

2020 年丹东市初中毕业升学考试

数学试卷

一、选择题

1. -5 的绝对值等于 ()

- A. -5 B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据绝对值的概念即可得出答案.

【详解】 解: 因为 -5 的绝对值等于 5 , 所以 B 正确;

故选: B.

【点睛】 本题考查绝对值的算法, 正数的绝对值等于它本身, 负数的绝对值等于它的相反数, 0 的绝对值为 0 .

2. 下面计算正确的是 ()

- A. $a^3 \cdot a^3 = 2a^3$ B. $2a^2 + a^2 = 3a^4$
C. $a^9 \div a^3 = a^3$ D. $(-3a^2)^3 = -27a^6$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据整式的计算法则依次计算即可得出正确选项.

【详解】 解: A. $a^3 \cdot a^3 = a^6$, 所以 A 错误;

B. $2a^2 + a^2 = 3a^2$, 所以 B 错误;

C. $a^9 \div a^3 = a^6$, 所以 C 错误;

D. $(-3a^2)^3 = -27a^6$, 所以 D 正确;

故答案选: D.

【点睛】 本题考查整式乘除法的简单计算, 注意区分同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加, 而幂的乘方是底数不变, 指数相乘, 这两个要区分清楚; 合并同类项的时候字母部分不变, 系数进行计算.

3. 如图所示, 该几何体的俯视图为 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：从上边看是一些等宽的矩形，其中有两条宽是虚线，
故选：C.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，从上边看得到的图形是俯视图.

4. 在函数 $y = \sqrt{9-3x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

A. $x \leq 3$

B. $x < 3$

C. $x \geq 3$

D. $x > 3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次根式有意义，列不等式 $9-3x \geq 0$ ，求出 x 的取值范围即可.

【详解】解：根据二次根式有意义，
所以， $9-3x \geq 0$ ，
解得， $x \leq 3$.
故选：A.

【点睛】本题主要考查函数自变量的取值范围的知识点，二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

5. 四张背面完全相同的卡片，正面分别印有等腰三角形、圆、平行四边形、正六边形，现在把它们的正面向下，随机的摆放在桌面上，从中任意抽出一张，则抽到的卡片正面是中心对称图形的概率是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】由四张质地、大小、背面完全相同的卡片上，正面分别画有等腰三角形、圆、平行四边形、正六边形四个图案. 中心对称图形的是圆、平行四边形，正六边形，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解： $\because$ 四张质地、大小、背面完全相同的卡片上，正面分别画有等腰三角形、圆、平行四边形、

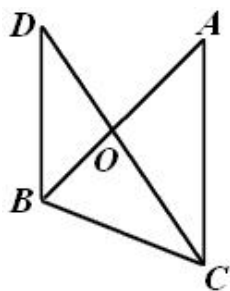
正六边形四个图案. 中心对称图形的是圆、平行四边形, 正六边形,

$\therefore$ 从中任意抽出一张, 则抽出的卡片正面图案是中心对称图形的概率为: $\frac{3}{4}$.

故选: C.

【点睛】此题考查了概率公式的应用. 注意用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

6. 如图, CO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 过点 B 作 $BD \parallel AC$ 交 CO 延长线于点 D , 若 $\angle A = 45^\circ$, $\angle AOD = 80^\circ$, 则 $\angle CBD$ 的度数为 ()



A. 100°

B. 110°

C. 125°

D. 135°

【答案】B

【解析】

【分析】先根据三角形的外角性质可求出 $\angle OCA = 35^\circ$, 再根据角平分线的定义、平行线的性质可得 $\angle D = 35^\circ$, $\angle BCD = 35^\circ$, 然后根据三角形的内角和定理即可得.

【详解】 $\because \angle A = 45^\circ$, $\angle AOD = 80^\circ$

$\therefore \angle OCA = \angle AOD - \angle A = 35^\circ$

$\because CO$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

$\therefore \angle BCD = \angle OCA = 35^\circ$

$\because BD \parallel AC$

$\therefore \angle D = \angle OCA = 35^\circ$

则在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - \angle D - \angle BCD = 110^\circ$

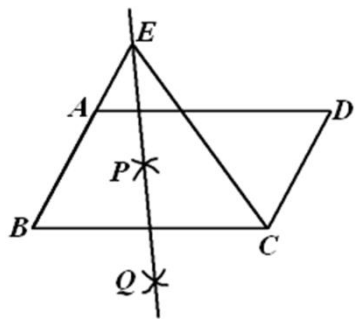
故选: B.

【点睛】本题考查了三角形的外角性质、角平分线的定义、平行线的性质、三角形的内角和定理, 熟练运用各定理与性质是解题关键.

7. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $\angle B = 60^\circ$, $AD = 8\sqrt{3}$, 分别以 B 和 C 为圆心,

以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 P 和 Q , 直线 PQ 与 BA 延长线交于点 E , 连接 CE , 则 $\triangle BCE$

的内切圆半径是 ()



A. 4

B. $4\sqrt{3}$

C. 2

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】分别以 B 和 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 P 和 Q ，连接 P, Q 则 PQ 为 BC 的垂直平分线，可得 $EB=EC$ ，又 $\angle B=60^\circ$ ，所以 $\triangle EBC$ 为等边三角形，作等边三角形 EBC 的内切圆，设圆心为 M ，则 M 在直线 PQ 上，连接 BM ，过 M 作 BC 垂线垂足为 H ，在 $\text{Rt}\triangle BMH$ 中， $BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=4\sqrt{3}$ ， $\angle MBH=\frac{1}{2}\angle B=30^\circ$ ，通过解直角三角形可得出 MH 的值即为 $\triangle BCE$ 的内切圆半径的长.

【详解】解：有题意得 PQ 为 BC 的垂直平分线，

$\therefore EB=EC$,

$\because \angle B=60^\circ$,

$\therefore \triangle EBC$ 为等边三角形，

作等边三角形 EBC 的内切圆，设圆心为 M ，

$\therefore M$ 在直线 PQ 上，

连接 BM ，过 M 作 MH 垂直 BC 于 H ，垂足为 H ，

$\because AD=8\sqrt{3}$

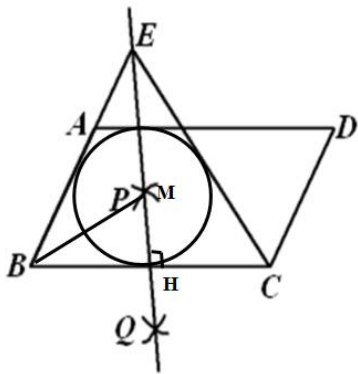
$\therefore BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=4\sqrt{3}$ ，

$\because \angle MBH=\frac{1}{2}\angle B=30^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BMH$ 中， $MH=BH\times\tan 30^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4$.

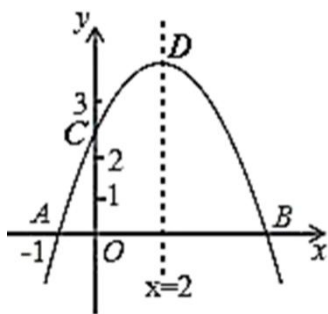
$\therefore \triangle BCE$ 的内切圆半径是 4.

