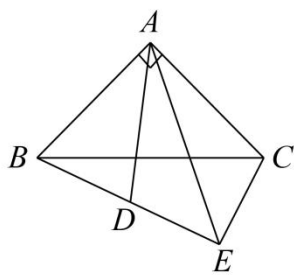
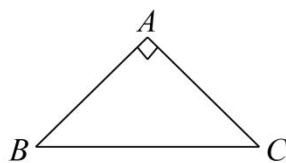


图 ②



备用图

(1) 如图①, 当 $\alpha = 20^\circ$ 时, $\angle AEB$ 的度数是_____;

(2) 如图②, 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 求证: $BD + 2CE = \sqrt{2}AE$;

(3) 当 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $AE = 2CE$ 时, 请直接写出 $\frac{BD}{ED}$ 的值.

【答案】 (1) 45°

(2) 见解析 (3) $2\sqrt{2} + 2$ 或 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】 (1) 根据旋转的性质可知 $AB = AD$, 当 $\alpha = 20^\circ$ 时可根据等腰三角形的性质计算 $\angle ADB$ 的角度, 再由 $\angle BAC = 90^\circ$, AE 是 $\angle DAC$ 的平分线可知 $\angle DAE = 35^\circ$, 由三角形外角的性质, 通过 $\angle AEB = \angle ADB - \angle DAE$ 即可得出答案;

(2) 延长 DB 到 F , 使 $BF = CE$, 连接 AF , 先证明 $\triangle ADE \cong \triangle ACE$, 可推导 $\angle DEA = \angle CEA$, $\angle ADE = \angle ACE$, $\angle DE = CE$, 再由已知条件及等腰三角形的性质推导 $\angle DEA = \angle CEA = 45^\circ$, 然后证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$, 推导 $\angle FAE = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中, 由三角函数可计算 $EF = \sqrt{2}AE$, 即可证明 $BD + 2CE = \sqrt{2}AE$;

(3) 分两种情况讨论: ①当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 借助 (2) 可知 $BD = (2\sqrt{2} - 2)CE$, 再求 $\frac{BD}{ED}$ 的值即可; ②当 $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, 在线段 BD 上取点 F , 使得 $BF = CE$, 结合 (2) 中 $\triangle ADE \cong \triangle ACE$, 可知 $DE = CE$, $\angle ADE = \angle ACE$, 易证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$, 可推导 $\angle BAF = \angle CAE$, $AE = AF$, $\angle EAF = 90^\circ$, $\angle AEF = \angle AFE = 45^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中, 由三角函数可计算 $EF = \sqrt{2}AE$, 即可推导 $BD = (2\sqrt{2} + 2)CE$, 再求 $\frac{BD}{ED}$ 的值即可.

【小问 1 详解】

解: 由旋转可知, $AB = AD$, 当 $\alpha = 20^\circ$ 时,

可知 $\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$, AE 是 $\angle DAC$ 的平分线,

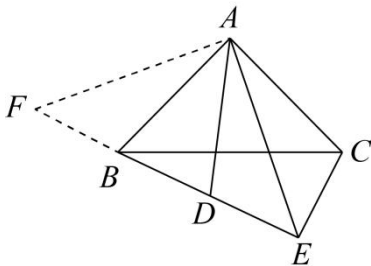
$$\therefore \angle DAE = \frac{\angle BAC - \alpha}{2} = \frac{90^\circ - 20^\circ}{2} = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADB - \angle DAE = 80^\circ - 35^\circ = 45^\circ.$$

故答案为: 45° ;

【小问 2 详解】

证明: 延长 DB 到 F , 使 $BF = CE$, 连接 AF .



$$\because AB = AC, \quad AD = AB,$$

$$\therefore AD = AC,$$

 $\therefore AE$ 平分 $\angle DAC$,

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE,$$

$$\therefore AE = AE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle CEA, \quad \angle ADE = \angle ACE, \quad \angle DE = CE,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle ABD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 360^\circ - (\angle ACE + \angle ABD) - \angle BAC = 360^\circ - 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle CEA$$

$$\therefore \angle DEA = \angle CEA = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle ABD = 180^\circ, \quad \angle ACE + \angle ABD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACE,$$

