

## 2019 年辽宁省丹东市中考数学试卷

### 一、选择题

1.  $-2019$  的倒数是 ( )

- A.  $-2019$                       B.  $-\frac{1}{2019}$                       C.  $\frac{1}{2019}$                       D.  $2019$

【答案】B

【解析】

【分析】

直接利用倒数的定义进而得出答案.

【详解】 $\because -2019 \times (-\frac{1}{2019}) = 1$ ,

$\therefore -2019$  的倒数  $-\frac{1}{2019}$ .

故选 B.

【点睛】此题主要考查了倒数, 正确把握倒数的定义是解题关键.

2. 十年来, 我国知识产权战略实施取得显著成就, 全国著作权登记量已达到 274.8 万件. 数据 274.8 万用科学记数法表示为 ( )

- A.  $2.748 \times 10^2$                       B.  $274.8 \times 10^4$                       C.  $2.748 \times 10^6$                       D.  $0.2748 \times 10^7$

【答案】C

【解析】

【分析】

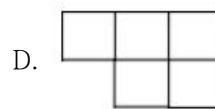
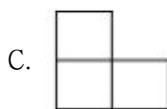
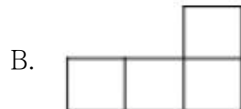
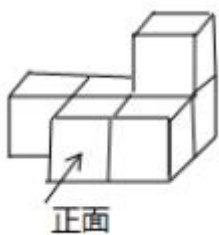
科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数. 确定  $n$  的值时, 要看把原数变成  $a$  时, 小数点移动了多少位,  $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 10$  时,  $n$  是正数; 当原数的绝对值  $< 1$  时,  $n$  是负数.

【详解】解: 数据 274.8 万用科学记数法表示为  $274.8 \times 10^4 = 2.748 \times 10^6$ .

故选 C.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数, 表示时关键要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值.

3. 如图所示的几何体是由六个小正方体组合而成的, 它的俯视图是 ( )



【答案】 D

【解析】

【分析】

根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：从上边看第一列是一个小正方形，第二列是两个小正方形，第三列是两个小正方形，故选:D.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，从上边看得到的图形是俯视图.

4. 下面计算正确的是 ( )

A.  $3a - 2a = 1$

B.  $2a^2 + 4a^2 = 6a^4$

C.  $(x^3)^2 = x^5$

D.  $x^8 \div x^2 = x^6$

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据各个选项中的式子可以计算出正确的结果，本题得以解决.

【详解】解：  $\because 3a - 2a = a$ ，故选项 A 错误；

$\because 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$ ，故选项 B 错误；

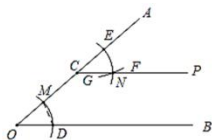
$\because (x^3)^2 = x^6$ ，故选项 C 错误；

$\because x^8 \div x^2 = x^6$ ，故选项 D 正确；

故选 D.

【点睛】本题考查整式的混合运算，解答本题的关键是明确整式混合运算的计算方法.

5. 如图，点 C 在  $\angle AOB$  的边 OA 上，用尺规作出了  $CP \parallel OB$ ，作图痕迹中， $\widehat{FG}$  是 ( )



- A. 以点 C 为圆心、OD 的长为半径的弧
- B. 以点 C 为圆心、DM 的长为半径的弧
- C. 以点 E 为圆心、DM 的长为半径的弧
- D. 以点 E 为圆心、OD 的长为半径的弧

【答案】C

【解析】

【分析】

根据平行线的判定，作一个角等于已知角的方法即可判断.

【详解】解：由作图可知作图步骤为：

- ①以点 O 为圆心，任意长为半径画弧 DM，分别交 OA，OB 于 M，D.
- ②以点 C 为圆心，以 OM 为半径画弧 EN，交 OA 于 E.
- ③以点 E 为圆心，以 DM 为半径画弧 FG，交弧 EN 于 N.
- ④过点 N 作射线 CP.

根据同位角相等两直线平行，可得  $CP \parallel OB$ .

故选 C.

【点睛】本题考查作图 - 复杂作图，平行线的判定等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

6. 在从小到大排列的五个整数中，中位数是 2，唯一的众数是 4，则这五个数之和的最大值是 ( )

- A. 11
- B. 12
- C. 13
- D. 14

【答案】A

【解析】

【分析】

根据中位数和众数的定义分析可得答案.

【详解】解：因为五个整数从小到大排列后，其中位数是 2，这组数据的唯一众数是 4.

所以这 5 个数据分别是  $x$ ， $y$ ，2，4，4，且  $x < y < 4$ ，

当这 5 个数的和最大时，整数  $x$ ， $y$  取最大值，此时  $x = 0$ ， $y = 1$ ，

所以这组数据可能的最大的和是  $0+1+2+4+4 = 11$ .

故选 A.

【点睛】主要考查了根据一组数据的中位数来确定数据的能力. 将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数. 注意: 找中位数的时候一定要先排好顺序, 然后再根据奇数和偶数个来确定中位数, 如果数据有奇数个, 则正中间的数字即为所求. 如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

7. 等腰三角形一边长为 2, 它的另外两条边的长度是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 6x + k = 0$  的两个实数根, 则  $k$  的值是 ( )

A. 8

B. 9

C. 8 或 9

D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】

根据一元二次方程的解法以及等腰三角形的性质即可求出答案.

【详解】解: ①当等腰三角形的底边为 2 时,  
此时关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 6x + k = 0$  的有两个相等实数根,

$$\therefore \Delta = 36 - 4k = 0,$$

$$\therefore k = 9,$$

此时两腰长为 3,

$$\therefore 2 + 3 > 3,$$

$\therefore k = 9$  满足题意,

②当等腰三角形的腰长为 2 时,

此时  $x = 2$  是方程  $x^2 - 6x + k = 0$  的其中一根,

代入得  $4 - 12 + k = 0$ ,

$$\therefore k = 8,$$

$$\therefore x^2 - 6x + 8 = 0$$

求出另外一根为:  $x = 4$ ,

$$\therefore 2 + 2 = 4,$$

$\therefore$  不能组成三角形,

综上所述,  $k = 9$ ,

故选 B.

【点睛】本题考查一元二次方程, 解题的关键是熟练运用一元二次方程的解法以及等腰三角形的性质.

8. 如图，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象过点  $(-2, 0)$ ，对称轴为直线  $x = 1$ 。有以下结论：

①  $abc > 0$ ;

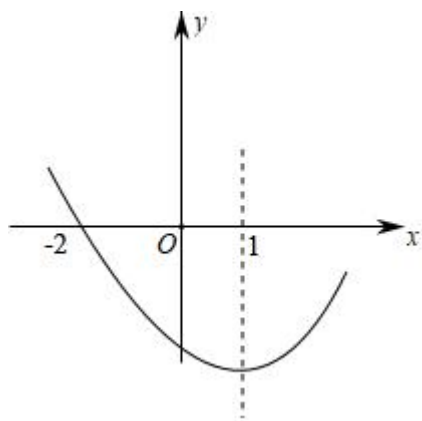
②  $8a + c > 0$ ;

③ 若  $A(x_1, m)$ ， $B(x_2, m)$  是抛物线上的两点，当  $x = x_1 + x_2$  时， $y = c$ ;

④ 点  $M$ ， $N$  是抛物线与  $x$  轴的两个交点，若在  $x$  轴下方的抛物线上存在一点  $P$ ，使得  $PM \perp PN$ ，则  $a$  的取值范围为  $a \geq 1$ ;

⑤ 若方程  $a(x+2)(4-x) = -2$  的两根为  $x_1, x_2$ ，且  $x_1 < x_2$ ，则  $-2 \leq x_1 < x_2 < 4$ 。

其中结论正确的有 ( )



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 A

【解析】

【分析】

① 由图象可知  $a > 0$ ， $c < 0$ ，根据对称轴  $-\frac{b}{2a} > 0$ ，得到  $b < 0$ ，即可判断；

② 由对称轴  $-\frac{b}{2a} = 1$  得， $b = -2a$ ，然后把  $x = -2$  代入解析式，整理后即可判断；

③ 根据抛物线的对称性，得  $x_1 + x_2 = 2$ ，然后把  $x = 2$  代入解析式，即可判断；

④ 由点  $M$ ， $N$  是抛物线与  $x$  轴的两个交点，则抛物线的顶点到  $x$  轴的距离不小于 3，则有  $\frac{4ac - b^2}{4a} \leq -3$ ，

