

2021 年甘肃省白银市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题只有一个正确选项。

1. 【分析】根据倒数的定义进行答题.

【解答】解：设 3 的倒数是 a ，则 $3a = 1$ ，

解得， $a = \frac{1}{3}$.

故选：D.

【点评】主要考查倒数的概念及性质. 倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. 【分析】根据轴对称图形的概念判断求解.

【解答】解：A. 不是轴对称图形，故此选项不合题意；

B. 是轴对称图形，故此选项符合题意；

C. 不是轴对称图形，故此选项不合题意；

D. 不是轴对称图形，故此选项不合题意；

故选：B.

【点评】本题考查了轴对称图形，轴对称图形的判断方法：把某个图形沿某条直线折叠，如果图形的两部分能够重合，那么这个图形是轴对称图形.

3. 【分析】根据二次根式的加减法对 A、B 进行判断；根据二次根式的乘法法则对 C 进行判断；根据二次根式的除法法则对 D 进行判断.

【解答】解：A、原式 $= 2\sqrt{3}$ ，所以 A 选项的计算错误；

B、原式 $= 3\sqrt{5}$ ，所以 B 选项的计算错误；

C、原式 $= \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$ ，所以 C 选项的计算正确；

D、原式 $= \sqrt{32 \div 8} = \sqrt{4} = 2$ ，所以 D 选项的计算错误.

故选：C.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算，解题的关键是掌握二次根式的乘法和除法法则.

4. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：将 50 亿用科学记数法表示为 5×10^9 .

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

5. 【分析】根据“上加下减”的原则求解即可.

【解答】解：将直线 $y = 5x$ 向下平移 2 个单位长度，所得的函数解析式为 $y = 5x - 2$.

故选：A.

【点评】本题考查的是一次函数的图象与几何变换，熟知函数图象变换的法则是解答此题的关键.

6. 【分析】根据角的和差得到 $\angle ABF = 70^\circ$ ，再根据两直线平行，同位角相等即可得解.

【解答】解： $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CBF = 20^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABF = \angle ABC - \angle CBF = 70^\circ，$$

$$\because DE \parallel BF，$$

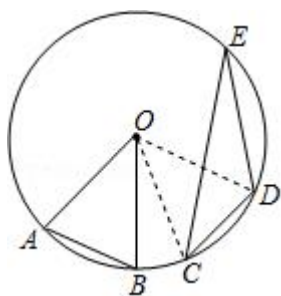
$$\therefore \angle ADE = \angle ABF = 70^\circ，$$

故选：A.

【点评】此题考查了平行线的性质，熟记平行线的性质定理是解题的关键.

7. 【分析】连接 OC 、 OD ，可得 $\angle AOB = \angle COD = 42^\circ$ ，由圆周角定理即可得 $\angle CED = \frac{1}{2} \angle COD = 21^\circ$.

【解答】解：连接 OC 、 OD ，



$$\because AB = CD，\angle AOB = 42^\circ，$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD = 42^\circ，$$

$$\therefore \angle CED = \frac{1}{2} \angle COD = 21^\circ .$$

故选：D.

【点评】本题主要考查圆心角、弧、弦三者的关系以及圆周角定理，解题的关键是掌握

圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.

8. 【分析】设共有 x 人, y 辆车, 根据“如果每 3 人坐一辆车, 那么有 2 辆空车; 如果每 2 人坐一辆车, 那么有 9 人需要步行”, 即可得出关于 x, y 的二元一次方程组, 此题得解.

【解答】解: 设共有 x 人, y 辆车,

依题意得:
$$\begin{cases} 3(y-2)=x \\ 2y+9=x \end{cases}.$$

故选: C.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组以及数学常识, 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组是解题的关键.

9. 【分析】根据 (m, n) 是“相随数对”得出 $9m+4n=0$, 再将原式化成 $9m+4n-2$, 最后整体代入求值即可.

【解答】解: $\because (m, n)$ 是“相随数对”,

$$\therefore \frac{m}{2} + \frac{n}{3} = \frac{m+n}{2+3},$$

$$\therefore \frac{3m+2n}{6} = \frac{m+n}{5},$$

即 $9m+4n=0$,

$$\therefore 3m+2[3m+(2n-1)]$$

$$= 3m+2[3m+2n-1]$$

$$= 3m+6m+4n-2$$

$$= 9m+4n-2$$

$$= 0-2$$

$$= -2,$$

故选: A.

