

2021 年兰州市初中学业水平考试数学 (A)

一、选择题：本大题 12 小题，每小题 3 分，共 36 分．每小题只有一个正确选项．

1. 若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的余角为 ()

- A. 30° B. 40° C. 50° D. 140°

【答案】C

【解析】

【分析】根据余角的定义， 90° 减去 $\angle A$ 即可求得 $\angle A$ 的余角．

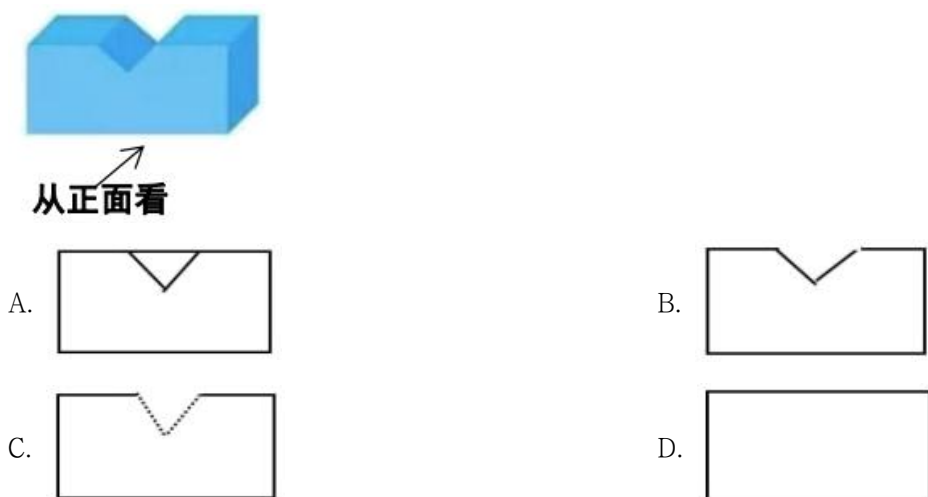
【详解】 $\because \angle A = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle A$ 的余角为 $90^\circ - \angle A = 50^\circ$ ．

故选 C．

【点睛】本题考查了求一个角的余角，理解余角的定义是解题的关键．若两角之和为 90° ，则称这两个角“互为余角”，简称“互余”．

2. 如图，该几何体的主视图是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】从正面看，注意“长对正，宽相等、高平齐”，根据所放置几何体判断出主视图图形即可．

【详解】从正面看所得到的图形为



故选 B

【点睛】考查几何体的三视图的知识，从正面看的图形是主视图，从左面看到的图形是左视图，从上面看

到的图象是俯视图. 掌握以上知识是解题的关键.

3. 计算: $2a(a^2 + 2b) = (\quad)$

A. $a^3 + 4ab$

B. $2a^3 + 2ab$

C. $2a + 4ab$

D. $2a^3 + 4ab$

【答案】 D

【解析】

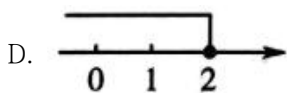
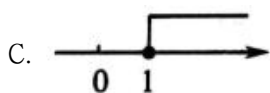
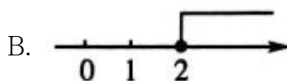
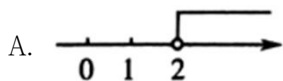
【分析】 根据单项式乘以多项式运算法则计算即可.

【详解】 解: $2a(a^2 + 2b) = 2a^3 + 4ab$,

故选: D.

【点睛】 本题考查了单项式乘以多项式, 熟练运用运算法则是解本题的关键.

4. 关于 x 的一元一次不等式 $5x \geq x + 8$ 的解集在数轴上表示为 ()



【答案】 B

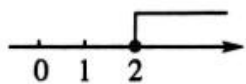
【解析】

【分析】 求出不等式的解集, 并表示出数轴上即可.

【详解】 $5x \geq x + 8$

解得 $x \geq 2$

将 $x \geq 2$ 表示在数轴上, 如图



故选 B

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式, 并将不等式的解集表示在数轴上, 数形结合是解题的关键.

5. 因式分解: $x^3 - 4x = (\quad)$

A. $x(x^2 - 4x)$

B. $x(x + 4)(x - 4)$

C. $x(x + 2)(x - 2)$

D. $x(x^2 - 4)$

【答案】 C

【解析】

【分析】先提公因式 x ，进而根据平方差公式因式分解即可.

