

2019 年甘肃省白银市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题只有一个正确选项.

1. 【分析】分别判断各个几何体的形状，然后确定正确的选项即可.

【解答】解：A、该几何体为四棱柱，不符合题意；

B、该几何体为圆锥，不符合题意；

C、该几何体为三棱柱，符合题意；

D、该几何体为圆柱，不符合题意.

故选：C.

【点评】考查了认识立体图形的知识，解题的关键是能够认识各个几何体，难度不大.

2. 【分析】直接利用数轴结合 A, B 点位置进而得出答案.

【解答】解： $\because$ 数轴的单位长度为 1，如果点 A 表示的数是 -1，

$\therefore$ 点 B 表示的数是：3.

故选：D.

【点评】此题主要考查了实数轴，正确应用数形结合分析是解题关键.

3. 【分析】由于 $9 < 10 < 16$ ，于是 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ ，10 与 9 的距离小于 16 与 10 的距离，可得答案.

【解答】解： $\because 3^2 = 9, 4^2 = 16$,

$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4$,

10 与 9 的距离小于 16 与 10 的距离，

$\therefore$ 与 $\sqrt{10}$ 最接近的是 3.

故选：A.

【点评】本题考查了无理数的估算，解题关键是确定无理数的整数部分即可解决问题.

4. 【分析】由科学记数法知 $0.000000007 = 7 \times 10^{-9}$;

【解答】解： $0.000000007 = 7 \times 10^{-9}$;

故选：D.

【点评】本题考查科学记数法；熟练掌握科学记数法 $a \times 10^n$ 中 a 与 n 的意义是解题的关键.

5. 【分析】根据放大镜成像的特点，结合各变换的特点即可得出答案.

【解答】解：根据相似图形的定义知，用放大镜将图形放大，属于图形的形状相同，大小不相同，所以属于相似变换．

故选：B．

【点评】本题考查的是相似形的识别，关键要联系图形，根据相似图形的定义得出．

6. 【分析】根据多边形内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$ 即可求出结果．

【解答】解：黑色正五边形的内角和为： $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$ ，

故选：C．

【点评】本题考查了多边形的内角和公式，解题关键是牢记多边形的内角和公式．

7. 【分析】先去括号，然后移项、合并同类项，再系数化为1即可．

【解答】解：去括号，得 $2x+9 \geq 3x+6$ ，

移项，合并得 $-x \geq -3$

系数化为1，得 $x \leq 3$ ；

故选：A．

【点评】本题考查了解简单不等式的能力，解答这类题学生往往在解题时不注意移项要改变符号这一点而出错．

解不等式要依据不等式的基本性质，在不等式的两边同时加上或减去同一个数或整式不等号的方向不变；在不等式的两边同时乘以或除以同一个正数不等号的方向不变；在不等式的两边同时乘以或除以同一个负数不等号的方向改变．

8. 【分析】直接利用分式的加减运算法则计算得出答案．

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：} & \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \\ &= \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{y(x-y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}. \end{aligned}$$

故从第②步开始出现错误．

故选：B．

【点评】此题主要考查了分式的加减运算，正确掌握相关运算法则是解题关键．

9. 【分析】设圆心为O，连接OA、OB，如图，先证明△OAB为等腰直角三角形得到∠AOB

$= 90^\circ$ ，然后根据圆周角定理确定 $\angle ASB$ 的度数.

【解答】解：设圆心为 O ，连接 OA 、 OB ，如图，

$\because$ 弦 AB 的长度等于圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，

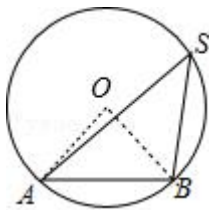
即 $AB = \sqrt{2}OA$ ，

$\therefore OA^2 + OB^2 = AB^2$ ，

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ASB = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ$.

故选：C.



【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.

10. 【分析】当 P 点在 AB 上运动时， $\triangle AOP$ 面积逐渐增大，当 P 点到达 B 点时，结合图象可得 $\triangle AOP$ 面积最大为 3，得到 AB 与 BC 的积为 12；当 P 点在 BC 上运动时， $\triangle AOP$ 面积逐渐减小，当 P 点到达 C 点时， $\triangle AOP$ 面积为 0，此时结合图象可知 P 点运动路径长为 7，得到 AB 与 BC 的和为 7，构造关于 AB 的一元二方程可求解.