$$\therefore AB = AC, \quad BF = CE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore AF = AE, \quad \angle AFB = \angle AEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FAE = 180^\circ - \angle AFB - \angle DEA = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中, $\angle FAE = 90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle AEF = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore EF = \frac{AE}{\cos \angle AEF} = \frac{AE}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore EF = BF + BD + DE = CE + BD + CE = BD + 2CE,$$

$$\therefore BD + 2CE = \sqrt{2}AE;$$

【小问 3 详解】

①当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 由 (2) 可知,

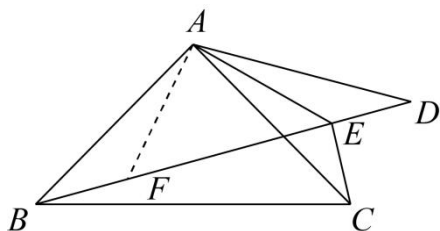
$$DE = CE, \quad BD + 2CE = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2}AE - 2CE,$$

当 $AE = 2CE$ 时, 可知 $BD = \sqrt{2} \times 2CE - 2CE = (2\sqrt{2} - 2)CE$,

$$\therefore \frac{BD}{ED} = \frac{(2\sqrt{2} - 2)CE}{ED} = \frac{(2\sqrt{2} - 2)CE}{CE} = 2\sqrt{2} - 2;$$

②当 $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, 如下图, 在线段 BD 上取点 F , 使得 $BF = CE$,



由 (2) 可知, $\triangle ADE \cong \triangle ACE$,

$$\therefore DE = CE, \quad \angle ADE = \angle ACE,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACE,$$

$$\therefore BF = CE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACE (SAS),$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CAE, \quad AE = AF,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle CAF + \angle CAE = \angle CAF + \angle BAF = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE = \frac{180^\circ - \angle EAF}{2} = 45^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AFE \text{ 中, } \cos \angle AEF = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore EF = \frac{AE}{\cos \angle AEF} = \frac{AE}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore BD = BF + EF + DE = CE + \sqrt{2}AE + CE = \sqrt{2}AE + 2CE,$$

$$\text{当 } AE = 2CE \text{ 时, 可知 } BD = \sqrt{2} \times 2CE + 2CE = (2\sqrt{2} + 2)CE,$$

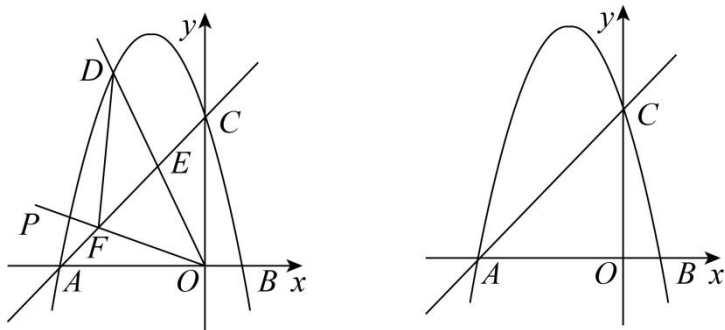
$$\therefore \frac{BD}{ED} = \frac{(2\sqrt{2} + 2)CE}{ED} = \frac{(2\sqrt{2} + 2)CE}{CE} = 2\sqrt{2} + 2.$$

综上所述, 当 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $AE = 2CE$ 时, $\frac{BD}{ED} = 2\sqrt{2} + 2$ 或 $\frac{BD}{ED} = 2\sqrt{2} - 2$.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质及三角函数解直角三角形的知识, 解题关键是熟练掌握相关性质, 并通过作辅助线构建全等三角形.

八、解答题 (满分 14 分)

26. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 3x + c$ 与 x 轴交于 $A(-4, 0)$, B 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$, 点 D 为 x 轴上方抛物线上的动点, 射线 OD 交直线 AC 于点 E , 将射线 OD 绕点 O 逆时针旋转 45° 得到射线 OP , OP 交直线 AC 于点 F , 连接 DF .