【详解】 $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

故选 C.

【点睛】本题考查了综合运用提公因式和公式法因式分解，掌握因式分解的方法是解题的关键.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-3, 4)$ 关于 y 轴对称的点 B 的坐标是 ()

- A. $(3, -4)$ B. $(-3, -4)$ C. $(-3, 4)$ D. $(3, 4)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据关于 y 轴对称的点的横坐标互为相反数，纵坐标相等，可得答案.

【详解】解：点 $A(-3, 4)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(3, 4)$,

故选：D.

【点睛】本题考查了关于 y 轴对称的点的坐标，明确关于 y 轴对称的点的横坐标互为相反数，纵坐标相等是解题的关键

7. 二次函数 $y = x^2 + 2x + 2$ 的图象的对称轴是 ()

- A. $x = -1$ B. $x = -2$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

【答案】A

【解析】

【分析】将二次函数 $y = x^2 + 2x + 2$ 写成顶点式，进而可得对称轴.

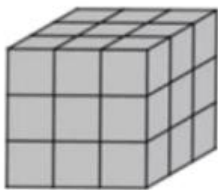
【详解】解： $\because y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.

$\therefore$ 二次函数 $y = x^2 + 2x + 2$ 的图象的对称轴是 $x = -1$.

故选 A.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，将一般式转化为顶点式是解题的关键.

8. 如图，将一个棱长为 3 的正方体表面涂上颜色，再把它分割成棱长为 1 的小正方体，将它们全部放入一个不透明盒子中摇匀，随机取出一个小正方体，只有一个面被涂色的概率为 ()



A. $\frac{4}{27}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{8}{27}$

D. $\frac{20}{27}$

【答案】B

【解析】

【分析】由在 27 个小正方体中选一个正方体，共有 27 种结果，满足条件的事件是取出的小正方体表面只有一个面涂有颜色，有 6 种结果，根据几何概率及其概率的计算公式，即可求解.

【详解】解：由题意，在一个棱长为 3cm 的正方体的表面涂上颜色，将其分割成 27 个棱长为 1cm 的小正方体，

在 27 个小正方体中，恰好有三个面都涂色有颜色的共有 8 个，恰好有两个都涂有颜色的共 12 个，恰好有一个面都涂有颜色的共 6 个，表面没涂颜色的 1 个，

可得试验发生包含的事件是从 27 个小正方体中选一个正方体，共有 27 种结果，

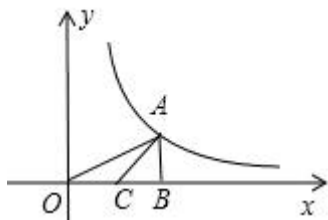
满足条件的事件是取出的小正方体表面有一个面都涂色，有 6 种结果，

所以所求概率为 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

故选：B.

【点睛】本题考查几何概率的计算，涉及正方体的几何结构，属于基础题.

9. 如图，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 图象上， $AB \perp x$ 轴于点 B，C 是 OB 的中点，连接 AO，AC，若 $\triangle AOC$ 的面积为 2，则 $k =$ ()



A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形中线的性质得出 $S_{\triangle AOB} = 4$ ，然后根据反比例函数 k 的几何意义得解.

【详解】解： $\because$ 点 C 是 OB 的中点， $\triangle AOC$ 的面积为 2，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 4,$$

$\because AB \perp x$ 轴于点 B，

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OB = 4,$$

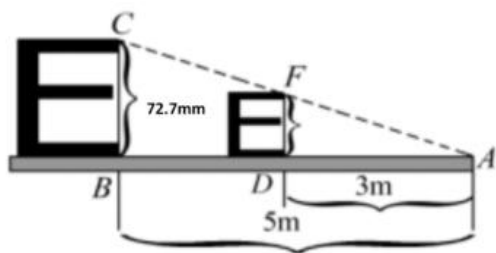
$$\therefore AB \cdot OB = 8,$$

$$\therefore k=8,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了反比例函数 k 的几何意义以及三角形中线的性质，熟知反比例函数 k 的几何意义是解本题的关键.