故选：A.



【点睛】 本题考查了线段垂直平分线定理，等边三角形的判定，等边三角形内切圆半径的求法，解直角三角形，解题关键在于理解题意，运用正确的方法求三角形内切圆半径.

8. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于 A ， B 两点，与 y 轴交于点 C ，点 A 坐标为 $(-1, 0)$ ，点 C 在 $(0, 2)$ 与 $(0, 3)$ 之间 (不包括这两点)，抛物线的顶点为 D ，对称轴为直线 $x = 2$ ，有以下结论：① $abc > 0$ ；②若点 $M\left(-\frac{1}{2}, y_1\right)$ ，点 $N\left(\frac{7}{2}, y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1 < y_2$ ；③ $-\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}$ ；④ $\triangle ADB$ 可以是等腰直角三角形. 其中正确的有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】 根据二次函数的图象与系数的关系即可求出答案.

【详解】 解：①由开口可知： $a < 0$,

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

由抛物线与 y 轴的交点可知： $c > 0$,

$\therefore abc < 0$ ，故①错误；

②由于 $-\frac{1}{2} < 2 < \frac{7}{2}$, 且 $(-\frac{1}{2}, y_1)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $(\frac{9}{2}, y_1)$,

$$\therefore \frac{7}{2} < \frac{9}{2},$$

$\therefore y_1 < y_2$, 故②正确,

$$\textcircled{3} \because -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

$$\because x = -1, y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\therefore c = -5a,$$

$$\because 2 < c < 3,$$

$$\therefore 2 < -5a < 3,$$

$$\therefore -\frac{3}{5} < a < -\frac{2}{5}, \text{ 故③正确}$$

④根据抛物线的对称性可知, $AB=6$,

$$\therefore \frac{1}{2} AB = 3,$$

假定抛物线经过 $(0, 2), (-1, 0), (5, 0)$,

设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-5)$, 则 $a=-\frac{2}{5}$,

$$\therefore y = -\frac{2}{5}(x-2)^2 + \frac{18}{5}$$

$$\therefore \frac{18}{5} > 3$$

$\therefore \triangle ADB$ 不可以是等腰直角三角形. 故④错误.

所以正确的是②③, 共 2 个.

故选: B.

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质, 解题的关键是熟练运用图象与系数的关系, 本题属于中等题型.

二、填空题

9. 据有关报道, 2020 年某市斥资约 5 800 000 元改造老旧小区, 数据 5 800 000 科学记数法表示为_____.

【答案】 5.8×10^6 .

【解析】

【分析】绝对值较大的数利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^n$, 指数 n =原数位数-1, 且 $1 \leq a < 10$.

【详解】解： $5800\ 000=5.8 \times 10^6$,

故答案为： 5.8×10^6 .

【点睛】此题主要考查了科学记数法-表示较大的数，关键是掌握把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是整数数位只有一位的数， n 是正整数.

10. 因式分解： $mn^3 - 4mn =$ _____.

【答案】 $mn(n+2)(n-2)$

【解析】

【分析】先提公因式，然后利用平方差公式进行因式分解，即可得到答案.

【详解】解： $mn^3 - 4mn = mn(n^2 - 4) = mn(n+2)(n-2)$ ；

故答案为： $mn(n+2)(n-2)$.

【点睛】本题考查了因式分解，解题的关键是掌握因式分解的方法.

11. 一次函数 $y = -2x + b$ ，且 $b > 0$ ，则它的图象不经过第_____象限.

【答案】 三

【解析】

【分析】根据一次函数的性质，即可得到答案.

【详解】解：在一次函数 $y = -2x + b$ 中，

$\because -2 < 0$ ， $b > 0$ ，

$\therefore$ 它的图象经过第一、二、四象限，不经过第三象限；

故答案为： 三

【点睛】本题考查了一次函数的性质，熟练掌握 $k < 0$ ， $b > 0$ ，经过第一、二、四象限是解题的关键.

12. 甲、乙两人进行飞镖比赛，每人投 5 次，所得平均环数相等，其中甲所得环数的方差为 5，乙所得环数如下：2，3，5，7，8，那么成绩较稳定的是_____（填“甲”或“乙”）.

【答案】 甲

【解析】

【分析】求出乙所得环数的方差，然后和甲所得环数的方差进行比较即可.

【详解】解： $\because$ 乙所得环数为：2，3，5，7，8，

$\therefore$ 乙所得环数的平均数为 $\frac{2+3+5+7+8}{5} = 5$ ，

$$\therefore \text{乙所得环数的方差为 } s^2 = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{26}{5},$$

$$\therefore 5 < \frac{26}{5},$$

$\therefore$ 成绩较稳定的是甲,

故答案为: 甲.

【点睛】 本题考查了方差, 掌握方差的计算方法, 了解方差越小数据越稳定是解题的关键.

13. 关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + 3x - 1 = 0$ 有两个实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{13}{4}$ 且 $m \neq -1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义、根的判别式即可得.

【详解】 由题意得: 这个方程是一元二次方程

$$\therefore m+1 \neq 0$$

$$\text{解得 } m \neq -1$$

又 $\because$ 关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + 3x - 1 = 0$ 有两个实数根

$$\therefore \text{此方程的根的判别式 } \Delta = 3^2 + 4(m+1) \geq 0$$

$$\text{解得 } m \geq -\frac{13}{4}$$

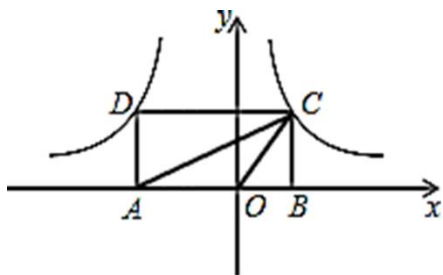
$$\text{综上, } m \text{ 的取值范围是 } m \geq -\frac{13}{4} \text{ 且 } m \neq -1$$

$$\text{故答案为: } m \geq -\frac{13}{4} \text{ 且 } m \neq -1.$$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义与根的判别式, 理解题意, 掌握一元二次方程的定义与根的判别式是解题关键.

14. 如图, 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上, 点 C 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 点 D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的

$$\text{图象上, 若 } \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \angle OCB = \frac{4}{5}, \text{ 则 } k = \text{_____}.$$



【答案】 -10

【解析】

【分析】 设 $C(x, \frac{6}{x})$ ，根据 $\cos \angle OCB = \frac{4}{5}$ 求出 OB ， BC ，再根据 $\sin \angle CAB = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 求出 AC ，由勾股定理

理求出 AB ，从而得出 AO ，得到 D 的坐标，进而求出 k 的值.