【解答】解：当 P 点在 AB 上运动时， $\triangle AOP$ 面积逐渐增大，当 P 点到达 B 点时， $\triangle AOP$ 面积最大为 3.

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}BC = 3$ ，即 $AB \cdot BC = 12$.

当 P 点在 BC 上运动时， $\triangle AOP$ 面积逐渐减小，当 P 点到达 C 点时， $\triangle AOP$ 面积为 0，此时结合图象可知 P 点运动路径长为 7，

$\therefore AB + BC = 7$.

则 $BC = 7 - AB$ ，代入 $AB \cdot BC = 12$ ，得 $AB^2 - 7AB + 12 = 0$ ，解得 $AB = 4$ 或 3，

因为 $AB < AD$ ，即 $AB < BC$ ，

所以 $AB = 3$ ， $BC = 4$.

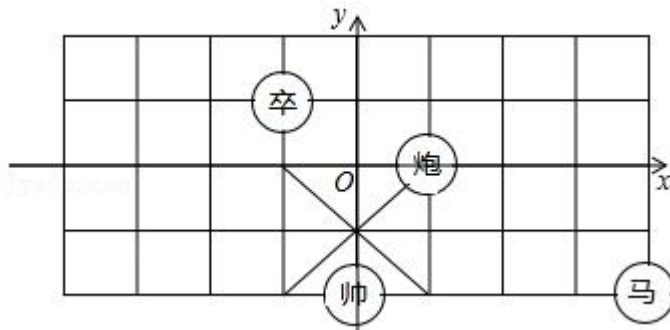
故选：B.

【点评】本题主要考查动点问题的函数图象，解题的关键是分析三角形面积随动点运动的变化过程，找到分界点极值，结合图象得到相关线段的具体数值.

二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

11. 【分析】直接利用“帅”位于点 $(0, -2)$ ，可得原点的位置，进而得出“卒”的坐标.

【解答】解：如图所示：可得原点位置，则“卒”位于 $(-1, 1)$.



故答案为： $(-1, 1)$.

【点评】本题考查了直角坐标系、点的坐标，解题的关键是确定坐标系的原点的位置.

12. 【分析】由于表中硬币出现“正面朝上”的频率在 0.5 左右波动，则根据频率估计概率可得到硬币出现“正面朝上”的概率.

【解答】解：因为表中硬币出现“正面朝上”的频率在 0.5 左右波动，
所以估计硬币出现“正面朝上”的概率为 0.5.

故答案为 0.5.

【点评】本题考查了利用频率估计概率：大量重复试验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个固定的近似值就是这个事件的概率. 用频率估计概率得到的是近似值，随实验次数的增多，值越来越精确.

13. 【分析】先提取公因式 x ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】解： $xy^2 - 4x$ ，
 $= x(y^2 - 4)$ ，
 $= x(y+2)(y-2)$.

【点评】本题主要考查提公因式法分解因式和利用平方差公式分解因式，熟记公式是解题的关键，难点在于要进行二次因式分解.

14. 【分析】要使方程有两个相等的实数根，即 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则利用根的判别式即可求得一次项的系数.

【解答】解：

由题意， $\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{m})^2 - 4 = 0$

得 $m = 4$

故答案为 4

【点评】此题主要考查一元二次方程的根的判别式，利用一元二次方程根的判别式（ $\Delta = b^2 - 4ac$ ）可以判断方程的根的情况：一元二次方程的根与根的判别式有如下关系：

①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根，但有 2 个共轭复根．上述结论反过来也成立．

15. 【分析】利用配方法整理即可得解．

【解答】解： $y = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$ ，

所以， $y = (x - 2)^2 + 1$ ．

故答案为： $y = (x - 2)^2 + 1$ ．

【点评】本题考查了二次函数的解析式有三种形式：

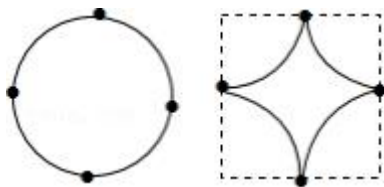
（1）一般式： $y = ax^2 + bx + c$ （ $a \neq 0$ ， a 、 b 、 c 为常数）；