10. 如图，小明探究课本“综合与实践”板块“制作视力表”的相关内容：当测试距离为5m时，标准视力表中最大的“E”字高度为72.7mm，当测试距离为3m时，最大的“E”字高度为（ ）mm



A. 4.36

B. 29.08

C. 43.62

D. 121.17

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，得 $\angle CAB = \angle FAD$ 、 $\angle ABC = \angle ADF = 90^\circ$ ，结合相似三角形的性质，通过相似比计算，即可得到答案.

【详解】根据题意，得 $\angle CAB = \angle FAD$ ，且 $\angle ABC = \angle ADF = 90^\circ$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADF$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{DF}{AD}$$

$$\therefore DF = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{72.7 \times 3}{5} = 43.62 \text{mm}$$

故选：C.

【点睛】本题考查了相似三角形的知识；解题的关键是熟练掌握相似三角形的性质，从而完成求解.

11. 如图，将图1中的菱形纸片沿对角线剪成4个直角三角形，拼成如图2的四边形 $ABCD$ （相邻纸片之间不重叠，无缝隙）. 若四边形 $ABCD$ 的面积为13，中间空白处的四边形 $EFGH$ 的面积为1，直角三角形的两条直角边分别为 a 和 b ，则 $(a+b)^2 = (\quad)$

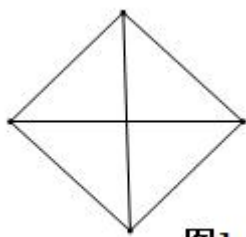


图1

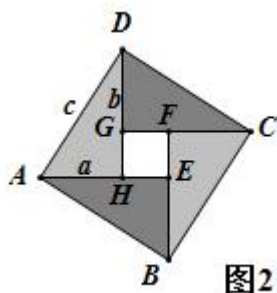


图2

A. 12

B. 13

C. 24

D. 25

【答案】D

【解析】

【分析】根据菱形的性质可得对角线互相垂直平分，进而可得4个直角三角形全等，结合已知条件和勾股定理求得 $a^2 + b^2$ ，进而根据面积差以及三角形面积公式求得 $\frac{1}{2}ab$ ，最后根据完全平方公式即可求得 $(a+b)^2$ 。

【详解】∵菱形的对角线互相垂直平分，

∴4个直角三角形全等；

∴ $\angle ADH = \angle BAE, \angle DAH + \angle HAD = 90^\circ$ ， $AD = AB = BC = CD$ ，

∴ $\angle DAB = 90^\circ$ ，

∴四边形 $ABCD$ 是正方形，又正方形 $ABCD$ 的面积为 13，

∴正方形的边长为 $\sqrt{13}$ ，

根据勾股定理，则 $a^2 + b^2 = AB^2 = 13$ ，

∵中间空白处的四边形 $EFGH$ 的面积为 1，

∴4个直角三角形的面积为 $13 - 1 = 12$ ，

∴ $\frac{1}{2}ab = 12 \div 4 = 3$ ，

∴ $2ab = 12$ ，

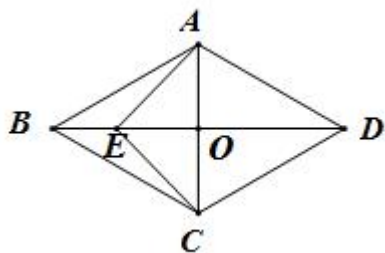
∴ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ，

∴ $(a+b)^2 = 12 + 13 = 25$ 。

故选 D。

【点睛】本题考查了正方形的性质与判定，菱形的性质，勾股定理，完全平方公式，求得 $\frac{1}{2}ab$ 是解题的关键。

12. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 在 BD 上, 连接 AE , CE , $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCE = 15^\circ$, $ED = 2 + 2\sqrt{3}$, 则 $AD =$ ()



A. 4

B. 3

C. $2\sqrt{2}$

D. 2

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据菱形的性质以及已知条件, 可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 可得 $OB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, 进而根据

$\angle BCE = 15^\circ$, 可得 $\angle ECO = 45^\circ$, 进而可得 $OC = OE$, 根据 $DE = OE + OD$, $ED = 2 + 2\sqrt{3}$, $AD = BC$, 即可求得 AD .