【点评】本题考查代数式求值, 理解“相随数对”的意义是正确计算的关键.

10. 【分析】先根据 $AB=BC$ 结合图 2 得出 $AB=\sqrt{13}$, 进而利用勾股定理得, $AD^2+BD^2=13$, 再由运动结合 $\triangle ADM$ 的面积的变化, 得出点 M 和点 B 重合时, $\triangle ADM$ 的面积最大, 其值为 3, 即 $\frac{1}{2}AD \cdot BD=3$, 进而建立二元二次方程组求解, 即可得出结论.

【解答】解: 由图 2 知, $AB+BC=2\sqrt{13}$,

$\because AB=BC$,

$$\therefore AB = \sqrt{13},$$

$$\because AB = BC, BD \perp AC,$$

$$\therefore AC = 2AD, \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AD^2 + BD^2 = AB^2 = 13 \text{ ①},$$

设点 M 到 AC 的距离为 h ,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot h,$$

$\therefore$ 动点 M 从 A 点出发, 沿折线 $AB \rightarrow BC$ 方向运动,

$\therefore$ 当点 M 运动到点 B 时, $\triangle ADM$ 的面积最大, 即 $h = BD$,

由图 2 知, $\triangle ADM$ 的面积最大为 3,

$$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot BD = 3,$$

$$\therefore AD \cdot BD = 6 \text{ ②},$$

$$\text{①} + 2 \times \text{②} \text{ 得, } AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot BD = 13 + 2 \times 6 = 25,$$

$$\therefore (AD + BD)^2 = 25,$$

$$\therefore AD + BD = 5 \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore BD = 5 - AD \text{ ③},$$

$$\text{将 ③ 代入 ② 得, } AD(5 - AD) = 6,$$

$$\therefore AD = 3 \text{ 或 } AD = 2,$$

$$\because AD > BD,$$

$$\therefore AD = 3,$$

$$\therefore AC = 2AD = 6,$$

故选: B .

【点评】 此题主要考查了等腰三角形的性质, 三角形的面积公式, 判断出 $AB = \sqrt{13}$ 和点 M 和点 B 重合时, $\triangle ADM$ 的面积为 3 是解本题的关键.

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分。

11. **【分析】** 提取公因式进行因式分解.

$$\text{【解答】解: } 4m - 2m^2 = 2m(2 - m),$$

故答案为: $2m(2 - m)$.

【点评】 本题考查提公因式法进行因式分解, 掌握提取公因式的技巧准确计算是解题关键.

12. 【分析】根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、系数化为1可得.

【解答】解：移项，得： $\frac{1}{3}x > 1 + \frac{1}{2}$,

合并同类项，得： $\frac{1}{3}x > \frac{3}{2}$,

系数化为1，得： $x > \frac{9}{2}$,

故答案为： $x > \frac{9}{2}$.

【点评】本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数，不等号方向要改变.

13. 【分析】根据根的判别式 $\Delta = 0$ ，即可得出关于 k 的一元一次方程，解之即可得出 k 值.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k = 0,$$

解得： $k = 1$.

故答案为：1.

【点评】本题考查了根的判别式，牢记“当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根”是解题的关键.

14. 【分析】根据众数的定义就可解决问题.

【解答】解： 36.6°C 出现的次数最多有4次，所以众数是 36.6°C .

故答案为： 36.6 .

【点评】本题主要考查了众数的定义，正确理解众数的意义是解决本题的关键.

15. 【分析】先利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，求出 AD 长，再根据矩形的性质得出 $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^{\circ}$ ，然后解直角三角形 ABE 即可.

【解答】解： $\because \angle AED = 90^{\circ}$ ， F 是 AD 边的中点， $EF = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore AD = 2EF = 8\text{cm},$$

$$\because \angle EAD = 30^{\circ},$$

$$\therefore AE = AD \cdot \cos 30^{\circ} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{cm},$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC, \angle B = 90^{\circ},$$

$$\therefore \angle BEA = \angle EAD = 30^{\circ},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

$$BE = AE \cdot \cos \angle BEA = 4\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)},$$

故答案为：6.

【点评】本题考查了矩形的性质直角三角形斜边上的中线以及解直角三角形，关键是利用直角三角形斜边上的中线求出 AD 的长.