（2）顶点式： $y = a(x - h)^2 + k$ ；

（3）交点式（与 x 轴）： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ．

16. 【分析】恒星的面积 = 边长为 2 的正方形面积 - 半径为 1 的圆的面积，依此列式计算即可．

【解答】解：如图：



新的正方形的边长为 $1 + 1 = 2$ ，

$\therefore$ 恒星的面积 $= 2 \times 2 - \pi = 4 - \pi$ ．

故答案为 $4 - \pi$ ．

【点评】本题考查了扇形面积的计算，关键是理解恒星的面积 = 边长为 2 的正方形面积 - 半径为 1 的圆的面积．

17. 【分析】可知等腰三角形的两底角相等，则可求得底角的度数．从而可求解．

【解答】解：

①当 $\angle A$ 为顶角时，等腰三角形两底角的度数为： $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$

$$\therefore \text{特征值 } k = \frac{80^\circ}{50^\circ} = \frac{8}{5}$$

②当 $\angle A$ 为底角时，顶角的度数为： $180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

$$\therefore \text{特征值 } k = \frac{20^\circ}{80^\circ} = \frac{1}{4}$$

综上所述，特征值 k 为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$

故答案为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$

【点评】 本题主要考查等腰三角形的性质，熟记等腰三角形的性质是解题的关键，要注意到本题中，已知 $\angle A$ 的度数，要分 $\angle A$ 是顶角和底角两种情况，以免造成答案的遗漏.

18. **【分析】** 由题意得出从第3个数开始，每个数均为前两个数的和，从而得出答案.

【解答】 解：由题意知第7个数是 $5a+8b$ ，第8个数是 $8a+13b$ ，第9个数是 $13a+21b$ ，
故答案为： $13a+21b$.

【点评】 本题主要考查数字的变化规律，解题的关键是得出从第3个数开始，每个数均为前两个数的和的规律.

三、解答题（一）：本大题共5小题，共38分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤

19. **【分析】** 先根据乘方的计算法则、绝对值的性质、零指数幂及特殊角的三角函数值分别计算出各数，再根据实数混合运算的法则进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解：} & (-2)^2 - |\sqrt{2} - 2| - 2\cos 45^\circ + (3 - \pi)^0, \\ & = 4 - (2 - \sqrt{2}) - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \\ & = 4 - 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1, \\ & = 3. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查的是实数的运算，熟知零指数幂的计算法则、绝对值的性质及特殊角的三角函数值是解答此题的关键.

20. **【分析】** 根据对话分别利用总钱数得出等式求出答案.

【解答】 解：设中性笔和笔记本的单价分别是 x 元、 y 元，根据题意可得：

$$\begin{cases} 12y + 20x = 112 \\ 12x + 20y = 144 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$,

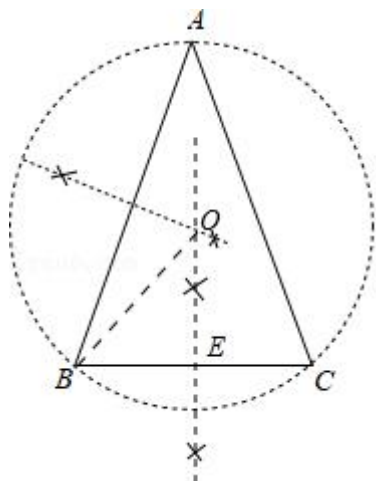
答：中性笔和笔记本的单价分别是2元、6元.

【点评】此题主要考查了二元一次方程组的应用，正确得出等量关系是解题关键．

21. 【分析】（1）作线段 AB ， BC 的垂直平分线，两线交于点 O ，以 O 为圆心， OB 为半径作 $\odot O$ ， $\odot O$ 即为所求．

（2）在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中，利用勾股定理求出 OB 即可解决问题．

【解答】解：（1）如图 $\odot O$ 即为所求．



（2）设线段 BC 的垂直平分线交 BC 于点 E ．

由题意 $OE = 4$ ， $BE = EC = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中， $OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

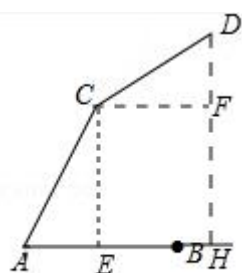
$$\therefore S_{\text{圆}O} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

故答案为 25π ．

【点评】本题考查作图 - 复杂作图，等腰三角形的性质，三角形的外接圆与外心等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