结合②的结论，即可求得  $a$  的取值范围；

⑤ 由图像可知，与  $x$  轴的两个交点为  $(-2, 0)$ ， $(4, 0)$ ，此时  $y = 0$ ，则当  $y = 2$  时， $x_1 < -2 < 4 < x_2$ ，即可得到答案。

【详解】 解：① 由图象可知： $a > 0$ ， $c < 0$ ，

$$-\frac{b}{2a} > 0$$

$\therefore abc > 0$ , 故①正确;

② $\because$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ , 抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$$

$$\therefore b = -2a,$$

当  $x = -2$  时,  $y = 4a - 2b + c = 0$ ,

$$\therefore 4a + 4a + c = 0,$$

$$\therefore 8a + c = 0, \text{ 故②错误;}$$

③ $\because A(x_1, m), B(x_2, m)$  是抛物线上的两点,

由抛物线的对称性可知:  $x_1 + x_2 = 1 \times 2 = 2$ ,

$\therefore$  当  $x = 2$  时,  $y = 4a + 2b + c = 4a - 4a + c = c$ , 故③正确;

④由题意可知:  $M, N$  到对称轴的距离为 3,

当抛物线的顶点到  $x$  轴的距离不小于 3 时,

在  $x$  轴下方的抛物线上存在点  $P$ , 使得  $PM \perp PN$ ,

$$\text{即 } \frac{4ac - b^2}{4a} \leq -3,$$

$$\therefore 8a + c = 0,$$

$$\therefore c = -8a,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore \frac{4a \bullet (-8a) - (-2a)^2}{4a} \leq -3,$$

解得:  $a \geq \frac{1}{3}$ , 故④错误;

⑤易知抛物线与  $x$  轴的另外一个交点坐标为  $(4, 0)$ ,

$$\therefore y = ax^2 + bx + c = a(x+2)(x-4)$$

若方程  $a(x+2)(4-x) = -2$ ,

即方程  $a(x+2)(x-4) = 2$  的两根为  $x_1, x_2$ ,

则  $x_1, x_2$  为抛物线与直线  $y = 2$  的两个交点的横坐标,

$$\therefore x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 < -2 < 4 < x_2, \text{ 故⑤错误;}$$

故选 A.

【点睛】 本题考查二次函数, 解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质, 本题属于基础题型.

## 二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

9. 分解因式  $2x^3 - 8x^2 + 8x =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $2x(x-2)^2$

【解析】

【分析】

原式提取公因式，再利用完全平方公式分解即可.

【详解】解：原式  $= 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x(x-2)^2$ ,

故答案为  $2x(x-2)^2$

【点睛】此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

10. 函数  $y = \frac{\sqrt{1-2x}}{x}$  的自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \leq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 0$

【解析】

【分析】

【详解】根据题意得  $x \neq 0$  且  $1 - 2x \geq 0$ ,

所以  $x \leq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 0$ .

故答案为  $x \leq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 0$ .

11. 有 5 张无差别的卡片，上面分别标有  $-1$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , 从中随机抽取 1 张，则抽出的数是无理数的概率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】

先找出无理数的个数，再根据概率公式可得答案.

【详解】解：在  $-1$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  中，无理数有  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , 共 2 个，

则抽出的数是无理数的概率是  $\frac{2}{5}$ .

故答案为  $\frac{2}{5}$ .

【点睛】此题主要考查了概率公式和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：随机事件 A 的概率  $P(A) = \text{事件 A 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$ .

12. 关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} 2x-4>0 \\ a-x>-1 \end{cases}$  的解集是  $2 < x < 4$ ，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 3

【解析】

【分析】

分别求出不等式组中两个不等式的解集，根据题意得到关于  $a$  的方程，解之可得.

【详解】解：解不等式  $2x-4>0$ ，得：  $x>2$ ，

解不等式  $a-x>-1$ ，得：  $x<a+1$ ，

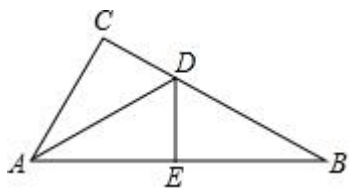
$\therefore$  不等式组的解集为  $2 < x < 4$ ，

$\therefore a+1=4$ ，即  $a=3$ ，

故答案为 3.

【点睛】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

13. 如图，在  $\triangle ABC$  中，  $\angle C=90^\circ$ ，  $DE$  是  $AB$  的垂直平分线，  $AD$  恰好平分  $\angle BAC$ ，若  $DE=1$ ，则  $BC$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】 3

【解析】

【分析】

根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等可得  $AD=BD$ ，再根据等边对等角的性质求出  $\angle DAB = \angle B$ ，然后根据角平分线的定义与直角三角形两锐角互余求出  $\angle B=30^\circ$ ，再根据直角三角形  $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半求出  $BD$ ，然后求解即可.

【详解】解： $\because AD$  平分  $\angle BAC$ ，且  $DE \perp AB$ ，  $\angle C=90^\circ$ ，

$\therefore CD=DE=1$ ，

$\because DE$  是  $AB$  的垂直平分线，

$\therefore AD=BD$ ，

$\therefore \angle B = \angle DAB$ ，

$\because \angle DAB = \angle CAD$ ，

$$\therefore \angle CAD = \angle DAB = \angle B,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle DAB + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

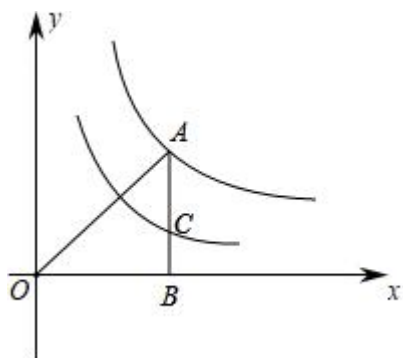
$$\therefore BD = 2DE = 2,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 1 + 2 = 3,$$

故答案为 3.

【点睛】 本题考查了角平分线的定义和性质，线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质，直角三角形  $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半的性质，属于基础题，熟记性质是解题的关键.

14. 如图，点 A 在双曲线  $y = \frac{6}{x}$  ( $x > 0$ ) 上，过点 A 作  $AB \perp x$  轴于点 B，点 C 在线段 AB 上且  $BC: CA = 1: 2$ ，双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) 经过点 C，则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .



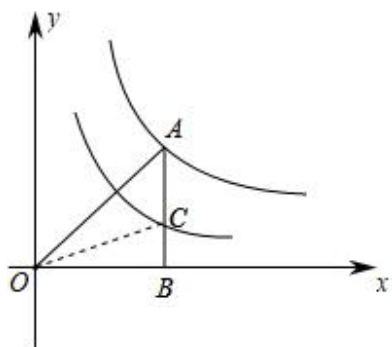
【答案】 2

【解析】

【分析】

根据反比例函数系数  $k$  的几何意义即可得到结论.

【详解】 解：连接 OC，



$\because$  点 A 在双曲线  $y = \frac{6}{x}$  ( $x > 0$ ) 上，过点 A 作  $AB \perp x$  轴于点 B，

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\because BC: CA = 1: 2,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = 3 \times \frac{1}{3} = 1,$$

$$\because \text{双曲线 } y = \frac{k}{x} \quad (x > 0) \text{ 经过点 } C,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} |k| = 1,$$

$$\therefore |k| = 2,$$

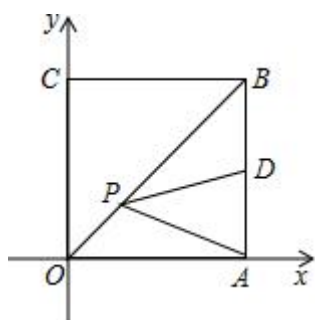
$$\because \text{双曲线 } y = \frac{k}{x} \quad (x > 0) \text{ 在第一象限},$$

$$\therefore k = 2,$$

故答案为 2.