【详解】 解： 设 $C(x, \frac{6}{x})$ ($x > 0$)，

$$\therefore OB = x, \quad BC = \frac{6}{x},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AD = BC,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2},$$

$$\because \cos \angle OCB = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{BC}{OC} = \frac{4}{5}, \quad \text{即} \quad \frac{\frac{6}{x}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2}} = \frac{4}{5},$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore OB = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad BC = \frac{6}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\because \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{即} \quad \frac{2\sqrt{2}}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AO = 4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore D\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right),$$

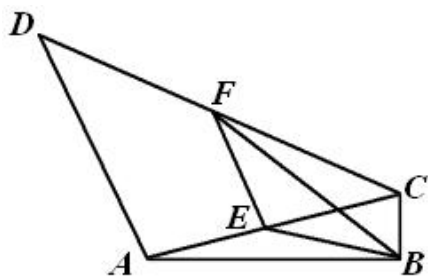
$\therefore D$ 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore k = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -10.$$

故答案为: -10.

【点睛】此题是一道综合性较强的题目, 将解直角三角形和用待定系数法求函数解析式结合起来, 有一定难度.

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AD \perp AC$, $AD = AC$, $\angle BAD = 105^\circ$, 点 E 和点 F 分别是 AC 和 CD 的中点, 连接 BE , EF , BF , 若 $CD = 8$, 则 $\triangle BEF$ 的面积是_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】由题可得 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形, $CD=8$, 可求出 $AD=AC=4\sqrt{2}$, 点 E 和点 F 分别是 AC 和 CD 的中点, 根据中位线定理和直角三角形斜边中线定理可得到 $EF = \frac{1}{2}AD$, $BE = \frac{1}{2}AC$, 从而得到 $EF=EB$, 又 $\angle BAD = 105^\circ$, 得 $\angle CAB = 15^\circ$, $\angle CEB = 30^\circ$ 进一步得到 $\angle FEB = 120^\circ$, 又 $\triangle EFB$ 为等腰三角形, 所以 $\angle EFB = \angle EBF = 30^\circ$, 过 E 作 EH 垂直于 BF 于 H 点, 在 $Rt\triangle EFH$ 中, 解直角三角形求出 EH , FH , 以 BF 为底, EH 为高, 即可求出 $\triangle BEF$ 的面积.

【详解】解: $\because AD \perp AC$, $AD = AC$,

$\therefore \triangle ADC$ 为等腰直角三角,

$\because CD=8$,

$$\therefore AD=AC=\frac{\sqrt{2}}{2} CD=4\sqrt{2},$$

$\because E, F$ 为 AC, DC 的中点,

$$\therefore FE \parallel AD, EF=\frac{1}{2} AD=2\sqrt{2},$$

$$\therefore BE=\frac{1}{2} AC=2\sqrt{2},$$

$\because AD=AC,$

$\therefore EF=EB, \triangle EFB$ 为等腰三角形,

又 $\because EF \parallel AD,$

$\therefore EF \perp AC,$

$\therefore \angle FEC=90^\circ,$

又 $EB=EA,$

$\therefore \angle EAB=\angle EBA=105^\circ-90^\circ=15^\circ,$

$\therefore \angle CEB=30^\circ,$

$\therefore \angle FEB=120^\circ,$

$\therefore \angle EFB=\angle EBF=30^\circ,$

过 E 作 EH 垂直于 BF 于 H 点,

$\therefore BH=FH,$

在 $Rt\triangle EFH$ 中,

$\because \angle EFH=30^\circ,$

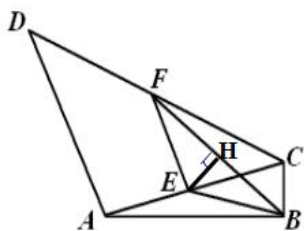
$$\therefore EH=EF \cdot \sin 30^\circ=2\sqrt{2} \times \frac{1}{2}=\sqrt{2},$$

$$FH=EF \cdot \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}=\sqrt{6},$$

$$\therefore BF=2 \times \sqrt{6}=2\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{BEF}=\frac{1}{2} BF \cdot EH=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{2}=2\sqrt{3},$$

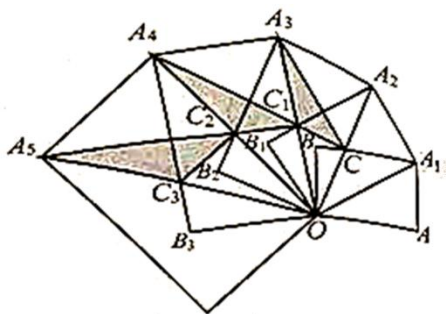
故答案为: $2\sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，三角形中位线定理，直角三角形斜边中线定理，解直角三角形。

正确的运用解题方法求出相关线段长度是解题的关键.

16. 如图, 在矩形 OAA_1B 中, $OA=3$, $AA_1=2$, 连接 OA_1 , 以 OA_1 为边, 作矩形 $OA_1A_2B_1$ 使 $A_1A_2 = \frac{2}{3}OA_1$, 连接 OA_2 交 A_1B 于点 C ; 以 OA_2 为边, 作矩形 $OA_2A_3B_2$, 使 $A_2A_3 = \frac{2}{3}OA_2$, 连接 OA_3 交 A_2B_1 于点 C_1 ; 以 OA_3 为边, 作矩形 $OA_3A_4B_3$, 使 $A_3A_4 = \frac{2}{3}OA_3$, 连接 OA_4 交 A_3B_2 于点 C_2 ; ...按照这个规律进行下去, 则 $\Delta C_{2019}C_{2020}A_{2022}$ 的面积为_____.



【答案】 $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^{4042}$.

【解析】

【分析】 先寻找规律求得 $S_{\text{矩}OA_nA_{n+1}B_n}$ 的面积, 再结合勾股定理以及三角形中线平分三角形的面积求得三角形面积是它所在矩形面积的 $\frac{1}{8}$, 依此即可求得 $\Delta C_{2019}C_{2020}A_{2022}$ 的面积.

【详解】 解: $\because$ 四边形 OAA_1B 为矩形,

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ, \quad A_1B = OA = 3, \quad OB = AA_1 = 2, \quad A_1B \parallel OA,$$

$$\therefore \angle BA_1O = \angle A_1OA,$$

$$\therefore OA_1 = \sqrt{OA^2 + AA_1^2} = \sqrt{13}, \quad AA_1 = \frac{2}{3}OA, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{13}}{3}OA,$$

$$\therefore A_1A_2 = \frac{2}{3}OA_1,$$

$$\therefore A_1A_2 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{13}}{3} OA,$$

$$\therefore \tan \angle A_2OA_1 = \tan \angle A_1OA$$

$$\therefore \angle A_2OA_1 = \angle A_1OA,$$

$$\therefore \angle BA_1O = \angle A_2OA_1,$$

$$\therefore OC = A_1C,$$

$$\text{同理可证 } OA_2 = \frac{\sqrt{13}}{3} OA_1 = \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 OA, \quad A_2A_3 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{13}}{3} OA_2 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 OA,$$

$$\text{依次类推 } OA_n = \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^n OA, \quad A_nA_{n+1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^n OA,$$

$$\text{故 } S_{\text{矩}OA_nA_{n+1}B_n} = OA_n \times A_nA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^n OA \times \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^n OA = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^{2n},$$