16. 【分析】反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ 的图象在一、三象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，判断出 y 的值的的大小关系.

【解答】解：∵ $k = a^2 + 1 > 0$,

∴ 反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ 的图象在一、三象限，且在每个象限内 y 随 x 的增大而减小，

∵ 点 $A(-3, y_1)$, $B(-4, y_2)$ 同在第三象限，且 $-3 > -4$,

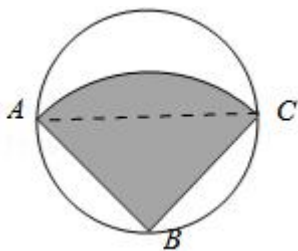
∴ $y_1 < y_2$,

故答案为：<.

【点评】本题考查反比例函数的图象和性质，掌握反比例函数的增减性是解决问题的关键，

17. 【分析】连接 AC ，根据圆周角定理得出 AC 为圆的直径，解直角三角形求出 AB ，根据扇形面积公式求出即可.

【解答】解：连接 AC ,



∵ 从一块直径为 $4dm$ 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形，即 $\angle ABC = 90^\circ$,

∴ AC 为直径，即 $AC = 4dm$, $AB = BC$ (扇形的半径相等),

∴ $AB^2 + BC^2 = 2^2$,

∴ $AB = BC = 2\sqrt{2}dm$,

∴ 阴影部分的面积是 $\frac{90 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{360} = 2\pi \text{ (dm}^2\text{)}.$

故答案为： 2π .

【点评】本题考查了圆周角定理和扇形的面积计算，能熟记扇形的面积公式是解此题的关键.

18. 【分析】根据已知的式子可以得到每个式子的第一项中 a 的次数是式子的序号；第二项的符号：第奇数项是正号，第偶数项是负号；第二项中 b 的次数是序号的 2 倍减 1，据此即可写出.

【解答】解：观察代数式，得到第 n 个式子是： $a^n + (-1)^{n+1} \cdot 2b^{2n-1}$.

故答案为： $a^n + (-1)^{n+1} \cdot 2b^{2n-1}$.

【点评】本题考查了探索规律，根据所排列的代数式，总结出规律是解题的关键.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 26 分。解答时，应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

19. 【分析】根据零指数幂，负整数指数幂，特殊角的三角函数值计算即可.

【解答】解：原式 $= 1 + 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= 3 - \sqrt{2}$.

【点评】本题考查了零指数幂，负整数指数幂，特殊角的三角函数值，牢记 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$) 是解题的关键.

20. 【分析】首先将分式的分子与分母进行分解因式进而化简，再将 x 的值代入求出答案.

【解答】解：原式 $= \left(\frac{2x-4}{x-2} - \frac{2x}{x-2} \right) \cdot \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{-4}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x+2} = -\frac{4}{x+2}$,
 当 $x=4$ 时，原式 $= -\frac{4}{4+2} = -\frac{2}{3}$.

【点评】此题主要考查了分式的化简求值，正确分解因式是解题关键.

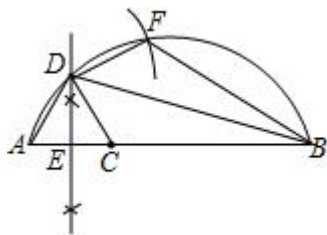
21. 【分析】(1) ①根据要求作出图形即可.

②根据要求作出图形即可.

(2) 证明 $\triangle DFB \cong \triangle DCB$ 可得结论.

【解答】解：(1) ①如图，直线 DE ，线段 AD ，线段 CD 即为所求.

②如图，点 F ，线段 CD ， BD ， BF 即为所求作.



(2) 结论： $BF = BC$.

理由：∵ DE 垂直平分线段 AC ,

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\therefore DF = DC, \widehat{AD} = \widehat{DF},$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DBF,$$

$$\therefore \angle DFB + \angle DAC = 180^\circ, \angle DCB + \angle DCA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle DCB,$$

在 $\triangle DFB$ 和 $\triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} \angle DFB = \angle DCB \\ \angle DBF = \angle DBC, \\ DF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DFB \cong \triangle DCB (AAS),$$

$$\therefore BF = BC.$$

【点评】 本题考查作图 - 复杂作图, 线段的垂直平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 圆周角定理等知识, 解题的关键是熟练掌握五种基本作图, 正确寻找全等三角形解决问题.