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD, AO = OC, BO = OD, AB = BC$,

$\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ, OC = \frac{1}{2}BC, OB = BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$,

$\because \angle BCE = 15^\circ$,

$\therefore \angle ECO = \angle ACB - \angle BCE = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore \angle CEO = 45^\circ$,

$\therefore OC = OE$,

$\therefore DE = OE + OD = OE + OB = 2 + 2\sqrt{3}$,

即 $\frac{1}{2}BC + \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2 + 2\sqrt{3}$,

$\therefore BC = 4$,

$$\therefore AD = BC = 4.$$

故选 A.

【点睛】本题考查了菱形的性质，等边三角形的性质与判定，解直角三角形，等腰直角三角形的性质，综合运用以上知识是解题的关键.

二、填空题：本大题 4 小题，每小题 3 分，共 12 分.

13. 《九章算术》中注有“今两算得失相反，要令正负以名之”大意为：今有两数若其意义相反，则分别叫做正数与负数. 若水位上升 1m 记作 +1m，则下降 2m 记作_____ m.

【答案】 -2

【解析】

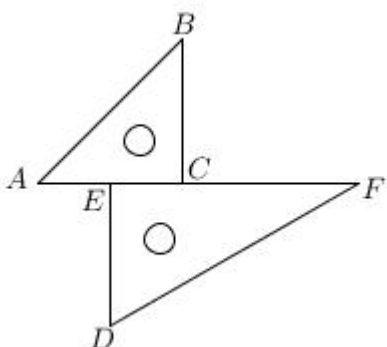
【分析】根据正负数的意义即可解答.

【详解】解：下降 2m 记作 -2m.

故答案为： -2

【点睛】本题考查了正负数的意义，正确理解正负数的意义是解题的关键.

14. 将一副三角板如图摆放，则_____//_____, 理由是_____.



【答案】 ①. BC ②. DE ③. 内错角相等，两直线平行

【解析】

【分析】根据三角板的角度可知 $\angle BCA = \angle DEF = 90^\circ$ ，根据内错角相等，两直线平行判断即可.

【详解】解：一副三角板如图摆放，

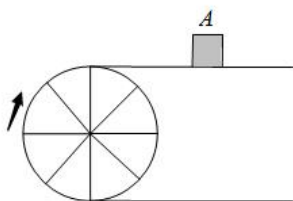
$$\therefore \angle BCA = \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore BC \parallel DE \text{ (内错角相等，两直线平行),}$$

故答案为： BC ； DE ； 内错角相等，两直线平行.

【点睛】本题考查了平行线的判定，熟知平行线的判定定理是解本题的关键.

15. 如图，传送带的一个转动轮的半径为 10cm，转动轮转 n° ，传送带上的物品 A 被传送 6π cm，则 $n =$ _____.



【答案】 108

【解析】

【分析】 根据传送的距离等于转动了 n° 的圆弧的长，进而即可求得 n .

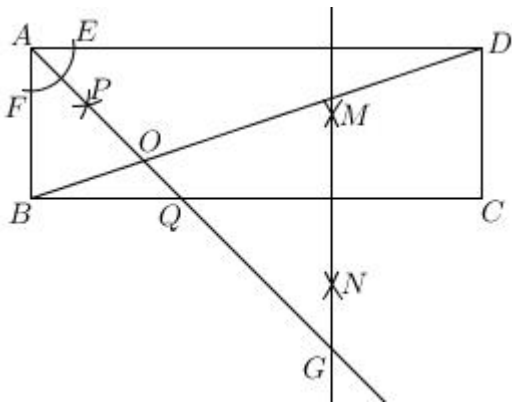
【详解】 $\because \frac{10n\pi}{180} = 6\pi$

解得 $n = 108$.

故答案为： 108 .

【点睛】 本题考查了弧长的公式的应用，牢记弧长公式是解题的关键.

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $AD = 3$. ①以点 A 为圆心，以不大于 AB 长为半径作弧，分别交边 AD ， AB 于点 E ， F ，再分别以点 E ， F 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径作弧，两弧交于点 P ，作射线 AP 分别交 BD ， BC 于点 O ， Q ；②分别以点 C ， Q 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}CQ$ 长为半径作弧，两弧交于点 M ， N ，作直线 MN 交 AP 于点 G ，则 OG 长为_____.