在矩形 OAA_1B 中, 设 $OC = A_1C = x$, 则 $BC = 3 - x$,

根据勾股定理 $OB^2 + BC^2 = OC^2$,

$$\text{即 } 2^2 + (3 - x)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{13}{6},$$

$$\therefore OA_2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 OA = \frac{13}{3}, \text{ 即 } OC = CA_2 = \frac{1}{2} OA_2,$$

$$\text{同理可证 } OC_1 = C_1A_3 = \frac{1}{2} OA_3,$$

$$\therefore S_{\triangle CC_1A_3} = \frac{1}{2} S_{\triangle OCA_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle OA_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{矩}OA_2A_3B_2} = \frac{1}{8} S_{\text{矩}OA_2A_3B_2}$$

$$\text{同理可证 } S_{\triangle C_{2019}C_{2020}A_{2022}} = \frac{1}{8} S_{\text{矩}OA_{2021}A_{2022}B_{2021}} = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^{4042} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^{4042}$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^{4042}.$$

【点睛】本题考查矩形的性质, 勾股定理, 三角形中线有关的面积计算, 探索与表达规律, 解直角三角形. 解决此题的关键有两个: ①寻找规律, 求得 $S_{\text{矩}OA_nA_{n+1}B_n} = OA_n \times A_nA_{n+1}$; ②得出三角形面积是它所在矩形面积

的 $\frac{1}{8}$. 需注意标序号的时候不要混淆了.

三、解答题

17. 先化简, 再求代数式的值: $\left(\frac{4x}{x-2} - \frac{x}{x+2}\right) \div \frac{x}{x^2-4}$, 其中 $x = \cos 60^\circ + 6^{-1}$.

【答案】 $3x+10$, 12.

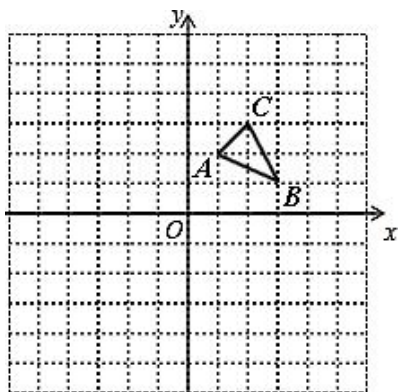
【解析】

【分析】 先利用分式的减法与除法法则化简分式, 再根据特殊角的余弦值、负整数指数幂求出 x 的值, 然后代入求值即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 原式} &= \left[\frac{4x(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} \right] \div \frac{x}{(x+2)(x-2)} \\&= \frac{4x^2+8x-x^2+2x}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x}{(x+2)(x-2)} \\&= \frac{3x^2+10x}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x} \\&= \frac{x(3x+10)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x} \\&= 3x+10 \\x = \cos 60^\circ + 6^{-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ \text{将 } x = \frac{2}{3} \text{ 代入得: 原式} &= 3 \times \frac{2}{3} + 10 = 12.\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了分式的减法与除法、特殊角的余弦值、负整数指数幂等知识点, 熟记各运算法则是解题关键.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 网格的每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形, 点 A , B , C 的坐标分别为 $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,3)$, 先以原点 O 为位似中心在第三象限内画一个 $\triangle A_1B_1C_1$, 使它与 $\triangle ABC$ 位似, 且相似比为 2: 1, 然后再把 $\triangle ABC$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_2B_2C_2$.



(1) 画出 $\triangle A_1B_1C_1$, 并直接写出点 A_1 的坐标;

(2) 画出 $\triangle A_2B_2C_2$, 直接写出在旋转过程中, 点 A 到点 A_2 所经过的路径长.

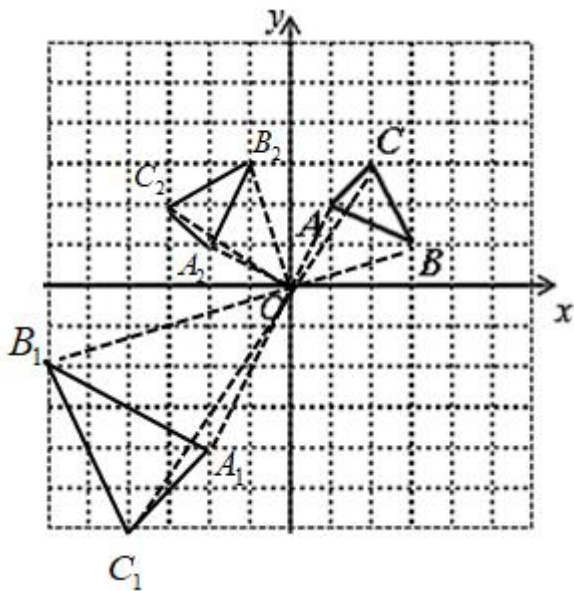
【答案】 (1) 见解析, $A_1(-2, -4)$; (2) 见解析, $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$.

【解析】

【分析】 (1) 连接 AO、BO、CO, 并延长到 2AO、2BO、2CO, 长度找到各点的对应点, 顺次连接即可;

(2) 根据网格结构找出点 A、B、C 绕点 O 逆时针旋转 90° 后的对应点 A_2 、 B_2 、 C_2 的位置, 然后顺次连接即可, 再根据勾股定理列式求出 OA, 然后利用弧长公式列式计算即可得解.

【详解】 (1) 如图所示, $A_1(-2, -4)$;



(2) 如图所示,

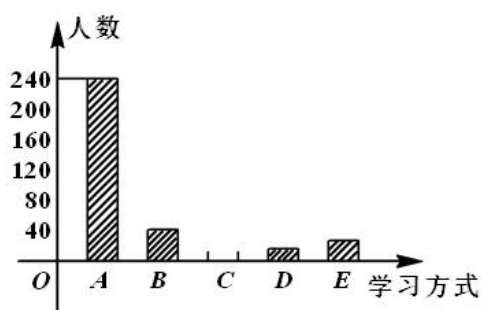
$$\because OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \widehat{AA_2} \text{ 的长为: } \frac{90\pi \times \sqrt{5}}{180} = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.$$

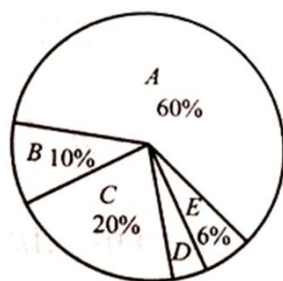
【点睛】本题考查了平移变换作图和轴对称图形的作法及画位似图形. 注意: 画位似图形的一般步骤为: ①确定位似中心, ②分别连接并延长位似中心和能代表原图的关键点; ③根据相似比, 确定能代表所作的位似图形的关键点; 顺次连接上述各点, 得到放大或缩小的图形.

19. 某校为了解疫情期间学生居家学习情况, 以问卷调查的形式随机调查了部分学生居家学习的主要方式 (每名学生只选最主要的一种), 并将调查结果绘制成如下不完整的统计图.

种类	A	B	C	D	E
学习方式	老师直播 教学课程	国家教育云平台 教学课程	电视台播放 教学课程	第三方 网上课程	其他



居家学习方式条形统计图



居家学习方式扇形统计图

根据以上信息回答下列问题:

- (1) 参与本次问卷调查的学生共有_____人, 其中选择 B 类型的有_____人;
- (2) 在扇形统计图中, 求 D 所对应的圆心角度数, 并补全条形统计图;
- (3) 该校学生人数为 1250 人, 选择 A 、 B 、 C 三种学习方式大约共有多少人?