22. 【分析】如图，作 $CE \perp AB$ 于 E ， $DH \perp AB$ 于 H ， $CF \perp DH$ 于 F ．解直角三角形求出 $\angle DCF$ 即可判断．

【解答】解：如图，作 $CE \perp AB$ 于 E ， $DH \perp AB$ 于 H ， $CF \perp DH$ 于 F ．



图②

$$\therefore \angle CEH = \angle CFH = \angle FHE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CEHF$ 是矩形,

$\therefore CE = FH$,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $\because AC = 40\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore CE = AC \cdot \sin 60^\circ = 34.6 \text{ (cm)}$,

$\therefore FH = CE = 34.6 \text{ (cm)}$

$\therefore DH = 49.6\text{cm}$,

$\therefore DF = DH - FH = 49.6 - 34.6 = 15 \text{ (cm)}$,

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $\sin \angle DCF = \frac{DF}{CD} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle DCF = 30^\circ$,

$\therefore$ 此时台灯光线为最佳.

【点评】 本题考查解直角三角形的应用, 解题的关键是学会添加常用辅助线构造直角三角形解决问题, 属于中考常考题型.

23. **【分析】** (1) 由概率公式即可得出结果;

(2) 画出树状图, 共有 16 种等可能的结果, 李欣和张帆恰好选择同一线路游览的结果有 4 种, 由概率公式即可得出结果.

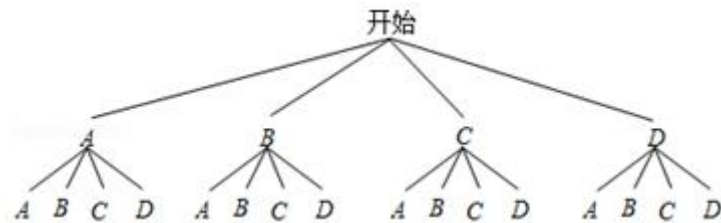
【解答】 解: (1) 在这四条线路任选一条, 每条被选中的可能性相同,

$\therefore$ 在四条线路中, 李欣选择线路 C. “园艺小清新之旅” 的概率是 $\frac{1}{4}$;

(2) 画树状图分析如下:

共有 16 种等可能的结果, 李欣和张帆恰好选择同一线路游览的结果有 4 种,

$\therefore$ 李欣和张帆恰好选择同一线路游览的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.



【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

四、解答题 (二): 本大题共 5 小题, 共 50 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

24. 【分析】(1) 根据已知数据及中位数和众数的概念求解可得；

(2) 利用样本估计总体思想求解可得；

(3) 答案不唯一，合理均可．

【解答】解：(1) 由题意知 $a = 11$ ， $b = 10$ ，

将七年级成绩重新排列为：59，70，71，73，75，75，75，75，76，77，79，79，80，
80，81，83，85，86，87，94，

$$\therefore \text{其中位数 } c = \frac{77+79}{2} = 78,$$

八年级成绩的众数 $d = 81$ ，

故答案为：11，10，78，81；

$$(2) \text{ 估计该校七、八两个年级学生在本次竞赛中成绩在 } 90 \text{ 分以上的共有 } 1200 \times \frac{1+2}{40} =$$

90 (人)；

(3) 八年级的总体水平较好，

$\therefore$ 七、八年级的平均成绩相等，而八年级的中位数大于七年级的中位数，

$\therefore$ 八年级得分高的人数相对较多，

$\therefore$ 八年级的学生对经典文化知识掌握的总体水平较好（答案不唯一，合理即可）．

【点评】本题考查了众数、中位数以及平均数，掌握众数、中位数以及平均数的定义是解题的关键．

25. 【分析】(1) 利用待定系数法即可求得；

(2) 根据图象可解．

【解答】解：(1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象与一次函数 $y = -x + b$ 的图象在第

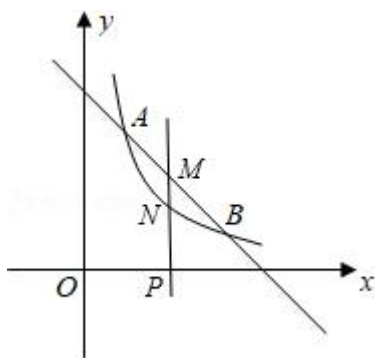
一象限交于 $A(1, 3)$ ， $B(3, 1)$ 两点，

$$\therefore 3 = \frac{k}{1}, 3 = -1 + b,$$

$$\therefore k = 3, b = 4,$$

$$\therefore \text{反比例函数和一次函数的表达式分别为 } y = \frac{3}{x}, y = -x + 4;$$

(2) 由图象可得：当 $1 < a < 3$ 时， $PM > PN$ ．



【点评】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，待定系数法求解析式，利用函数图象性质解决问题是本题的关键．