【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】 由作图步骤可知 AG 是 $\angle BAD$ 的角平分线， MN 是 CQ 的垂直平分线，则 $BQ = AB = 1$ ，利用勾股定理可得 $AQ = QG = \sqrt{2}$ ，因为 $AD \parallel BQ$ ，所以 $\triangle ADO \sim \triangle QBO$ ，则 $\frac{AD}{BQ} = \frac{AO}{OQ}$ ，即 $\frac{3}{1} = \frac{\sqrt{2} - OQ}{OQ}$ ，解得

$OQ = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，所以 $OG = OQ + QG = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

【详解】由题意可知：AG 是 $\angle BAD$ 的角平分线，MN 是 CQ 的垂直平分线，

$$\therefore \angle BAQ = \angle AQB = 45^\circ,$$

$$\therefore BQ = AB = 1,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABQ \text{ 中, } AQ = QG = \sqrt{AB^2 + BQ^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD \parallel BQ,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle QBO$$

$$\therefore \frac{AD}{BQ} = \frac{AO}{OQ}, \text{ 即 } \frac{3}{1} = \frac{\sqrt{2} - OQ}{OQ}, \text{ 解得 } OQ = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore OG = OQ + QG = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

【点睛】本题主要考查了角平分线、垂直平分线的作图方法，相似三角形判定，勾股定理，解题的关键是掌握角平分线、垂直平分线的作图方法以及找准相似三角形进行线段计算.

三、解答题：本大题共 12 小题，共 72 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算： $\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) \times \sqrt{6}$

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质进行乘法运算后，再化为最简二次根式进行合并同类项即可.

$$\text{【详解】 } \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \times 6} + \sqrt{3 \times 6}$$

$$= \sqrt{8} + \sqrt{18}$$

$$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了二次根式的运算，熟练掌握二次根式的性质及其运算法则是解题的关键.

18. 先化简，再求值： $\frac{2m-6}{m^2-9} \div \frac{m-1}{m+3} - \frac{1}{m-1}$ ，其中 $m = 4$.

【答案】 $\frac{1}{m-1}, \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先将除法转化为乘法，因式分解，约分，分式的减法运算，再将字母的值代入求解即可.

【详解】
$$\begin{aligned} & \frac{2m-6}{m^2-9} \div \frac{m-1}{m+3} - \frac{1}{m-1} \\ &= \frac{2(m-3)}{(m+3)(m-3)} \cdot \frac{m+3}{m-1} - \frac{1}{m-1} \\ &= \frac{2}{m-1} - \frac{1}{m-1} \\ &= \frac{1}{m-1}. \end{aligned}$$

当 $m=4$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，掌握因式分解是解题的关键.

19. 解方程: $x^2+4x-1=0$.

【答案】 $x_1 = -2 + \sqrt{5}, x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

【解析】

【分析】 方程变形后，利用配方法求出解即可.

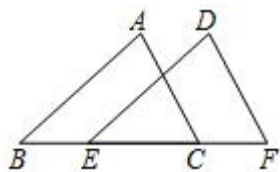
【详解】 方程变形得: $x^2+4x=1$,

配方得: $x^2+4x+4=5$, 即 $(x+2)^2=5$,

开方得: $x+2=\pm\sqrt{5}$,

解得: $x_1 = -2 + \sqrt{5}, x_2 = -2 - \sqrt{5}$

20. 如图, 点 E, C 在线段 BF 上, $\angle A = \angle D$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$, 求证: $AC = DF$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】由 $AB \parallel DE$ 可得, $\angle ABC = \angle DEF$, 进而根据 AAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 即可证明 $AC = DF$.

【详解】 $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle ABC = \angle DEF \\ BC = EF \end{cases}$$

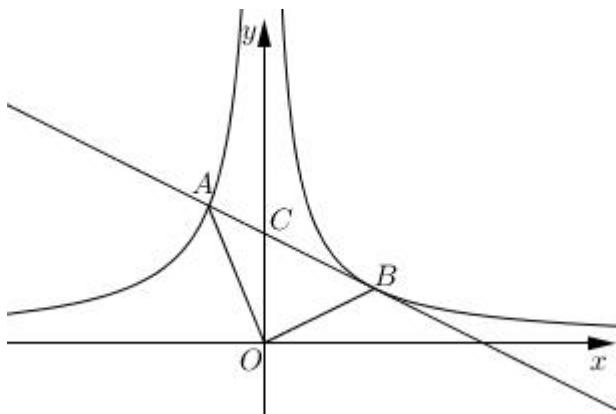
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = DF.$$

【点睛】本题考查了三角形全等的性质与判定, 掌握三角形全等的性质与判定是解题的关键.