【答案】(1) 400, 40; (2) 14.4° , 图见解析; (3) 选择 A 、 B 、 C 三种学习方式大约共有 1125 人.

【解析】

【分析】(1) 根据 A 类型的条形统计图和扇形统计图信息可得参与调查的学生总人数, 再利用总人数乘以 10% 即可得;

(2) 先求出 D 类型的学生的占比, 再乘以 360° 可得圆心角的度数, 然后利用总人数乘以 20% 可得 C 类型的学生人数, 由此补全条形统计图即可;

(3) 先求出选择 A 、 B 、 C 三种学习方式的学生的占比, 再乘以 1250 即可得.

【详解】(1) 参与调查的学生总人数为 $240 \div 60\% = 400$ (人)

选择 B 类型的学生人数为 $10\% \times 400 = 40$ (人)

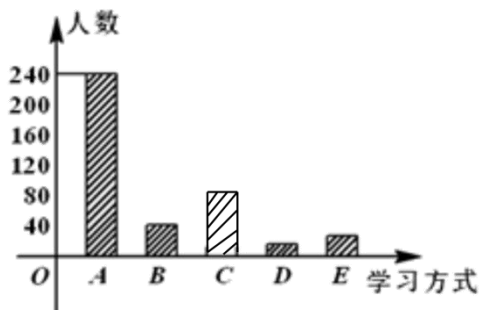
故答案为: 400, 40;

(2) D 类型的学生的占比为 $100\% - 60\% - 10\% - 20\% - 6\% = 4\%$

则 D 所对应的圆心角度数为 $4\% \times 360^\circ = 14.4^\circ$

C 类型的学生人数为 $20\% \times 400 = 80$ (人)

补全条形统计图如下所示:



居家学习方式条形统计图

(3) 选择 A、B、C 三种学习方式的学生的占比为 $60\% + 10\% + 20\% = 90\%$

则 $1250 \times 90\% = 1125$ (人)

答: 选择 A、B、C 三种学习方式大约共有 1125 人.

【点睛】 本题考查了条形统计图和扇形统计图的信息关联、画条形统计图等知识点, 熟练掌握统计调查的相关知识是解题关键.

20. 在一个不透明的口袋中装有 4 个依次写有数字 1, 2, 3, 4 的小球, 它们除数字外都相同, 每次摸球前都将小球摇匀.

(1) 从中随机摸出一个小球, 小球上写的数字不大于 3 的概率是_____;

(2) 若从中随机摸出一球不放回, 再随机摸出一球, 请用画树状图或列表的方法, 求两次摸出小球上的数字和恰好是偶数的概率.

【答案】 (1) $\frac{3}{4}$; (2) $\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据口袋中数字不大于 3 的小球有 3 个, 即可确定概率;

(2) 通过列表或画树状图写出所有的等可能结果, 然后数出两次摸出小球上的数字和恰好是偶数的结果, 即可得到概率.

【详解】 解: (1) 一共有 4 个小球, 不大于 3 的小球有 3 个,
因此从中随机摸出一个小球, 小球上写的数字不大于 3 的概率是 $\frac{3}{4}$;

(2) 列表为:

第一次 第二次	1	2	3	4
1		(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)		(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)		(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	

一共有 12 种等可能结果，两次摸出小球上的数字和恰好是偶数的有 (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2), 共 4 中结果,

因此两次摸出小球上的数字和恰好是偶数的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了概率的计算，熟练掌握画树状图或列表法求概率是解题的关键.

21. 为帮助贫困山区孩子学习，某学校号召学生自愿捐书，已知七、八年级同学捐书总数都是 1800 本，八年级捐书人数比七年级多 150 人，七年级人均捐书数量是八年级人均捐书数量的 1.5 倍，求八年级捐书人数是多少？

【答案】 八年级捐书人数是450 人.

【解析】

【分析】 设七年级捐书人数为 x ，则八年级捐书人数为 $(x+150)$ ，根据七年级人均捐书数量是八年级人均捐书数量的 1.5 倍，列出方程求解并检验即可.

【详解】 设七年级捐书人数为 x ，则八年级捐书人数为 $(x+150)$ ，根据题意得，

$$\frac{1800}{x} = 1.5 \times \frac{1800}{150 + x},$$

解得， $x = 300$ ，

经检验， $x = 300$ 是原方程的解，

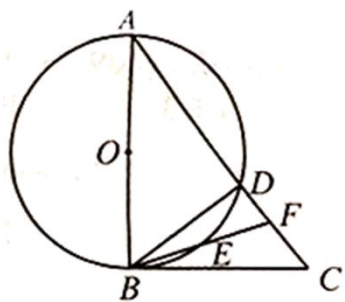
$$\therefore x+150=300+150=450,$$

答： 八年级捐书人数是 450 人.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出分式方程，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列出方程求解并检验.

22. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，连接 BD ， $\angle CBD$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 E ，

交 AC 于点 F ，且 $AF = AB$ 。



(1) 判断 BC 所在直线与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $\tan \angle FBC = \frac{1}{3}$ ， $DF = 2$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】(1) 见详解；(2) $\odot O$ 的半径为 $R = 5$ 。

【解析】

【分析】(1) 由 AB 为直径，则 $\angle ADB = 90^\circ$ ，由等边对等角，三角形的外角性质，得到 $\angle ABD = \angle C$ ，然后得到 $\angle BAD + \angle C = 90^\circ$ ，即可得到结论成立；

(2) 由 $\tan \angle FBD = \tan \angle FBC = \frac{1}{3}$ ， $DF = 2$ ，则求出 $BD = 6$ ，然后利用勾股定理，求出 AB 的长度，即可得到半径。

【详解】解：(1) $\because AB$ 为直径，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\because AF = AB,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle FBD = \angle C + \angle FBC,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle CBD,$$

$$\therefore \angle FBD = \angle FBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

$$(2) \because \angle FBD = \angle FBC,$$

$$\therefore \tan \angle FBD = \tan \angle FBC = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle BDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle FBD = \frac{DF}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{2}{BD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BD=6,$$

设 $AF = AB = x$ ，则 $AD = x - 2$ ，

在 $Rt\triangle ABD$ 中，由勾股定理得

$$(x-2)^2 + 6^2 = x^2,$$

解得： $x = 10$ ，

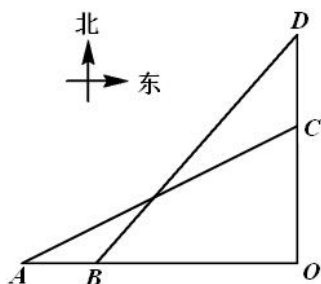
$$\therefore AB = 10,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } R = \frac{1}{2} AB = 5.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定和性质，勾股定理，解直角三角形，等边对等角，三角形的外角性质，以及等角的余角相等，解题的关键是熟练掌握所学的知识，从而进行解题.