【点睛】本题考查了反比例函数的图象与性质，反比例函数图象上点的坐标特征，反比例函数系数  $k$  的几何意义，熟练掌握反比例函数系数  $k$  的几何意义是解题的关键.

15. 如图，在平面直角坐标系中，点  $A$ 、 $C$  分别在  $x$  轴、 $y$  轴上，四边形  $ABCO$  是边长为 4 的正方形，点  $D$  为  $AB$  的中点，点  $P$  为  $OB$  上的一个动点，连接  $DP$ ， $AP$ ，当点  $P$  满足  $DP+AP$  的值最小时，直线  $AP$  的解析式为\_\_\_\_\_.



【答案】  $y = -2x+8$

【解析】

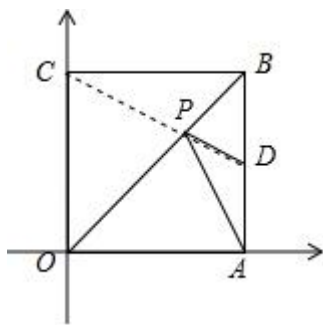
【分析】

根据正方形的性质得到点  $A$ 、 $C$  关于直线  $OB$  对称，连接  $CD$  交  $OB$  于  $P$ ，连接  $PA$ ， $PD$ ，则此时， $PD+AP$  的值最小，求得直线  $CD$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x+4$ ，由于直线  $OB$  的解析式为  $y=x$ ，解方程组得到  $P(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ ，由待定系数法即可得到结论.

【详解】解：  $\because$  四边形  $ABCO$  是正方形，

$\therefore$  点  $A$ 、 $C$  关于直线  $OB$  对称，

连接  $CD$  交  $OB$  于  $P$ ，连接  $PA$ ， $PD$ ，



则此时，PD+AP的值最小，

$$\because OC = OA = AB = 4,$$

$$\therefore C(0, 4), A(4, 0),$$

$\because D$  为  $AB$  的中点，

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore D(4, 2),$$

设直线  $CD$  的解析式为：  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 2 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{2}x + 4,$$

$\because$  直线  $OB$  的解析式为  $y = x$ ,

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = x \end{cases},$$

$$\text{解得: } x = y = \frac{8}{3},$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right),$$

设直线  $AP$  的解析式为：  $y = mx + n$ ,

$$\therefore \begin{cases} 4m + n = 0 \\ \frac{8}{3}m + n = \frac{8}{3} \end{cases},$$

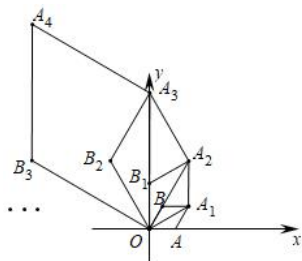
$$\text{解得: } \begin{cases} m = -2 \\ n = 8 \end{cases},$$

∴ 直线 AP 的解析式为  $y = -2x + 8$ ,

故答案为  $y = -2x + 8$ .

【点睛】 本题考查了正方形的性质，轴对称 - 最短路线问题，待定系数法求一次函数的解析式，正确的找出点 P 的位置是解题的关键.

16. 如图，在平面直角坐标系中， $OA = 1$ ，以  $OA$  为一边，在第一象限作菱形  $OAA_1B$ ，并使  $\angle AOB = 60^\circ$ ，再以对角线  $OA_1$  为一边，在如图所示的一侧作相同形状的菱形  $OA_1A_2B_1$ ，再依次作菱形  $OA_2A_3B_2$ ， $OA_3A_4B_3$ ，……，则过点  $B_{2018}$ ， $B_{2019}$ ， $A_{2019}$  的圆的圆心坐标为\_\_\_\_\_.



【答案】  $(-\sqrt{3})^{2018}, (\sqrt{3})^{2019})$

【解析】

【分析】

过  $A_1$  作  $A_1C \perp x$  轴于  $C$ ，由菱形的性质得到  $OA = AA_1 = 1$ ， $\angle A_1AC = \angle AOB = 60^\circ$ ，根据勾股定理得到  $OA_1 = \sqrt{OC^2 + A_1C^2} = \sqrt{3}$ ，求得  $\angle A_2B_1A_3 = 60^\circ$ ，解直角三角形得到  $B_1A_3 = 2\sqrt{3}$ ， $A_2A_3 = 3$ ，求得  $OA_3 = OB_1 + B_1A_3 = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$  得到菱形  $OA_2A_3B_2$  的边长  $= 3 = (\sqrt{3})^2$ ，设  $B_1A_3$  的中点为  $O_1$ ，连接  $O_1A_2$ ， $O_1B_2$ ，推出过点  $B_1$ ， $B_2$ ， $A_2$  的圆的圆心坐标为  $O_1(0, 2\sqrt{3})$ ，以此类推，于是得到结论.

【详解】 解：过  $A_1$  作  $A_1C \perp x$  轴于  $C$ ，

∵ 四边形  $OAA_1B$  是菱形，

∴  $OA = AA_1 = 1$ ， $\angle A_1AC = \angle AOB = 60^\circ$ ，

$$\therefore A_1C = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OC = OA + AC = \frac{3}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OA_1C \text{ 中, } OA_1 = \sqrt{OC^2 + A_1C^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OA_2C = \angle B_1A_2O = 30^\circ, \quad \angle A_3A_2O = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A_3A_2B_1 = 90^\circ,$$

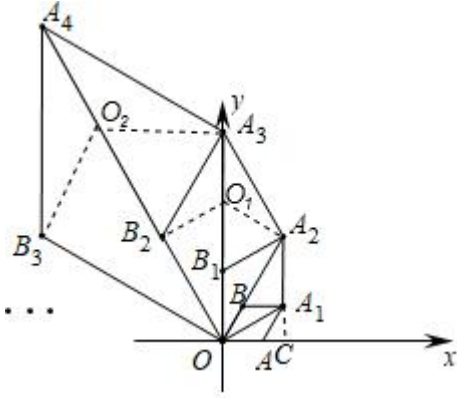
$$\therefore \angle A_2B_1A_3 = 60^\circ,$$

$$\therefore B_1A_3 = 2\sqrt{3}, \quad A_2A_3 = 3,$$

$$\therefore OA_3 = OB_1 + B_1A_3 = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$$

$$\therefore \text{菱形 } OA_2A_3B_2 \text{ 的边长} = 3 = (\sqrt{3})^2,$$

设  $B_1A_3$  的中点为  $O_1$ , 连接  $O_1A_2$ ,  $O_1B_2$ ,



$$\text{于是求得, } O_1A_2 = O_1B_2 = O_1B_1 = \sqrt{3} = (\sqrt{3})^1,$$

$$\therefore \text{过点 } B_1, B_2, A_2 \text{ 的圆的圆心坐标为 } O_1(0, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{菱形 } OA_3A_4B_3 \text{ 的边长为 } 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3,$$

$$\therefore OA_4 = 9 = (\sqrt{3})^4,$$

设  $B_2A_4$  的中点为  $O_2$ ,

连接  $O_2A_3$ ,  $O_2B_3$ ,

$$\text{同理可得, } O_2A_3 = O_2B_3 = O_2B_2 = 3 = (\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore \text{过点 } B_2, B_3, A_3 \text{ 的圆的圆心坐标为 } O_2(-3, 3\sqrt{3}), \cdots \text{以此类推, 菱形 } OA_{2019}A_{2020}B_{2019} \text{ 的边长为 } (\sqrt{3})$$

2019,

$$OA_{2020} = (\sqrt{3})^{2020},$$

设  $B_{2018}A_{2020}$  的中点为  $O_{2018}$ , 连接  $O_{2018}A_{2019}$ ,  $O_{2018}B_{2019}$ ,

$$\text{求得, } O_{2018}A_{2019} = O_{2018}B_{2019} = O_{2018}B_{2018} = (\sqrt{3})^{2018},$$

$\therefore$  点  $O_{2018}$  是过点  $B_{2018}$ ,  $B_{2019}$ ,  $A_{2019}$  的圆的圆心,

$$\therefore 2018 \div 12 = 168 \cdots 2,$$

$\therefore$  点  $O_{2018}$  在射线  $OB_2$  上,

$$\text{则点 } O_{2018} \text{ 的坐标为 } (- (\sqrt{3})^{2018}, (\sqrt{3})^{2019}),$$

即过点  $B_{2018}$ ,  $B_{2019}$ ,  $A_{2019}$  的圆的圆心坐标为:  $(-\left(\sqrt{3}\right)^{2018},\left(\sqrt{3}\right)^{2019})$ ,

故答案为  $(-\left(\sqrt{3}\right)^{2018},\left(\sqrt{3}\right)^{2019})$ .