26. 【分析】(1) 连接 AD ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ， $\angle BAD = \angle B = 30^\circ$ ，求得 $\angle ADC = 60^\circ$ ，根据三角形的内角和得到 $\angle DAC = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ，于是得到 AC 是 $\odot D$ 的切线；

(2) 连接 AE ，推出 $\triangle ADE$ 是等边三角形，得到 $AE = DE$ ， $\angle AED = 60^\circ$ ，求得 $\angle EAC = \angle AED - \angle C = 30^\circ$ ，得到 $AE = CE = 2\sqrt{3}$ ，于是得到结论．

【解答】(1) 证明：连接 AD ，

$$\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore AC$ 是 $\odot D$ 的切线；

(2) 解：连接 AE ，

$$\because AD = DE, \angle ADE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，

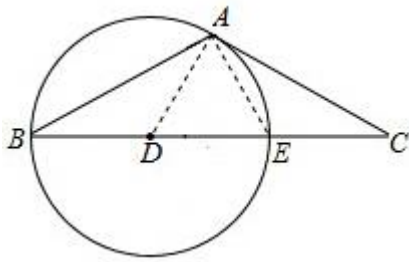
$$\therefore AE = DE, \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle AED - \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle C,$$

$$\therefore AE = CE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \odot D \text{ 的半径 } AD = 2\sqrt{3}.$$



【点评】 本题考查了切线的判定和性质，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键．

27. 【分析】 延长 A_1B_1 至 E ，使 $EB_1 = A_1B_1$ ，连接 EM_1C 、 EC_1 ，则 $EB_1 = B_1C_1$ ， $\angle EB_1M_1$ 中 $= 90^\circ = \angle A_1B_1M_1$ ，得出 $\triangle EB_1C_1$ 是等腰直角三角形，由等腰直角三角形的性质得出 $\angle B_1EC_1 = \angle B_1C_1E = 45^\circ$ ，证出 $\angle B_1C_1E + \angle M_1C_1N_1 = 180^\circ$ ，得出 E 、 C_1 、 N_1 ，三点共线，由 SAS 证明 $\triangle A_1B_1M_1 \cong \triangle EB_1M_1$ 得出 $A_1M_1 = EM_1$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，得出 $EM_1 = M_1N_1$ ，由等腰三角形的性质得出 $\angle 3 = \angle 4$ ，证出 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5$ ，得出 $\angle 5 + \angle 6 = 90^\circ$ ，即可得出结论．

【解答】 解：延长 A_1B_1 至 E ，使 $EB_1 = A_1B_1$ ，连接 EM_1C 、 EC_1 ，如图所示：

则 $EB_1 = B_1C_1$ ， $\angle EB_1M_1$ 中 $= 90^\circ = \angle A_1B_1M_1$ ，

$\therefore \triangle EB_1C_1$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle B_1EC_1 = \angle B_1C_1E = 45^\circ$ ，

$\because N_1$ 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的外角 $\angle D_1C_1H_1$ 的平分线上一点，

$\therefore \angle M_1C_1N_1 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle B_1C_1E + \angle M_1C_1N_1 = 180^\circ$ ，

$\therefore E$ 、 C_1 、 N_1 ，三点共线，

在 $\triangle A_1B_1M_1$ 和 $\triangle EB_1M_1$ 中，
$$\begin{cases} A_1B_1 = EB_1 \\ \angle A_1B_1M_1 = \angle EB_1M_1 \\ B_1M_1 = B_1M_1 \end{cases}$$

$\therefore \triangle A_1B_1M_1 \cong \triangle EB_1M_1$ (SAS)，

$\therefore A_1M_1 = EM_1$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore A_1M_1 = M_1N_1$ ，