23. 如图，小岛 C 和 D 都在码头 O 的正北方向上，它们之间距离为 6.4km ，一艘渔船自西向东匀速航行，行驶到位于码头 O 的正西方向 A 处时，测得 $\angle CAO = 26.5^\circ$ ，渔船速度为 28km/h ，经过 0.2h ，渔船行驶到了 B 处，测得 $\angle DBO = 49^\circ$ ，求渔船在 B 处时距离码头 O 有多远？（结果精确到 0.1km ）

（参考数据： $\sin 26.5^\circ \approx 0.45$ ， $\cos 26.5^\circ \approx 0.89$ ， $\tan 26.5^\circ \approx 0.50$ ， $\sin 49^\circ \approx 0.75$ ， $\cos 49^\circ \approx 0.66$ ， $\tan 49^\circ \approx 1.15$ ）



【答案】 14.2 km .

【解析】

【分析】 根据题意，可求出 $AB = 5.6\text{ km}$ ， $BO = x\text{ km}$ ，则可得 $AO = (5.6 + x)\text{ km}$ ，在 $Rt\triangle BOD$ 中利用三角函数可得 $DO = 1.15x$ ，所以 $CO = (1.15x - 6.4)\text{ km}$ ，然后在 $Rt\triangle CAO$ 中，根据三角函数列出关于 x 的方程，解方程即可得出答案.

【详解】 解：依题可得， $AB = 28 \times 0.2 = 5.6\text{ km}$ ，

设 $BO = x\text{ km}$ ，则 $AO = (5.6 + x)\text{ km}$ ，

在 $Rt\triangle BOD$ 中,

$$\because \angle DBO = 49^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DBO = \frac{DO}{BO},$$

$$\therefore 1.15 = \frac{DO}{x},$$

$$\therefore DO = 1.15x,$$

$$\because CD = 6.4 \text{ km},$$

$$\therefore CO = (1.15x - 6.4) \text{ km},$$

在 $Rt\triangle CAO$ 中,

$$\because \angle CAO = 26.5^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle CAO = \frac{CO}{AO},$$

$$\therefore 0.50 = \frac{1.15x - 6.4}{5.6 + x}$$

解得: $x \approx 14.2$

即渔船在 B 处时距离码头 O 约 14.2 km .

【点睛】 本题考查锐角三角函数的实际应用, 根据题目所给的已知条件, 先找出要用到的直角三角形, 然后再逐一去分析, 需要设未知数的一般求谁设谁, 或者选择计算量较小的线段设为未知数, 注意题目要求的精确度.

24. 某服装批发市场销售一种衬衫, 衬衫每件进货价为 50 元, 规定每件售价不低于进货价, 经市场调查, 每月的销售量 y (件) 与每件的售价 x (元) 满足一次函数关系, 部分数据如下表:

售价 x (元/件)	60	65	70
销售量 y (件)	1400	1300	1200

- (1) 求出 y 与 x 之间的函数表达式; (不需要求自变量 x 的取值范围)
- (2) 该批发市场每月想从这种衬衫销售中获利 24000 元, 又想尽量给客户实惠, 该如何给这种衬衫定价?
- (3) 物价部门规定, 该衬衫的每件利润不允许高于进货价的 30%, 设这种衬衫每月的总利润为 w (元), 那么售价定为多少元可获得最大利润? 最大利润是多少?

【答案】 (1) y 与 x 之间的函数表达式为 $y = -20x + 2600$; (2) 这种衬衫定价为每件 70 元; (3) 价定为 65 元可获得最大利润, 最大利润是 19500 元.

【解析】

【分析】 (1) 根据题意可以设出 y 与 x 之间的函数表达式, 然后根据表格中的数据即可求得 y 与 x 之间的

函数表达式;

(2) 根据“总利润=每件商品的利润×销售量”列出方程并求解,最后根据尽量给客户实惠,对方程的解进行取舍即可;

(3) 求出 w 的函数解析式,将其化为顶点式,然后求出定价的取值,即可得到售价为多少万元时获得最大利润,最大利润是多少.

【详解】解: (1) 设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$),

把 $x=60$, $y=1400$ 和 $x=65$, $y=1300$ 代入解析式得,

$$\begin{cases} 60k + b = 1400 \\ 65k + b = 1300 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} k = -20 \\ b = 2600 \end{cases},$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y = -20x + 2600$;

(2) 设该种衬衫售价为 x 元, 根据题意得,

$$(x-50)(-20x+2600)=24000$$

解得, $x_1 = 70$, $x_2 = 110$,

$\because$ 批发商场想尽量给客户实惠,

$\therefore x = 70$,

故这种衬衫定价为每件 70 元;

(3) 设售价定为 x 元, 则有:

$$w = (x-50)(-20x+2600)$$

$$= -20(x-90)^2 + 32000$$

$$\because x-50 \leq 50 \times 30\%$$

$$\therefore x \leq 65$$

$$\because k = -20 < 0,$$

$\therefore w$ 有最大值, 即当 $x=65$ 时, w 的最大值为 $-20(65-90)^2 + 32000 = 19500$ (元).

所以, 售价定为 65 元可获得最大利润, 最大利润是 19500 元.

【点睛】 本题考查二次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的函数解析式, 利用二次函数的性质和二次函数的顶点式解答.

25. 已知: 菱形 $ABCD$ 和菱形 $A'B'C'D'$, $\angle BAD = \angle B'A'D'$, 起始位置点 A 在边 $A'B'$ 上, 点 B 在 $A'B'$ 所

在直线上，点 B 在点 A 的右侧，点 B' 在点 A' 的右侧，连接 AC 和 $A'C'$ ，将菱形 $ABCD$ 以 A 为旋转中心逆时针旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)。

- (1) 如图 1，若点 A 与 A' 重合，且 $\angle BAD = \angle B'A'D' = 90^\circ$ ，求证： $BB' = DD'$ ；

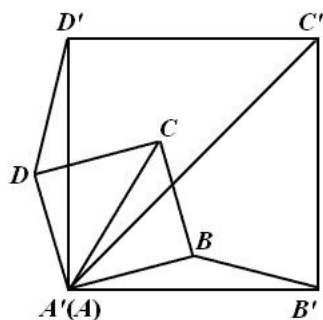


图1

- (2) 若点 A 与 A' 不重合， M 是 $A'C'$ 上一点，当 $MA' = MA$ 时，连接 BM 和 $A'C$ ， BM 和 $A'C$ 所在直线相交于点 P ；

- ①如图 2，当 $\angle BAD = \angle B'A'D' = 90^\circ$ 时，请猜想线段 BM 和线段 $A'C$ 的数量关系及 $\angle BPC$ 的度数；

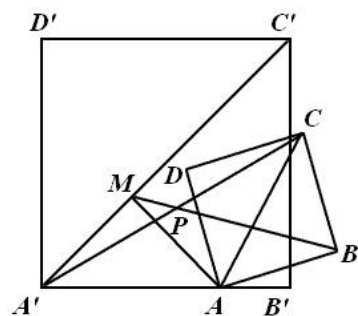


图2

- ②如图 3，当 $\angle BAD = \angle B'A'D' = 60^\circ$ 时，请求出线段 BM 和线段 $A'C$ 的数量关系及 $\angle BPC$ 的度数；