【点睛】 本题考查了菱形的性质, 解直角三角形, 勾股定理, 正确的作出辅助线是解题的关键.

### 三、解答题 (本大题共 2 小题, 共 16 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 先化简, 再求代数式的值:  $\frac{2x}{x+1}-\frac{2x-4}{x^2-1} \div \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ , 其中  $x=3\cos 60^{\circ}$ .

【答案】  $\frac{2}{x+1}, \frac{4}{5}$ .

【解析】

【分析】

先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再利用锐角三角函数值得出  $x$  的值, 继而代入计算可得.

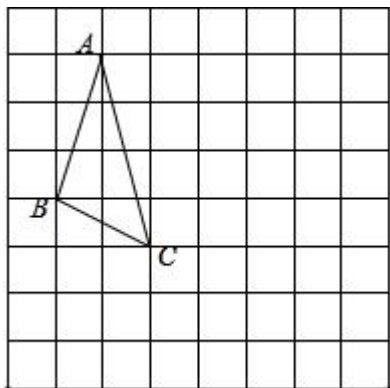
$$\begin{aligned} \text{【详解】解: 原式} &= \frac{2x}{x+1} - \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x-2} \\ &= \frac{2x}{x+1} - \frac{2x-2}{(x+1)} \\ &= \frac{2}{x+1}, \end{aligned}$$

当  $x=3\cos 60^{\circ}=3 \times \frac{1}{2}=\frac{3}{2}$  时,

$$\text{原式} = \frac{2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{4}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

18. 在下面的网格中, 每个小正方形的边长均为 1,  $\triangle ABC$  的三个顶点都是网格线的交点, 已知  $B$ ,  $C$  两点的坐标分别为  $(-3, 0)$ ,  $(-1, -1)$ .



(1) 请在图中画出平面直角坐标系, 并直接写出点  $A$  的坐标.

(2) 将  $\triangle ABC$  绕着坐标原点顺时针旋转  $90^{\circ}$ , 画出旋转后的  $\triangle A'B'C'$ .

(3) 接写出在上述旋转过程中，点 A 所经过的路径长.

**【答案】** (1) 见解析，A 点坐标为  $(-2, 3)$ ；(2) 见解析；(3) 点 A 所经过的路径长  $= \frac{\sqrt{13}}{2}\pi$ .

**【解析】**

**【分析】**

(1) 利用 B、C 点的坐标建立直角坐标系，然后写出 A 点坐标；

(2) 利用网格特点和旋转的性质画出 A、B、C 的对应点  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ ，从而得到  $\triangle A'B'C'$ ；

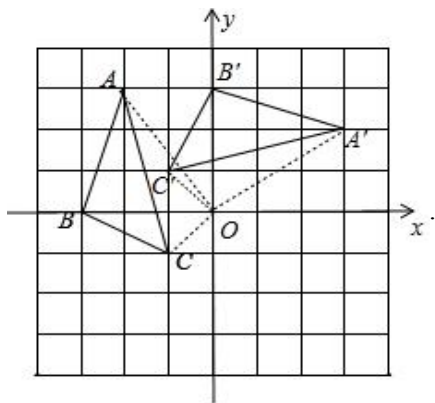
(3) 先利用勾股定理计算出 OA，然后利用弧长公式计算点 A 所经过的路径长.

**【详解】** 解：(1) 如图，A 点坐标为  $(-2, 3)$ ；

(2) 如图， $\triangle A'B'C'$  为所作；

(3) 如图， $OA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ，

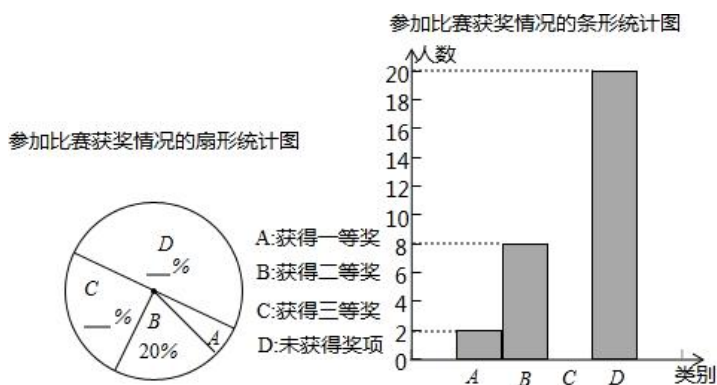
所以点 A 所经过的路径长  $= \frac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{13}}{180} = \frac{\sqrt{13}}{2}\pi$ .



**【点睛】** 本题考查了作图 - 旋转变换：根据旋转的性质可知，对应角都相等都等于旋转角，对应线段也相等，由此可以通过作相等的角，在角的边上截取相等的线段的方法，找到对应点，顺次连接得出旋转后的图形．也考查了弧长公式．

#### 四、解答题 (本大题共 2 小题，共 20 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 为纪念“五四运动”100 周年，某校举行了征文比赛，该校学生全部参加了比赛．比赛设置一等、二等、三等三个奖项，赛后该校对学生获奖情况做了抽样调查，并将所得数据绘制成如图所示的两幅不完整的统计图．根据图中信息解答下列问题：



- (1) 本次抽样调查学生的人数为\_\_\_\_\_.
- (2) 补全两个统计图, 并求出扇形统计图中 A 所对应扇形圆心角的度数.
- (3) 若该校共有 840 名学生, 请根据抽样调查结果估计获得三等奖的人数.

【答案】(1) 40; (2) 见解析,  $18^\circ$ ; (3) 获得三等奖的有 210 人.

【解析】

【分析】

- (1) 根据 B 的人数和所占的百分比可以求得本次抽样调查学生人数;
- (2) 根据统计图中的数据和 (1) 中的结果可以将统计图中所缺的数据补充完整并计算出扇形统计图中 A 所对应扇形圆心角的度数;
- (3) 根据统计图中的数据可以计算出获得三等奖的人数.

【详解】解: (1) 本次抽样调查学生的人数为:  $8 \div 20\% = 40$ ,  
故答案为 40;

(2) A 所占的百分比为:  $\frac{2}{40} \times 100\% = 5\%$ ,

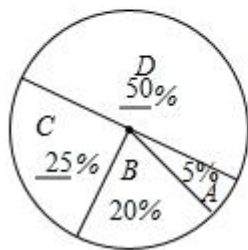
D 所占的百分比为:  $\frac{20}{40} \times 100\% = 50\%$ ,

C 所占的百分比为:  $1 - 5\% - 20\% - 50\% = 25\%$ ,

获得三等奖的人数为:  $40 \times 25\% = 10$ ,

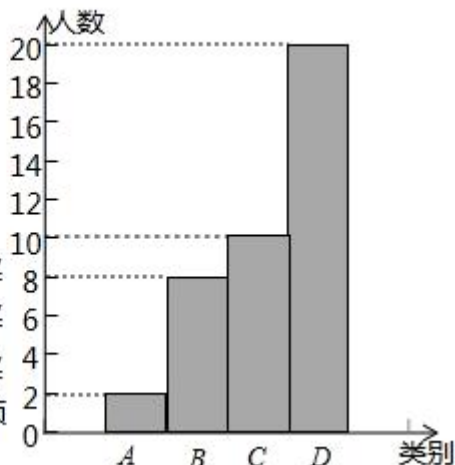
补全的统计图如图所示,

参加比赛获奖情况的扇形统计图



A: 获得一等奖  
B: 获得二等奖  
C: 获得三等奖  
D: 未获得奖项

参加比赛获奖情况的条形统计图



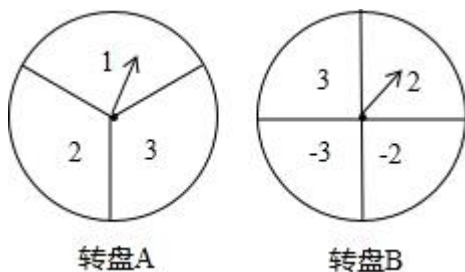
扇形统计图中 A 所对应扇形圆心角的度数是  $360^\circ \times 5\% = 18^\circ$ ；