22. **【分析】** 设 $CD = x \text{ cm}$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 可得出 $AD = \frac{CD}{\tan \angle CAD}$, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

$$BD = \frac{CD}{\tan \angle CBD}, \text{ 再由 } AD + BD = AB, \text{ 列式计算即可得出答案.}$$

【解答】 解: 设 $CD = x \text{ m}$,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD = \frac{CD}{\tan \angle CAD} = \frac{x}{\tan 42^\circ} = \frac{x}{0.9},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } BD = \frac{CD}{\tan \angle CBD} = \frac{x}{\tan 58^\circ} = \frac{x}{1.6},$$

$$\therefore AD + BD = AB,$$

$$\therefore \frac{x}{0.9} + \frac{x}{1.6} = 58,$$

解得, $x \approx 33.4$.

答: 宝塔的高度约为 33.4 m .

【点评】 本题主要考查了解直角三角形的应用, 熟练掌握解直角三角形的方法进行计算是解决本题的关键.

23. **【分析】** (1) 设白球有 x 个, 根据多次摸球试验后发现, 摸到红球的频率稳定在 0.75 左

右可估计摸到红球的概率为 0.75，据此利用概率公式列出关于 x 的方程，解之即可；

(2) 画树状图列出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可。

【解答】解：(1) $\because$ 通过多次摸球试验后发现，摸到红球的频率稳定在 0.75 左右，

$\therefore$ 估计摸到红球的概率为 0.75，

设白球有 x 个，

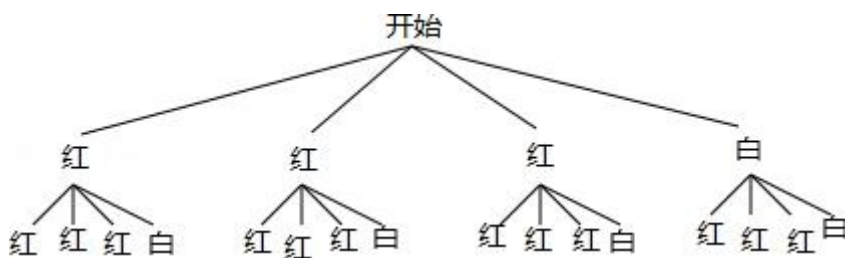
根据题意，得：
$$\frac{3}{3+x} = 0.75,$$

解得 $x = 1$ ，

经检验 $x = 1$ 是分式方程的解，

$\therefore$ 估计箱子里白色小球的个数为 1；

(2) 画树状图为：



共有 16 种等可能的结果数，其中两次摸出的球恰好颜色不同的结果数为 6，

$\therefore$ 两次摸出的小球颜色恰好不同的概率为 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ 。

【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求事件 A 或 B 的概率。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 40 分。解答时，应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

24. **【分析】**(1) 由 B 等级人数及其所占百分比可得被调查的总人数，总人数乘以 A 等级对应百分比可得 m 的值；

(2) 总人数乘以 C 等级人数所占百分比求出其人数即可补全图形；

(3) 根据中位数的定义求解即可；

(4) 总人数乘以样本中 D 、 E 等级人数和所占比例即可。

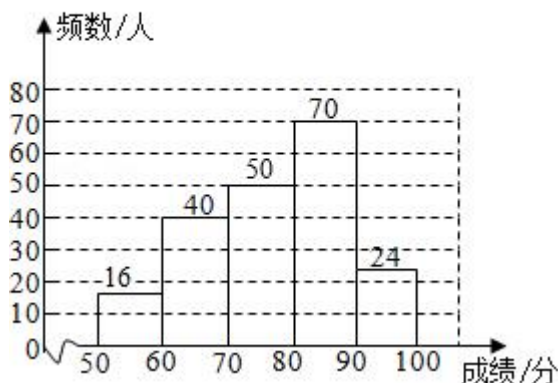
【解答】解：(1) 一共调查学生人数为 $40 \div 20\% = 200$ (人)， A 等级人数 $m = 200 \times 8\% = 16$ (人)，