$\therefore EM_1 = M_1N_1$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

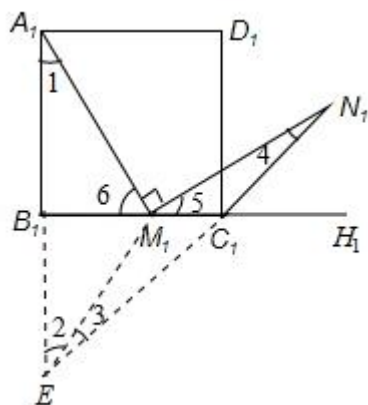
$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 45^\circ$ ， $\angle 4 + \angle 5 = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 5,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1 M_1 N_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



【点评】此题是四边形综合题目，考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、三角形的外角性质等知识；本题综合性强，熟练掌握正方形的性质，通过作辅助线构造三角形全等是解本题的关键。

28. 【分析】（1）由二次函数交点式表达式，即可求解；

（2）分 $AC = AQ$ 、 $AC = CQ$ 、 $CQ = AQ$ 三种情况，分别求解即可；

（3）由 $PN = PQ \sin \angle PQN = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4 + m - 4 \right)$ 即可求解。

【解答】解：（1）由二次函数交点式表达式得： $y = a(x+3)(x-4) = a(x^2 - x - 12) = ax^2 - ax - 12a$ ，

即： $-12a = 4$ ，解得： $a = -\frac{1}{3}$ ，

则抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ ；

（2）存在，理由：

点 A 、 B 、 C 的坐标分别为 $(-3, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(0, 4)$ ，

则 $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ， $AB = 4 - (-3) = 7$ ， $BC = 4\sqrt{2}$ ， $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ，

设 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，将点 B 、 C 的坐标代入解得：

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 4 \cdots \text{①},$$

设直线 AC 的解析式为 $y = k'x + b'$ ，则有 $\begin{cases} -3k' + b' = 0 \\ b' = 4 \end{cases}$ ，

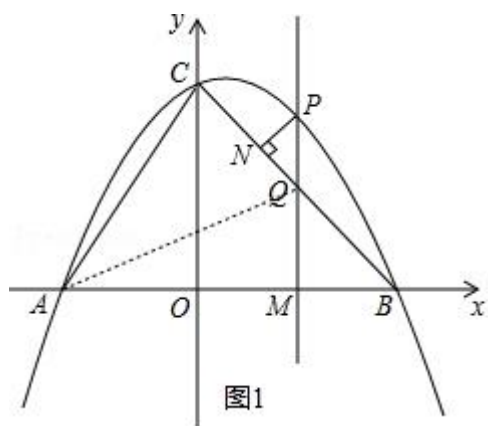
$$\text{解得} \begin{cases} k' = \frac{4}{3} \\ b' = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为: $y = \frac{4}{3}x + 4$,

设线段 AC 的中点为 $K(-\frac{3}{2}, 2)$, 过点 M 与 CA 垂直, 直线的表达式中的 k 值为 $-\frac{3}{4}$,

同理可得过点 K 与直线 AC 垂直, 直线的表达式为: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \cdots \textcircled{2}$,

①当 $AC = AQ$ 时, 如图 1,



则 $AC = AQ = 5$,

设: $QM = MB = n$, 则 $AM = 7 - n$,

由勾股定理得: $(7 - n)^2 + n^2 = 25$, 解得: $n = 3$ 或 4 ,

$\because$ 点 Q 在点 B 的左侧,

$\therefore n = 3$

故点 $Q(1, 3)$;

②当 $AC = CQ$ 时, 如图 1,

$CQ = 5$, 则 $BQ = BC - CQ = 4\sqrt{2} - 5$,

则 $QM = MB = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2}$,

故点 $Q(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2})$;

③当 $CQ = AQ$ 时,

联立①②并解得: $x = \frac{25}{2}$ (舍去);

故点 Q 的坐标为: $Q(1, 3)$ 或 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{8 - 5\sqrt{2}}{2})$;

(3) 设点 $P(m, -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4)$, 则点 $Q(m, -m + 4)$,

$\because OB = OC$,

$\therefore \angle ABC = \angle OCB = 45^\circ = \angle PQN$,

$$\therefore PN = PQ \sin \angle PQN = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4 - (-m + 4) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{6} (m - 2)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\because -\frac{\sqrt{2}}{6} < 0$, $\therefore PN$ 有最大值,

当 $m = 2$ 时, PN 的最大值为: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点评】 主要考查了二次函数的解析式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养. 要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.