(3)  $840 \times 25\% = 210$  (人)，

答：获得三等奖的有 210 人。

【点睛】本题考查条形统计图、扇形统计图、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

20. 如图所示，甲、乙两人在玩转盘游戏时，分别把转盘 A，B 分成 3 等份和 1 等份，并在每一份内标上数字。游戏规则：同时转动两个转盘，当转盘停止后，指针所在区域的数字之积为奇数时，甲获胜；当数字之积为偶数时，乙获胜。如果指针恰好在分割线上时，则需重新转动转盘。



(1) 利用画树状图或列表的方法，求甲获胜的概率。

(2) 这个游戏规则对甲、乙双方公平吗？若公平，请说明理由；若不公平，请你在转盘 A 上只修改一个数字使游戏公平（不需要说明理由）。

【答案】(1) 见解析，甲获胜概率为  $\frac{1}{3}$ ；(2) 这个游戏规则对甲、乙双方不公平，将转盘 A 上的数字 2 改为 1，则游戏公平。

【解析】

【分析】

(1) 列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式计算可得；

(2) 先计算出数字之积为偶数的概率，判断概率是否相等即可得知游戏是否公平。

【详解】解：（1）列表如下：

|   |    |    |   |   |
|---|----|----|---|---|
|   | -2 | -3 | 2 | 3 |
| 1 | -2 | -3 | 2 | 3 |
| 2 | -4 | -6 | 4 | 6 |
| 3 | -6 | -9 | 6 | 9 |

由表可知，共有 12 种等可能结果，其中指针所在区域的数字之积为奇数的有 4 种结果，

所以甲获胜概率为  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ；

（2） $\therefore$  指针所在区域的数字之积为偶数的概率为  $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore$  这个游戏规则对甲、乙双方不公平，

将转盘 A 上的数字 2 改为 1，则游戏公平.

【点睛】此题考查了游戏的公平性，判断游戏公平性就要计算每个事件的概率，概率相等就公平，否则就不公平，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

## 五、解答题（本大题共 2 小题，共 20 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

21. 甲、乙两同学的家与某科技馆的距离均为 4000m. 甲、乙两人同时从家出发去科技馆，甲同学先步行 800m，然后乘公交车，乙同学骑自行车. 已知乙骑自行车的速度是甲步行速度的 4 倍，公交车的速度是乙骑自行车速度的 2 倍，结果甲同学比乙同学晚到 2.5min. 求乙到达科技馆时，甲离科技馆还有多远.

【答案】乙到达科技馆时，甲离科技馆还有 1600m.

【解析】

【分析】

设甲步行的速度为  $x$  米/分，则乙骑自行车的速度为  $4x$  米/分，公交车的速度是  $8x$  米/分钟，根据题意列方程即可得到结论.

【详解】解：（1）设甲步行的速度为  $x$  米/分，则乙骑自行车的速度为  $4x$  米/分，公交车的速度是  $8x$  米/分钟，根据题意得：
$$\frac{4000}{4x} + 2.5 = \frac{800}{x} + \frac{4000 - 800}{8x}$$

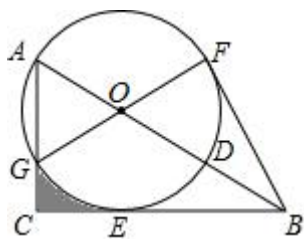
解得  $x = 80$ . 经检验， $x = 80$  是原分式方程的解.

所以  $2.5 \times 8 \times 80 = 1600$  (m)

答：乙到达科技馆时，甲离科技馆还有 1600m.

【点睛】 本题考查分式方程的应用，分析题意，找到合适的等量关系是解决问题的关键.

22. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点  $D$  在  $AB$  上，以  $AD$  为直径的  $\odot O$  与边  $BC$  相切于点  $E$ ，与边  $AC$  相交于点  $G$ ，且  $\widehat{AG} = \widehat{EG}$ ，连接  $GO$  并延长交  $\odot O$  于点  $F$ ，连接  $BF$



(1) 求证：①  $AO = AG$ ，②  $BF$  是  $\odot O$  的切线.

(2) 若  $BD = 6$ ，求图形中阴影部分的面积.

【答案】 (1) ①见解析；②见解析；(2)  $S_{\text{阴影}} = \frac{27\sqrt{3}}{2} - 6\pi$ .

【解析】

【分析】

(1) ①先利用切线的性质判断出  $\angle ACB = \angle OEB$ ，再用平行线结合弧相等判断出  $\angle AOG = \angle AGO$ ，即可得出结论；

②先判断出  $\triangle AOG$  是等边三角形，进而得出  $\angle BOF = \angle AOG = 60^\circ$ ，进而判断出  $\angle EOB = 60^\circ$ ，得出  $\triangle OFB \cong \triangle OEB$ ，得出  $\angle OFB = 90^\circ$ ，即可得出结论；

(2) 先判断出  $\angle ABC = 30^\circ$ ，进而得出  $OB = 2BE$ ，建立方程  $6+r = 2r$ ，继而求出  $AG = 6$ ， $AB = 18$ ， $AC = 9$ ， $CG = 3$ ，再判断出  $\triangle OGE$  是等边三角形，得出  $GE = OE = 6$ ，进而利用根据勾股定理求出  $CE = 3\sqrt{3}$ ，即可得出结论.

【详解】 解：(1) 证明：①如图 1，连接  $OE$ ，

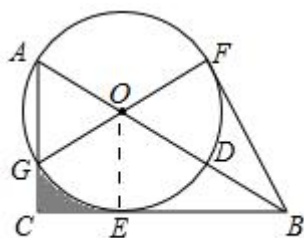


图1

$\because \odot O$  与  $BC$  相切于点  $E$ ,

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$ ,

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB = \angle OEB$ ,

$$\therefore AC \parallel OE,$$
$$\therefore \angle \text{GOE} = \angle \text{AGO},$$
$$\therefore \overline{AG} = \overline{EG},$$
$$\therefore \angle AOG = \angle GOE,$$
$$\therefore \angle AOG = \angle AGO,$$
$$\therefore \text{AO} = \text{AG};$$

②由①知,  $AO = AG$ ,

$$\therefore \text{AO} = \text{OG},$$
$$\therefore \angle \text{AO} = \text{OG} = \text{AG},$$

$\therefore \triangle AOG$  是等边三角形,

$$\therefore \angle AGO = \angle AOG = \angle A = 60^\circ,$$
$$\therefore \angle BOF = \angle AOG = 60^\circ,$$

由①知,  $\angle GOE = \angle AOG = 60^\circ$ ,

$$\therefore \angle EOB = 180^\circ - \angle AOG - \angle GOE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$
$$\therefore \angle \text{FOB} = \angle \text{EOB},$$
$$\because OF = OE, \quad OB = OB,$$
$$\therefore \triangle OFB \cong \triangle OEB \text{ (SAS),}$$
$$\therefore \angle OFB = \angle OEB = 90^\circ,$$
$$\therefore \text{OF} \perp \text{BF},$$

$\therefore OF$  是  $\odot O$  的半径,

$\therefore$  BF 是  $\odot O$  的切线;

(2) 如图 2, 连接 GE,

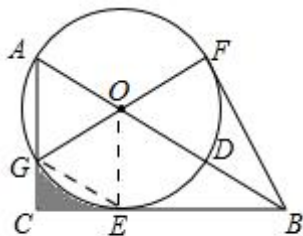


图 2

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$
$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 30^\circ,$$
$$\therefore \text{OB} = 2\text{BE},$$