故答案为：200，16；

(2) $\because C$ 等级人数为 $200 \times 25\% = 50$ (人)，

补全频数分布直方图如下：

学生成绩频数分布直方图



(3) 由于一共有 200 个数据，其中位数是第 100、101 个数据的平均数，而第 100、101 个数据都落在 C 等级，

所以所抽取学生成绩的中位数落在 C 等级；

故答案为： C 。

(4) 估计成绩优秀的学生有 $2000 \times \frac{70+24}{200} = 940$ (人)。

【点评】 本题考查频数分布直方图、扇形统计图、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

25. **【分析】** (1) 根据函数图象和题意可以求得小刚家与学校的距离为 $3000m$ ，小刚骑自行车的速度为 $200m/min$ ；

(2) 先求出小刚从图书馆返回家的时间，进而得出总时间，再利用待定系数法即可求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 把 $x = 35$ 代入 (2) 的结论解答即可。

【解答】 解：(1) 由题意得，小刚家与学校的距离为 $3000m$ ，
小刚骑自行车的速度为： $(5000 - 3000) \div 10 = 200$ (m/min)，
故答案为：3000；200；

(2) 小刚从图书馆返回家的时间： $5000 \div 200 = 25$ (min)，
总时间： $25 + 20 = 45$ (min)，

设小刚从图书馆返回家的过程中， y 与 x 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

把 $(20, 5000)$, $(45, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} 20k+b=5000 \\ 45k+b=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-200 \\ b=9000 \end{cases},$$

$$\therefore y = -200x + 9000 \quad (20 \leq x \leq 45);$$

(3) 小刚出发 35 分钟时, 即当 $x = 35$ 时,

$$y = -200 \times 35 + 9000 = 2000.$$

答: 此时他离家 $2000m$.

【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用该数形结合思想和分类讨论的数学思想解答.

26. **【分析】** (1) 由等腰三角形的性质与已知条件得出, $\angle OCA = \angle DCB$, 由圆周角定理可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 进而得到 $\angle OCD = 90^\circ$, 即可得出结论;

(2) 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{BD}{OB} = \frac{CD}{CE} = \frac{2}{3}$, 设 $BD = 2x$, 则 $OB = OC = 3x$,

$OD = OB + BD = 5x$, 在 $Rt\triangle OCD$ 中, 根据勾股定理求出 $x = 1$, 即 $\odot O$ 的半径为 3, 由平行线的性质得到 $\angle OCB = \angle EOC$, 在 $Rt\triangle OCE$ 中, 可求得 $\tan \angle EOC = 2$, 即 $\tan \angle OCB = 2$.

【解答】 (1) 证明: $\because OA = OC$,

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\because \angle DCB = \angle OAC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle DCB,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCA + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle OCB = 90^\circ,$$

即 $\angle OCD = 90^\circ$,

$$\therefore OC \perp DC,$$

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: $\because OE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{CD}{CE},$$

$$\because CD = 4, CE = 6,$$

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

设 $BD = 2x$, 则 $OB = OC = 3x$, $OD = OB + BD = 5x$,

$\because OC \perp DC$,

$\therefore \triangle OCD$ 是直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, $OC^2 + CD^2 = OD^2$,

$$\therefore (3x)^2 + 4^2 = (5x)^2,$$

解得, $x = 1$,

$\therefore OC = 3x = 3$, 即 $\odot O$ 的半径为 3,

$\because BC \parallel OE$,

$\therefore \angle OCB = \angle EOC$,

在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, $\tan \angle EOC = \frac{EC}{OC} = \frac{6}{3} = 2$,

$\therefore \tan \angle OCB = \tan \angle EOC = 2$.

【点评】 本题考查了圆周角定理、勾股定理、平行线的性质、等腰三角形的性质、切线的判定、三角函数、平行线分线段成比例定理等知识; 熟练掌握切线的判定与平行线分线段成比例定理是解题的关键.

27. **【分析】** (1) 根据矩形的性质得 $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$, 由等角的余角相等可得 $\angle ADE = \angle BAF$, 利用 AAS 可得 $\triangle ADE \cong \triangle BAF (AAS)$, 由全等三角形的性质得 $AD = AB$, 即可得四边形 $ABCD$ 是正方形;

(2) 利用 AAS 可得 $\triangle ADE \cong \triangle BAF (AAS)$, 由全等三角形的性质得 $AE = BF$, 由已知 $BH = AE$ 可得 $BH = BF$, 根据线段垂直平分线的性质可得即可得 $AH = AF$, $\triangle AHF$ 是等腰三角形;