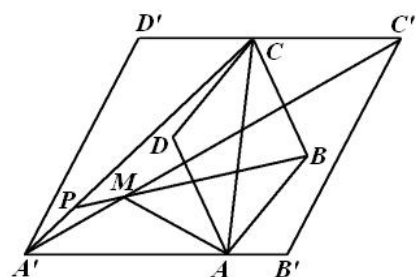


图3

- ③在②的条件下，若点 A 与 $A'B'$ 的中点重合， $A'B' = 4$ ， $AB = 2$ ，在整个旋转过程中，当点 P 与点 M 重合时，请直接写出线段 BM 的长。

【答案】 (1) 见详解； (2) ① $A'C = \sqrt{2} BM$ ， $\angle BPC = 45^\circ$ ； ② $A'C = \sqrt{3} BM$ ， $\angle BPC = 30^\circ$ ； ③ $1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 证明 $\triangle ADD' \cong \triangle BAB'$ (SAS) 可得结论；

(2) ①证明 $\triangle AA'C \sim \triangle MAB$, 可得结论;

②证明方法类似①, 即证明 $\triangle AA'C \sim \triangle MAB$ 即可得出结论;

③求出 $A'C$, 利用②中结论计算即可.

【详解】(1) 证明: 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 和菱形 $A'B'C'D'$ 中, $\because \angle BAD = \angle B'A'D' = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$, 四边形 $A'B'CD'$ 都是正方形,

$\therefore \angle DAB = \angle D'AB' = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAD' = \angle BAB'$,

$\because AD = AB, AD' = AB'$,

$\therefore \triangle ADD' \cong \triangle BAB' \text{ (SAS)},$

$\therefore DD' = BB'$;

(2) ①解: 如图 2 中, 结论: $A'C = \sqrt{2} BM, \angle BPC = 45^\circ$;

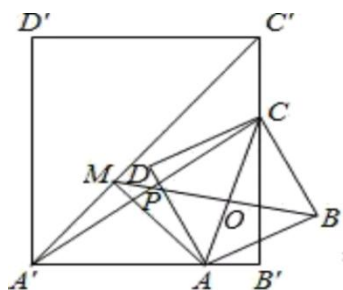


图2

理由: 设 AC 交 BP 于 O ,

$\because$ 四边形 $ABCD$, 四边形 $A'B'CD'$ 都是正方形,

$\therefore \angle MA'A = \angle DAC = 45^\circ$,

$\therefore \angle A'AC = \angle MAB$,

$\because MA' = MA$,

$\therefore \angle MA'A = \angle MAA' = 45^\circ$,

$\therefore \angle AMA' = 90^\circ$,

$\therefore AA' = \sqrt{2} AM$,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC = \sqrt{2} AB$,

$\therefore \frac{AA'}{AM} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$,

$\therefore \angle A'AC = \angle MAB$,

$\therefore \triangle AA'C \sim \triangle MAB$,

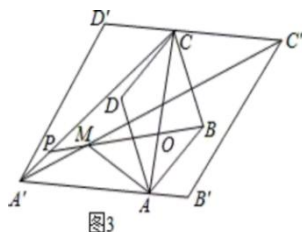
$$\therefore \frac{A'C}{BM} = \frac{AA'}{AM} = \sqrt{2}, \quad \angle A'CA = \angle ABM,$$

$$\therefore A'C = \sqrt{2} BM,$$

$$\because \angle AOB = \angle COP,$$

$$\therefore \angle CPO = \angle OAB = 45^\circ, \quad \text{即 } \angle BPC = 45^\circ;$$

②解: 如图 3 中, 设 AC 交 BP 于 O,



在菱形 ABCD 和菱形 A'B'C'D' 中, $\because \angle BAD = \angle B'A'D' = 60^\circ$,

$$\therefore \angle C'A'B' = \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A'AC = \angle MAB,$$

$$\because MA' = MA,$$

$$\therefore \angle MA'A = \angle MAA' = 30^\circ,$$

$$\therefore AA' = \sqrt{3} AM,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\because BA = BC, \angle CAB = 30^\circ$,

$$\therefore AC = \sqrt{3} AB,$$

$$\therefore \frac{AA'}{AM} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3},$$

$$\because \angle A'AC = \angle MAB,$$

$$\therefore \triangle A'AC \sim \triangle MAB,$$

$$\therefore \frac{A'C}{BM} = \frac{AA'}{AM} = \sqrt{3}, \quad \angle ACA' = \angle ABM,$$

$$\therefore A'C = \sqrt{3} BM,$$

$$\because \angle AOB = \angle COP,$$

$$\therefore \angle CPO = \angle OAB = 30^\circ, \quad \text{即 } \angle BPC = 30^\circ;$$

③如图 4 中, 过点 A 作 $AH \perp A'C$ 于 H,

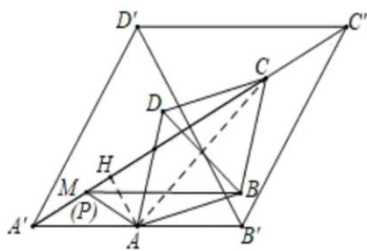


图4

由题意 $AB = BC = CD = AD = 2$, 可得 $AC = \sqrt{3} AB = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle A'AH$ 中, $A'H = \frac{1}{2} AA' = 1$, $A'H = \sqrt{3} AH = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中, $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{11}$,

$\therefore A'C = A'H + CH = \sqrt{3} + \sqrt{11}$,

由②可知, $A'C = \sqrt{3} BM$,

$\therefore BM = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$.

【点睛】本题属于四边形综合题, 考查了菱形的性质, 正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题, 属于中考压轴题.

26. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, A 点坐标为 $(-2, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + m$ 与抛物线交于 B, D 两点.

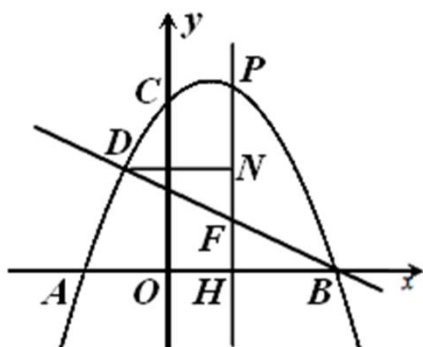


图1

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 求 m 的值和 D 点坐标;

(3) 点 P 是直线 BD 上方抛物线上的动点, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 H , 交直线 BD 于点 F , 过点 D 作 x 轴的平行线, 交 PH 于点 N , 当 N 是线段 PF 的三等分点时, 求 P 点坐标;

(4) 如图 2, Q 是 x 轴上一点, 其坐标为 $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$, 动点 M 从 A 出发, 沿 x 轴正方向以每秒 5 个单位的速度运动, 设 M 的运动时间为 t ($t > 0$), 连接 AD , 过 M 作 $MG \perp AD$ 于点 G , 以 MG 所在直线为对称轴, 线段 AQ 经轴对称变换后的图形为 $A'Q'$, 点 M 在运动过程中, 线段 $A'Q'$ 的位置也随之变化, 请直接写出运动过程中线段 $A'Q'$ 与抛物线有公共点时 t 的取值范围.