设 $\odot O$ 的半径为 $r$ ,

$$\therefore OB = OD + BD,$$

$$\therefore 6 + r = 2r,$$

$$\therefore r = 6,$$

$$\therefore AG = OA = 6, \quad AB = 2r + BD = 18,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 9, \quad \therefore CG = AC - AG = 3,$$

由(1)知,  $\angle EOB = 60^\circ$ ,

$$\therefore OG = OE,$$

$\therefore \triangle OGE$ 是等边三角形,

$$\therefore GE = OE = 6,$$

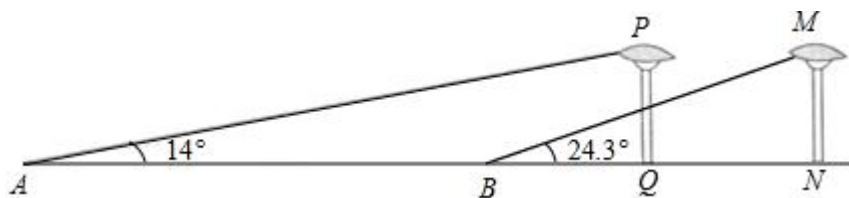
根据勾股定理得,  $CE = \sqrt{GE^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形 } GCEO} - S_{\text{扇形 } OGE} = \frac{1}{2} (6+3) \times 3\sqrt{3} - \frac{60\pi \cdot 6^2}{360} = \frac{27\sqrt{3}}{2} - 6\pi.$$

【点睛】此题是圆的综合题, 主要考查了切线的性质和判定, 勾股定理, 含 $30^\circ$ 角的直角三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 梯形和扇形的面积公式, 判断出 $\odot O$ 的半径是解本题的关键.

## 六、解答题 (本大题共2小题, 共20分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

23. 如图, 在某街道路边有相距10m、高度相同的两盏路灯 (灯杆垂直地面), 小明为了测量路灯的高度, 在地面A处测得路灯PQ的顶端仰角为 $14^\circ$ , 向前行走25m到达B处, 在地面测得路灯MN的顶端仰角为 $24.3^\circ$ , 已知点A, B, Q, N在同一条直线上, 请你利用所学知识帮助小明求出路灯的高度. (结果精确到0.1m. 参考数据:  $\sin 14^\circ \approx 0.24$ ,  $\cos 14^\circ \approx 0.97$ ,  $\tan 14^\circ \approx 0.25$ ,  $\sin 24.3^\circ \approx 0.41$ ,  $\cos 24.3^\circ \approx 0.91$ ,  $\tan 24.3^\circ \approx 0.45$ )



【答案】路灯的高度约为8.4m.

【解析】

【分析】

设 $PQ = MN = x$ m, 根据正切的定义分别用 $x$ 表示出 $AQ$ 、 $BN$ , 根据题意列式计算即可.

【详解】解：设  $PQ = MN = xm$ ,

在  $Rt\triangle APQ$  中,  $\tan A = \frac{PQ}{AQ}$ ,

$$\text{则 } AQ = \frac{x}{\tan A} \approx \frac{x}{0.25} = 4x,$$

在  $Rt\triangle MBN$  中,  $\tan \angle MBN = \frac{MN}{BN}$ ,

$$\text{则 } BN = \frac{MN}{\tan \angle MBN} \approx \frac{x}{0.45} = \frac{20}{9}x,$$

$$\therefore AQ + QN = AB + BN,$$

$$\therefore 4x + 10 = 25 + \frac{20}{9}x,$$

解得,  $x \approx 8.4$ ,

答: 路灯的高度约为 8.4m.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

24. 某服装超市购进单价为 30 元的童装若干件, 物价部门规定其销售单价不低于每件 30 元, 不高于每件 60 元. 销售一段时间后发现: 当销售单价为 60 元时, 平均每月销售量为 80 件, 而当销售单价每降低 10 元时, 平均每月能多售出 20 件. 同时, 在销售过程中, 每月还要支付其他费用 450 元. 设销售单价为  $x$  元, 平均月销售量为  $y$  件.

(1) 求出  $y$  与  $x$  的函数关系式, 并写出自变量  $x$  的取值范围.

(2) 当销售单价为多少元时, 销售这种童装每月可获利 1800 元?

(3) 当销售单价为多少元时, 销售这种童装每月获得利润最大? 最大利润是多少?

【答案】(1)  $y = -2x + 200$  ( $30 \leq x \leq 60$ ); (2) 当销售单价为 55 元时, 销售这种童装每月可获利 1800 元;

(3) 当销售单价为 60 元时, 销售这种童装每月获得利润最大, 最大利润是 1950 元.

【解析】

【分析】

(1) 当销售单价为 60 元时, 平均每月销售量为 80 件, 而当销售单价每降低 10 元时, 平均每月能多售出 20 件. 从而用 60 减去  $x$ , 再除以 10, 就是降价几个 10 元, 再乘以 20, 再把 80 加上就是平均月销售量;

(2) 利用 (售价 - 进价) 乘以平均月销售量, 再减去每月需要支付的其他费用, 让其等于 1800, 解方程即可;

(3) 由 (2) 方程式左边, 可得每月获得的利润函数, 写成顶点式, 再结合函数的自变量取值范围, 可求

得取最大利润时的  $x$  值及最大利润.

【详解】解: (1) 由题意得:  $y = 80 + 20 \times \frac{60-x}{10}$

$\therefore$  函数的关系式为:  $y = -2x + 200$  ( $30 \leq x \leq 60$ )

(2) 由题意得:

$$(x - 30)(-2x + 200) - 450 = 1800$$

解得  $x_1 = 55$ ,  $x_2 = 75$  (不符合题意, 舍去)

答: 当销售单价为 55 元时, 销售这种童装每月可获利 1800 元.

(3) 设每月获得的利润为  $w$  元, 由题意得:

$$w = (x - 30)(-2x + 200) - 450$$

$$= -2(x - 65)^2 + 2000$$

$$\therefore -2 < 0$$

$\therefore$  当  $x \leq 65$  时,  $w$  随  $x$  的增大而增大

$$\therefore 30 \leq x \leq 60$$

$$\therefore \text{当 } x = 60 \text{ 时, } w_{\text{最大}} = -2(60 - 65)^2 + 2000 = 1950$$

答: 当销售单价为 60 元时, 销售这种童装每月获得利润最大, 最大利润是 1950 元.

【点睛】本题综合考查了一次函数、一元二次方程、二次函数在实际问题中的应用, 具有较强的综合性.

## 七、解答题 (本大题共 1 小题, 共 12 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

25. 已知: 在  $\triangle ABC$  外分别以  $AB$ ,  $AC$  为边作  $\triangle AEB$  与  $\triangle AFC$ .

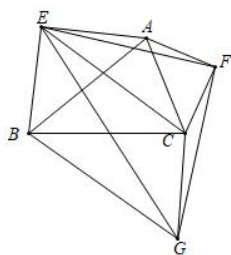


图1

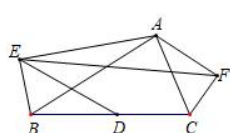


图2

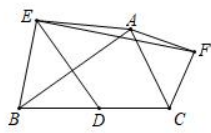


图3

(1) 如图 1,  $\triangle AEB$  与  $\triangle AFC$  分别是以  $AB$ ,  $AC$  为斜边的等腰直角三角形, 连接  $EF$ . 以  $EF$  为直角边构造  $\text{Rt}\triangle EFG$ , 且  $EF = FG$ , 连接  $BG$ ,  $CG$ ,  $EC$ .

求证: ①  $\triangle AEF \cong \triangle CGF$ ; ② 四边形  $BGCE$  是平行四边形.

(2) 小明受到图 1 的启发做了进一步探究:

如图 2, 在  $\triangle ABC$  外分别以  $AB$ ,  $AC$  为斜边作  $\text{Rt}\triangle AEB$  与  $\text{Rt}\triangle AFC$ , 并使  $\angle FAC = \angle EAB = 30^\circ$ , 取  $BC$

的中点  $D$ , 连接  $DE$ ,  $DF$  后发现, 两者间存在一定的数量关系且夹角度数一定, 请你帮助小明求出  $\frac{ED}{DF}$  的

值及  $\angle DEF$  的度数.