类比迁移: 延长 CB 到点 H , 使 $BH = AE = 6$, 连接 AH , 利用 SAS 可得 $\triangle DAE \cong \triangle ABH (SAS)$, 由全等三角形的性质得 $AH = DE$, $\angle AHB = \angle DEA = 60^\circ$, 由已知 $DE = AF$ 可得 $AH = AF$, 可得 $\triangle AHF$ 是等边三角形, 则 $AH = HF = HB + BF = AE + BF = 6 + 2 = 8$, 等量代换可得 $DE = AH = 8$.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle DAB = \angle B = 90^\circ$,

$\because DE \perp AF$,

$\therefore \angle DAB = \angle AGD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAF + \angle DAF = 90^\circ, \quad \angle ADE + \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BAF,$$

$$\because DE = AF,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = AB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形;

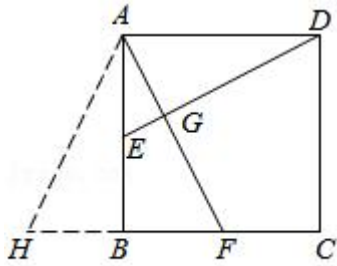


图1

(2) 解: $\triangle AHF$ 是等腰三角形,

理由: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle DAB = \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp AF,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle AGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAF = 90^\circ, \quad \angle ADE + \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BAF,$$

$$\because DE = AF,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\because DE = AF,$$

$$\therefore BH = AE,$$

$$\therefore BH = BF,$$

$$\because \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\therefore AH = AF,$$

$\therefore \triangle AHF$ 是等腰三角形;

类比迁移: 解: 延长 CB 到点 H , 使 $BH = AE = 6$, 连接 AH ,

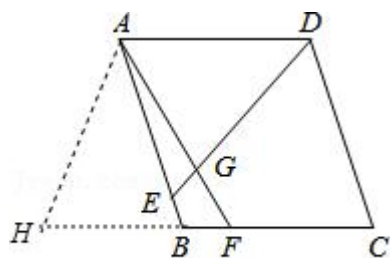


图2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD \parallel BC, AB = AD,$

$\therefore \angle ABH = \angle BAD,$

$\because BH = AE,$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ABH (SAS),$

$\therefore AH = DE, \angle AHB = \angle DEA = 60^\circ,$

$\because DE = AF,$

$\therefore AH = AF,$

$\therefore \triangle AHF$ 是等边三角形,

$\therefore AH = HF = HB + BF = AE + BF = 6 + 2 = 8,$

$\therefore DE = AH = 8.$

【点评】 本题属于四边形综合题, 考查了矩形的性质, 正方形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 等边三角形判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.

28. **【分析】** (1) 利用待定系数法求解即可.

(2) 求出点 D 的坐标, 可得结论.

(3) ①过点 H 作 $HM \perp EF$ 于 M , 证明 $\triangle EMH \cong \triangle FGB (AAS)$, 推出 $MH = GB$, $EM = FG$, 由 $HM = OG$, 可得 $OG = GB = \frac{1}{2}OB = 2$, 由题意直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$, 设 $E(a, -2a+8)$, $F(a, \frac{1}{2}a-2)$, 根据 $MH = BG$, 构建方程求解, 可得结论.

②因为 $\triangle PHB$ 的周长 $= PH + PB + HB = PC + 2 + PB + 5 = PC + PB + 7$, 所以要使得 $\triangle PHB$ 的周长最小, 只要 $PC + PB$ 的值最小, 因为 $PC + PB \geq BC$, 所以当点 P 在 BC 上时, $PC + PB = BC$ 的值最小.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 过 $A(0, -2)$, $B(4, 0)$ 两点,

$$\begin{aligned} \therefore & \begin{cases} c=-2 \\ 8+4b+c=0 \end{cases}, \\ \text{解得} & \begin{cases} b=-\frac{3}{2}, \\ c=-2 \end{cases} \\ \therefore & y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2. \end{aligned}$$

$$(2) \because B(4, 0), A(0, -2),$$

$$\therefore OB=4, OA=2,$$

$$\because GF \perp x \text{ 轴}, OA \perp x \text{ 轴},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOA \text{ 和 Rt}\triangle BGF \text{ 中}, \tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{GF}{GB},$$