(1) 求抛物线的解析式;

- (2) 当点 D 在第二象限且 $\frac{DE}{EO} = \frac{3}{4}$ 时, 求点 D 的坐标;
- (3) 当 $\triangle ODF$ 为直角三角形时, 请直接写出点 D 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 - 3x + 4$

(2) $D(-1, 6)$ 或 $D(-3, 4)$

(3) $(-3, 4)$ 或 $(0, 4)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, 2\right)$ 或 $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 2\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G , 交 AC 于点 H , 先求出直线 AC 的解析式, 设 $D(n, -n^2 - 3n + 4)$, $H(n, n + 4)$, 则 $DH = -n^2 - 4n$, 证明 $\triangle EDH \sim \triangle EOC$ 得到 $\frac{DH}{OC} = \frac{DE}{OE}$, 即可求出 $DH=3$, 据此求解即可;

(3) 分 D 和 F 为直角顶点进行讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(-4, 0)$, $C(0, 4)$ 代入 $y = ax^2 - 3x + c$ 得:

$$\begin{cases} 16a + 12 + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 3x + 4$;

【小问 2 详解】

解: 过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G , 交 AC 于点 H ,

设过点 $A(-4, 0)$, $C(0, 4)$ 的直线的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} -4k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 4 \end{cases},$$

又 $\because OA=OC$,

$\therefore OF \perp AC$, 即 $\angle OFC=90^\circ$,

$\therefore \triangle OFC$ 是直角三角形,

$\therefore$ 此时点 D 的坐标为 $(0, 4)$;

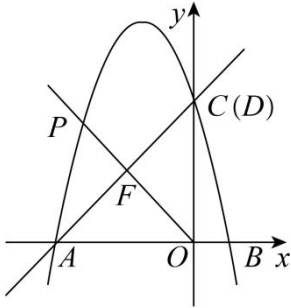


图 1

如图 2 所示, 当 $\angle DFO=90^\circ$ 时, 连接 CD ,

由旋转的性质可得 $\angle DOF=45^\circ$,

$\therefore \triangle DOF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OF=OD$, $\angle FDO=\angle FCO=45^\circ$,

$\therefore C, D, F, O$ 四点共圆,

$\therefore \angle FCD=\angle FOD=45^\circ$,

$\therefore \angle OCD=\angle FCD+\angle FCO=90^\circ$,

$\therefore CD \perp OC$,

$\therefore$ 点 D 的纵坐标为 4,

$\therefore$ 当 $y=4$ 时, $-x^2-3x+4=4$,

解得 $x=-3$ 或 $x=0$ (舍去),

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3, 4)$;

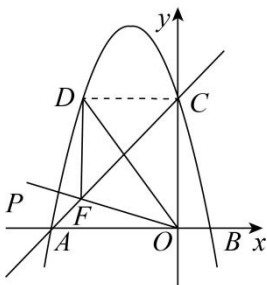


图 2

如图 3 所示, 当 $\angle ODF=90^\circ$ 时, 过点 D 作 $DH \perp y$ 轴于 H , 过点 F 作 $FG \perp DH$ 交 HD 延长线于 G , 同理可

证 $\triangle DOF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OD=DF,$$

$$\because FG \perp DH, DH \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle FGD = \angle DHO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF + \angle GFD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle GDF + \angle HDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GFD = \angle HDO,$$

$$\therefore \triangle GDF \cong \triangle HOD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore GD=OH, GF=DH,$$

设点 D 的坐标为 $(m, -m^2 - 3m + 4)$,

$$\therefore DH = GF = -m, OH = GD = -m^2 - 3m + 4,$$

$$\therefore GH = -m^2 - 4m + 4,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的坐标为 } (m^2 + 4m - 4, -m^2 - 2m + 4),$$

$$\because \text{点 } F \text{ 在直线 } AC: y = x + 4 \text{ 上},$$

$$\therefore m^2 + 4m - 4 + 4 = -m^2 - 2m + 4,$$

$$\therefore m^2 + 3m - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 2 \right) \text{ 或 } \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 2 \right);$$

$$\text{综上所述, 点 } D \text{ 的坐标为 } (-3, 4) \text{ 或 } (0, 4) \text{ 或 } \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 2 \right) \text{ 或 } \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 2 \right)$$

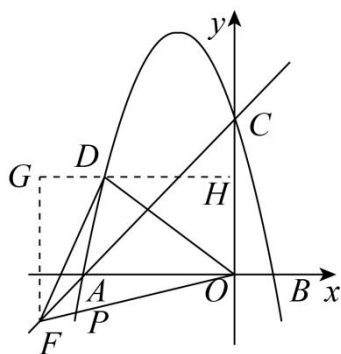


图 3

【点睛】 本题主要考查了二次函数与一次函数综合，二次函数与几何综合，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定等等，熟知相关知识是解题的关键.