(3) 小颖受到启发也做了探究:

如图 3, 在  $\triangle ABC$  外分别以  $AB$ ,  $AC$  为底边作等腰三角形  $AEB$  和等腰三角形  $AFC$ , 并使  $\angle CAF + \angle EAB = 90^\circ$ , 取  $BC$  的中点  $D$ , 连接  $DE$ ,  $EF$  后发现, 当给定  $\angle EAB = \alpha$  时, 两者间也存在一定的数量关系且夹角度数一定, 若  $AE = m$ ,  $AB = n$ , 请你帮助小颖用含  $m$ ,  $n$  的代数式直接写出  $\frac{ED}{EF}$  的值, 并用含  $\alpha$  的代数式直接表示  $\angle DEF$  的度数.

**【答案】** (1) ①见解析; ②见解析; (2)  $\frac{ED}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; (3)  $\cos \angle DEF = \frac{\sqrt{4m^2 - n^2}}{2m}$ .

**【解析】**

**【分析】**

(1) ①根据 SAS 即可证明三角形全等.

②想办法证明  $BE = CG$ ,  $BE \parallel CG$  即可.

(2) 如图 2 中, 延长  $ED$  到  $G$ , 使得  $DG = ED$ , 连接  $CG$ ,  $FG$ . 证明  $\triangle CGF \sim \triangle AEF$ , 推出  $\frac{FG}{FE} = \frac{FC}{FA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\angle CFG = \angle AFE$ , 推出  $\angle EFG = \angle CFG + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC = 90^\circ$ , 推出  $\tan \angle DEF = \frac{FG}{FE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 可得

$\angle DEF = 30^\circ$  即可解决问题.

(3) 如图 3 中, 延长  $ED$  到  $G$ , 使得  $DG = ED$ , 连接  $CG$ ,  $FG$ . 作  $EH \perp AB$  于  $H$ , 连接  $FD$ . 想办法证明  $\angle AEH = \angle DEF$ , 利用勾股定理求出  $EH$ , 即可解决问题.

**【详解】** (1) 证明: ①如图 1 中,

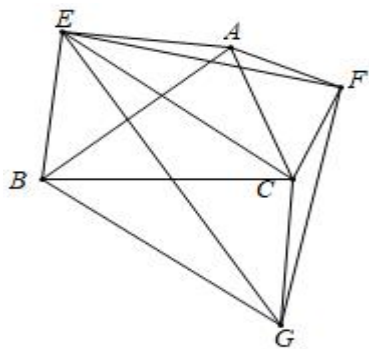


图1

$\therefore \triangle EFC$  与  $\triangle AFC$  都是等腰直角三角形,

$\therefore FA = FC$ ,  $FE = FG$ ,  $\angle AFC = \angle EFG = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AFE = \angle CFG$ ,

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CFG$  (SAS).

②  $\because \triangle AFE \cong \triangle CFG$ ,

$\therefore AE = CG, \angle AEF = \angle CGF$ ,

$\because \triangle AEB$  是等腰直角三角形,

$\therefore AE = BE, \angle BEA = 90^\circ$ ,

$\therefore CG = BE$ ,

$\because \triangle EFG$  是等腰直角三角形,

$\therefore \angle FEG = \angle FGE = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle AEF + \angle BEG = 45^\circ$ ,

$\because \angle CGE + \angle CGF = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle BEG = \angle CGE$ ,

$\therefore BE \parallel CG$ ,

$\therefore$  四边形 BECG 是平行四边形.

(2) 解: 如图 2 中, 延长 ED 到 G, 使得  $DG = ED$ , 连接 CG, FG.

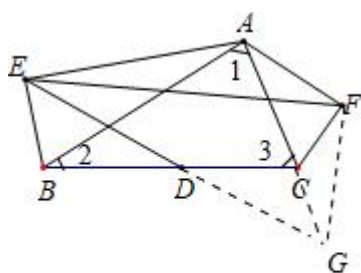


图2

$\because$  点 D 是 BC 的中点,

$\therefore BD = CD$ ,

$\because \angle EDB = \angle GDC$ ,

$\therefore EB = GC, \angle EBD = \angle GCD$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AEB$  与  $\text{Rt}\triangle AFC$  中,

$\because \angle EAB = \angle FAC = 30^\circ$ ,

$$\therefore \frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{FC}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{CG}{AE} = \frac{FC}{AF},$$

$\therefore \angle EBD = \angle 2 + 60^\circ$ ,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle DCG = \angle 2 + 60^\circ, \\
&\therefore \angle GCF = 360^\circ - 60^\circ - (\angle 2 + 60^\circ) - \angle 3 \\
&= 360^\circ - 120^\circ - (\angle 2 + \angle 3) \\
&= 360^\circ - 120^\circ - (180^\circ - \angle 1) \\
&= 60^\circ + \angle 1, \\
&\therefore \angle EAF = 30^\circ + \angle 1 + 30^\circ = 60^\circ + \angle 1, \\
&\therefore \angle GCF = \angle EAF, \\
&\therefore \triangle CGF \sim \triangle AEF, \\
&\therefore \frac{FG}{FE} = \frac{FC}{FA} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \angle CFG = \angle AFE, \\
&\therefore \angle EFG = \angle CFG + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC = 90^\circ, \\
&\therefore \tan \angle DEF = \frac{FG}{FE} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
&\therefore \angle DEF = 30^\circ, \\
&\therefore FG = \frac{1}{2} EG, \\
&\therefore ED = \frac{1}{2} EG, \\
&\therefore ED = FG, \\
&\therefore \frac{ED}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

(3) 如图 3 中, 延长 ED 到 G, 使得 DG = ED, 连接 CG, FG. 作 EH ⊥ AB 于 H, 连接 FD.

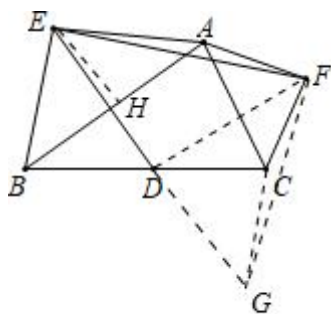


图3

$$\begin{aligned}
&\therefore BD = DC, \quad \angle BDE = \angle CDG, \quad DE = DG, \\
&\therefore \triangle CDG \cong \triangle BDE \quad (\text{SAS}), \\
&\therefore CG = BE = AE, \quad \angle DCG = \angle DBE = \alpha + \angle ABC, \\
&\therefore \angle GCF = 360^\circ - \angle DCG - \angle ACB - \angle ACF = 360^\circ - (\alpha + \angle ABC) - \angle ACB - (90^\circ - \alpha) = 270^\circ -
\end{aligned}$$

$$(\angle ABC + \angle ACB) = 270^\circ - (180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \angle BAC = \angle EAF,$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = GF, \angle AFE = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle CAF = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle AEH = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle DEF,$$

$$\therefore AE = m, AH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} n,$$

$$\therefore EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = \sqrt{m^2 - \frac{1}{4} n^2} = \frac{\sqrt{4m^2 - n^2}}{2},$$

$$\therefore DE = DG, EF = GF,$$

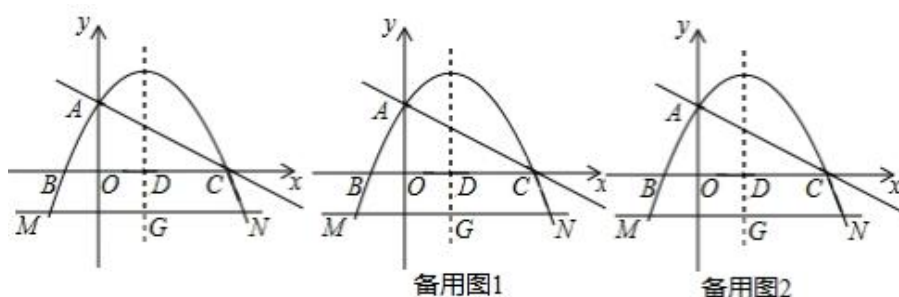
$$\therefore DF \perp EG,$$

$$\cos \angle DEF = \cos \angle AEH = \frac{EH}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{4m^2 - n^2}}{2}}{m} = \frac{\sqrt{4m^2 - n^2}}{2m}.$$

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形或相似三角形解决问题，属于中考压轴题.