$$\text{即 } \frac{2}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{GB},$$

$$\therefore GB=1,$$

$$\therefore OG = OB - GB = 4 - 1 = 3,$$

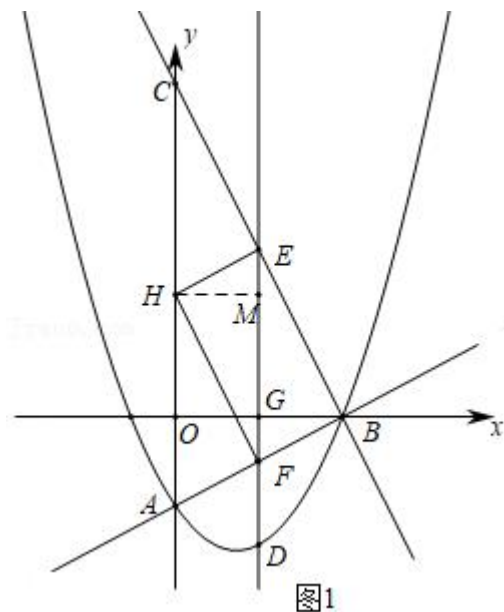
$$\text{当 } x=3 \text{ 时}, y_D = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{3}{2} \times 3 - 2 = -2,$$

$$\therefore D(3, -2), \text{ 即 } GD=2,$$

$$\therefore FD = GD - GF = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot BG = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{4}.$$

$$(3) \text{ ①如图 1 中, 过点 } H \text{ 作 } HM \perp EF \text{ 于 } M,$$



$\because$ 四边形 $BEHF$ 是矩形,

$\therefore EH \parallel BF, EH = BF,$

$\therefore \angle HEF = \angle BFE,$

$\because \angle EMH = \angle FGB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle EMH \cong \triangle FGB \text{ (AAS)},$

$\therefore MH = GB, EM = FG,$

$\because HM = OG,$

$\therefore OG = GB = \frac{1}{2}OB = 2,$

$\because A(0, -2), B(4, 0),$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2,$

设 $E(a, -2a+8), F(a, \frac{1}{2}a-2),$

由 $MH = BG$ 得到, $a - 0 = 4 - a,$

$\therefore a = 2,$

$\therefore E(2, 4), F(2, -1),$

$\therefore FG = 1,$

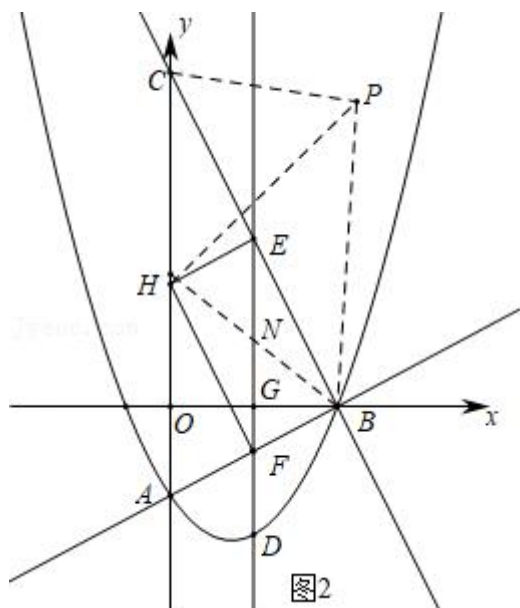
$\because EM = FG,$

$\therefore 4 - y_H = 1,$

$\therefore y_H = 3,$

$\therefore H(0, 3).$

②如图 2 中,



$$BH = \sqrt{OH^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because PH = PC + 2,$$

$$\therefore \triangle PHB \text{ 的周长} = PH + PB + HB = PC + 2 + PB + 5 = PC + PB + 7,$$

要使得 $\triangle PHB$ 的周长最小, 只要 $PC + PB$ 的值最小,

$$\because PC + PB \geq BC,$$

$\therefore$ 当点 P 在 BC 上时, $PC + PB = BC$ 的值最小,

$$\because BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle PHB \text{ 的周长的最小值为 } 4\sqrt{5} + 7.$$

【点评】 本题属于二次函数综合题, 考查了二次函数的性质, 一次函数的性质, 全等三角形的判定和性质, 矩形的判定和性质, 两点之间线段最短等知识, 解题的关键是学会寻找全等三角形解决问题, 学会利用参数构建方程解决问题, 属于中考压轴题.