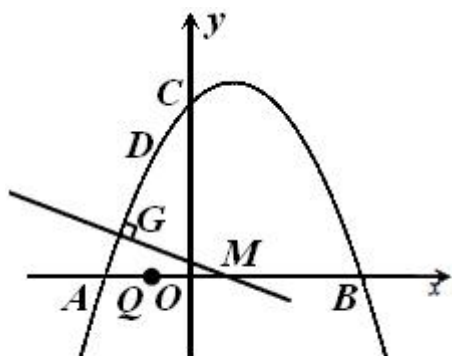


图 2

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$; (2) $m=2$, $D(-1, \frac{5}{2})$; (3) $P(\frac{5}{2}, \frac{27}{8})$ 或 $P(1, \frac{9}{2})$;

(4) $0 < t \leq \frac{261}{200}$.

【解析】

【分析】(1) 根据 A , C 两点坐标, 代入抛物线解析式, 利用待定系数法即可求解.

(2) 通过(1)中的二次函数解析式求出 B 点坐标, 代入一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + m$, 即可求出 m 的值, 联立二次函数与一次函数可求出 D 点坐标.

(3) 设出 P 点坐标, 通过 P 点坐标表示出 N , F 坐标, 再分类讨论 $PN=2NF$, $NF=2PN$, 即可求出 P 点(4)由 A , D 两点坐标求出 AD 的函数关系式, 因为以 MG 所在直线为对称轴, 线段 AQ 经轴对称变换后的图形为 $A'Q'$, 所以 $QQ' \parallel AD$, 即可求出 QQ' 的函数关系式, 设直线 QQ' 与抛物线交于第一象限 P 点, 所以当 Q' 与 P 重合时, t 有最大值, 利用中点坐标公式求出 PQ 中点 H 点坐标, 进而求出 MH 的函数关系式, 令 $y=0$ 求出函数与 x 轴交点坐标, 从而可求出 t 的值, 求出 t 的取值范围.

【详解】解: (1) $\because A(-2, 0)$, $C(0, 4)$

把 A, C 代入抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$,

$$\text{得: } \begin{cases} -\frac{1}{2} \times 4 - 2b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$$

$$(2) \text{ 令 } y=0 \text{ 即 } -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -2, \quad x_2 = 4$$

$$\therefore B(4, 0)$$

$$\text{把 } B(4, 0) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x + m$$

$$\text{得 } 0 = -\frac{1}{2} \times 4 + m$$

$$m = 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore B(4, 0), D(-1, \frac{5}{2})$$

$$\therefore m = 2, \quad D(-1, \frac{5}{2}).$$

$$(3) \text{ 设 } P(a, -\frac{1}{2}a^2 + a + 4), \text{ 则 } F(a, -\frac{1}{2}a + 2),$$

$$\therefore DN \perp PH,$$

$$\therefore N \text{ 点纵坐标等于 } D \text{ 点的纵坐标}$$

$$\therefore N(a, \frac{5}{2})$$

$$FN = \frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}a + 2) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, \quad PN = -\frac{1}{2}a^2 + a + 4 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}a^2 + a + \frac{3}{2},$$

$$\therefore N \text{ 是线段 } PF \text{ 的三等分点,}$$

$$\therefore \text{①当 } FN = 2PN \text{ 时,}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 2(-\frac{1}{2}a^2 + a + \frac{3}{2}),$$

解得: $a = \frac{5}{2}$ 或 $a = -1$ (舍去),

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{27}{8}\right).$$

②当 $2FN=PN$ 时,

$$2\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}a^2 + a + \frac{3}{2}\right),$$

得 $a=1$ 或 $a=-1$ (舍去),

$$\therefore P\left(1, \frac{9}{2}\right),$$

综上 P 点坐标为 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{27}{8}\right)$ 或 $P\left(1, \frac{9}{2}\right)$,

(4)由 (2) 问得 $D\left(-1, \frac{5}{2}\right)$, 又 $A(-2, 0)$,

设 AD: $y=kx+b$,

$$\begin{cases} -k+b=\frac{5}{2} \\ -2k+b=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=\frac{5}{2} \\ b=5 \end{cases},$$

$$\therefore \text{AD: } y=\frac{5}{2}x+5,$$

又 $GM \perp AD$,

$$\therefore \text{可设 GM: } y=-\frac{2}{5}x+p,$$

以 MG 所在直线为对称轴, 线段 AQ 经轴对称变换后的图形为 $A'Q'$,

$$\therefore QQ' \parallel AD,$$

$$\text{可设 } QQ': y=\frac{5}{2}x+q, \text{ 又 } Q\left(-\frac{4}{5}, 0\right), \text{ 代入 } QQ',$$

$$\text{得: } \frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + q = 0,$$

$$q=2,$$

$$\therefore QQ' : y = \frac{5}{2}x + 2,$$

设直线 QQ' 与抛物线交于第一象限 N 点,,所以当 Q' 与 N 点重合时,t 有最大值,

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{5}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = \frac{9}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -8 \end{cases},$$

$$\therefore N(1, \frac{9}{2}) \text{ 又 } Q(-\frac{4}{5}, 0),$$

设 H 为 N,Q 中点,

$$\text{则 } H(\frac{1}{10}, \frac{9}{4}),$$

又 $\therefore$ H 在直线 GM 上,

$$\therefore \text{把 H 代入 GM } y = -\frac{2}{5}x + p,$$

$$\text{得: } \frac{9}{4} = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + p,$$

$$p = \frac{229}{100},$$

$$\therefore y = -\frac{2}{5}x + \frac{229}{100},$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得: } 0 = -\frac{2}{5}x + \frac{229}{100},$$

$$\therefore x = \frac{229}{40},$$

$$\text{即 } QM = \frac{229}{40} + \frac{4}{5} = \frac{261}{40},$$

$\therefore$ M 的速度为 5,

$$\therefore t = \frac{261}{40} \div 5 = \frac{261}{200},$$

$$\therefore 0 < t \leq \frac{261}{200}.$$



【点睛】本题考查的是二次函数与一次函数的综合，属于压轴题，涉及到的知识点有，一次函数图像与性质，二次函数图像与性质，二次函数解析式的求法，二次函数与一次函数结合的坐标求法，翻折问题等，解题关键在于正确理解题意，仔细分析题目，通过相关条件得出等量关系求出结论.

试卷相关说明

本试卷的题干、答案和解析均由组卷网 (<http://zujuan.xkw.com>) 专业教师团队编校出品。

登录组卷网可对本试卷进行**单题组卷**、**细目表分析**、**布置作业**、**举一反三**等操作。

试卷地址: [在组卷网浏览本卷](#)

组卷网 (<http://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库, 拥有小初高全学科超千万精品试题。



微信关注组卷网, 了解更多组卷技能

学科网长期征集全国最新统考试卷、名校试卷、原创题, 赢取丰厚稿酬, 欢迎合作。

钱老师 QQ: 537008204 曹老师 QQ: 713000635