八、解答题（本大题共 1 小题，共 14 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

26. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $B, C$  两点，与  $y$  轴交于点  $A$ ，直线  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  经过  $A, C$  两点，抛物线的对称轴与  $x$  轴交于点  $D$ ，直线  $MN$  与对称轴交于点  $G$ ，与抛物线交于  $M, N$  两点（点  $N$  在对称轴右侧），且  $MN \parallel x$  轴， $MN = 7$ .



(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 求点  $N$  的坐标.

(3) 过点 A 的直线与抛物线交于点 F, 当  $\tan \angle FAC = \frac{1}{2}$  时, 求点 F 的坐标.

(4) 过点 D 作直线 AC 的垂线, 交 AC 于点 H, 交 y 轴于点 K, 连接 CN,  $\triangle AHK$  沿射线 AC 以每秒 1 个单位长度的速度移动, 移动过程中  $\triangle AHK$  与四边形 DGNC 产生重叠, 设重叠面积为 S, 移动时间为 t ( $0 \leq t \leq \sqrt{5}$ ), 请直接写出 S 与 t 的函数关系式.

【答案】(1)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ; (2) 点 N 的坐标为 (5, -3); (3) 点 F 的坐标为: (3, 2) 或  $(\frac{17}{3}, -\frac{50}{9})$ ;

$$(4) S = \begin{cases} \frac{5}{4}t^2, & (0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}) \\ \frac{3\sqrt{5}}{2}t - \frac{9}{4}, & (\frac{3\sqrt{5}}{5} < t \leq \frac{3\sqrt{5}}{4}) \\ \frac{3\sqrt{5}}{10}t + \frac{9}{4}, & (\frac{3\sqrt{5}}{4} < t \leq \sqrt{5}) \end{cases}.$$

【解析】

【分析】

(1) 点 A、C 的坐标分别为 (0, 2)、(4, 0), 将点 A、C 坐标代入抛物线表达式即可求解;

(2) 抛物线的对称轴为:  $x = \frac{3}{2}$ , 点 N 的横坐标为:  $\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$ , 即可求解;

(3) 分点 F 在直线 AC 下方、点 F 在直线 AC 的上方两种情况, 分别求解即可;

(4) 分  $0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 、当  $\frac{3\sqrt{5}}{5} < t \leq \frac{3\sqrt{5}}{4}$ 、 $\frac{3\sqrt{5}}{4} < t \leq \sqrt{5}$  三种情况, 分别求解即可.

【详解】解: (1) 直线  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  经过 A、C 两点, 则点 A、C 的坐标分别为 (0, 2)、(4, 0),

则  $c = 2$ , 抛物线表达式为:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 2$ ,

将点 C 坐标代入上式并解得:  $b = \frac{3}{2}$ ,

故抛物线的表达式为:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \cdots \textcircled{1}$ ;

(2) 抛物线的对称轴为:  $x = \frac{3}{2}$ ,

点 N 的横坐标为:  $\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$ ,

故点 N 的坐标为 (5, -3);

(3)  $\because \tan \angle ACO = \frac{AO}{CO} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \tan \angle FAC = \frac{1}{2}$ ,

即  $\angle ACO = \angle FAC$ ,

①当点 F 在直线 AC 下方时,

设直线 AF 交 x 轴于点 R,

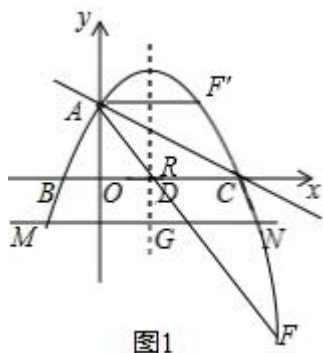


图1

$\because \angle ACO = \angle FAC$ , 则  $AR = CR$ ,

设点 R  $(r, 0)$ , 则  $r^2 + 4 = (r - 4)^2$ , 解得:  $r = \frac{3}{2}$ ,

即点 R 的坐标为:  $(\frac{3}{2}, 0)$ ,

将点 R、A 的坐标代入一次函数表达式:  $y = mx + n$  得: 
$$\begin{cases} n = 2 \\ \frac{3}{2}m + n = 0 \end{cases}$$

解得: 
$$\begin{cases} m = -\frac{4}{3} \\ n = 2 \end{cases}$$

故直线 AR 的表达式为:  $y = -\frac{4}{3}x + 2 \cdots \textcircled{2}$ ,

联立①②并解得:  $x = \frac{17}{3}$ , 故点 F  $(\frac{17}{3}, -\frac{50}{9})$ ;

②当点 F 在直线 AC 的上方时,

$\because \angle ACO = \angle F'AC$ ,  $\therefore AF' \parallel x$  轴,

则点 F'  $(3, 2)$ ;

综上, 点 F 的坐标为:  $(3, 2)$  或  $(\frac{17}{3}, -\frac{50}{9})$ ;

(4) 如图 2, 设  $\angle ACO = \alpha$ , 则  $\tan \alpha = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;

①当  $0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}$  时 (左侧图),

设  $\triangle AHK$  移动到  $\triangle A'H'K'$  的位置时, 直线  $H'K'$  分别交 x 轴于点 T、交抛物线对称轴于点 S,

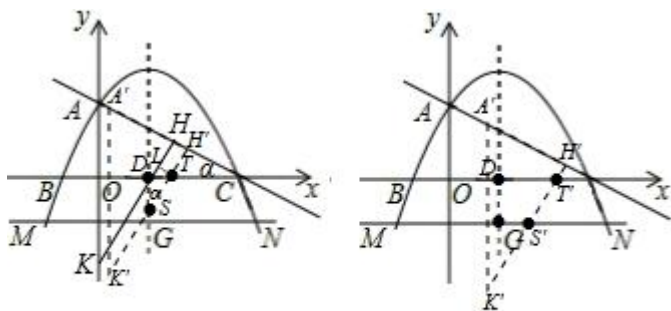


图2

则  $\angle DST = \angle ACO = \alpha$ , 过点 T 作  $TL \perp KH$ ,

则  $LT = HH' = t$ ,  $\angle LTD = \angle ACO = \alpha$ ,

$$\text{则 } DT = \frac{LT}{\cos \alpha} = \frac{HH'}{\cos \alpha} = \frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}t, \quad DS = \frac{DT}{\tan \alpha},$$

$$S = S_{\triangle DST} = \frac{1}{2} \times DT \times DS = \frac{5}{4}t^2;$$

②当  $\frac{3\sqrt{5}}{5} < t \leq \frac{3\sqrt{5}}{4}$  时 (右侧图),

同理可得:

$$S = S_{\text{梯形}DGS'T'} = \frac{1}{2} \times DG \times (GS' + DT') = \frac{1}{2} \times 3 + \left( \frac{\sqrt{5}}{2}t + \frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{3}{2} \right) = \frac{3\sqrt{5}}{2}t - \frac{9}{4};$$

③当  $\frac{3\sqrt{5}}{4} < t \leq \sqrt{5}$  时, 同理可得  $S = \frac{3\sqrt{5}}{10}t + \frac{9}{4}$ ;

$$\text{综上, } S = \begin{cases} \frac{5}{2}t^2, & \left( 0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{5}}{5} \right) \\ \frac{3\sqrt{5}}{2}t - \frac{9}{4}, & \left( \frac{3\sqrt{5}}{5} < t \leq \frac{3\sqrt{5}}{4} \right) \\ \frac{3\sqrt{5}}{10}t + \frac{9}{4}, & \left( \frac{3\sqrt{5}}{4} < t \leq \sqrt{5} \right) \end{cases}.$$

**【点睛】** 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数、图形平移、图形的面积计算等, 其中 (3)、(4), 要注意分类求解, 避免遗漏.