21. 如图, 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 与反比例函数 $y = -\frac{10}{x} (x < 0)$, $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 图象分别交于 $A(-2, m)$,

$B(4, n)$, 与 y 轴交于点 C , 连接 OA , OB .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 和一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 的表达式;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】(1) $y = \frac{8}{x} (x > 0)$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$; (2) 12.

【解析】

【分析】(1) 把点 A 的坐标代入 $y = -\frac{10}{x} (x < 0)$ 求出 m 的值, 得出 A 的坐标代入 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 求出一次函数的解析式, 进而求得点 B 的坐标, 利用 B 点的坐标求得 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的解析式;

(2) 根据一次函数解析式求得点 C 的坐标, 再将 y 轴作为分割线, 求得 $\triangle AOB$ 的面积;

【详解】解: (1) $\because A(-2, m)$, 在函数 $y = -\frac{10}{x} (x < 0)$ 的图象上,

$$\therefore m = 5,$$

$$\therefore A(-2, 5),$$

$$\text{把 } A(-2, 5) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x + b \text{ 得: } 5 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b,$$

$$\therefore b=4,$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = -\frac{1}{2}x + b \text{ 的表达式为: } y = -\frac{1}{2}x + 4,$$

$$\therefore B(4, n) \text{ 在函数 } y = -\frac{1}{2}x + 4 \text{ 的图象上,}$$

$$\therefore n=2,$$

$$\therefore B(4, 2),$$

$$\text{把 } B(4, 2) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (x > 0) \text{ 得: } 2 = \frac{k}{4}, \therefore k=8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{8}{x} (x > 0);$$

$$(2) \because C \text{ 是直线 } AB \text{ 与 } y \text{ 轴的交点, 直线 } AB: y = -\frac{1}{2}x + 4,$$

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=4,$$

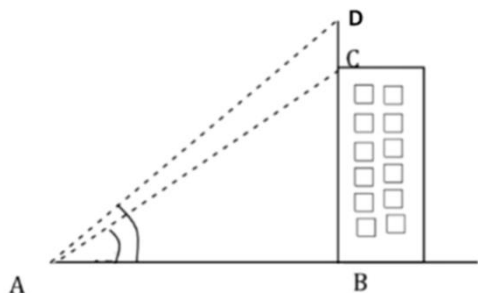
$$\therefore \text{点 } C(0, 4), \text{ 即 } OC=4,$$

$$\therefore A(-2, 5), B(4, 2),$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 12;$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，用待定系数法求一次函数与反比例函数的解析式，根据题意求出 C 点坐标是解题的关键。

22. 避雷针是用来保护建筑物、高大树木等避免雷击的装置. 如图, 小陶同学要测量垂直于地面的大楼 BC 顶部避雷针 CD 的长度 (B, C, D 三点共线), 在水平地面 A 点测得 $\angle CAB = 53^\circ$, $\angle DAB = 58^\circ$, A 点与大楼底部 B 点的距离 $AB = 20\text{m}$, 求避雷针 CD 的长度. (结果精确到 0.1m . 参考数据: $\sin 58^\circ \approx 0.85$, $\cos 58^\circ \approx 0.53$, $\tan 58^\circ \approx 1.60$, $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)



【答案】 5.4m

【解析】

【分析】 根据 $\tan \angle CAB = \frac{CB}{AB}$, $\tan \angle DAB = \frac{DB}{AB}$, 然后根据 $CD = BD - BC$ 即可得出答案.

【详解】 解: $\because BC \perp AB$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAB = 53^\circ, AB = 20\text{m},$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AB}, \text{ 即 } \tan 53^\circ = \frac{BC}{20},$$

$$\text{解得: } BC \approx 26.6\text{ m},$$

$$\because \angle DAB = 58^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \frac{BD}{AB}, \text{ 即 } \tan 58^\circ = \frac{BD}{20},$$

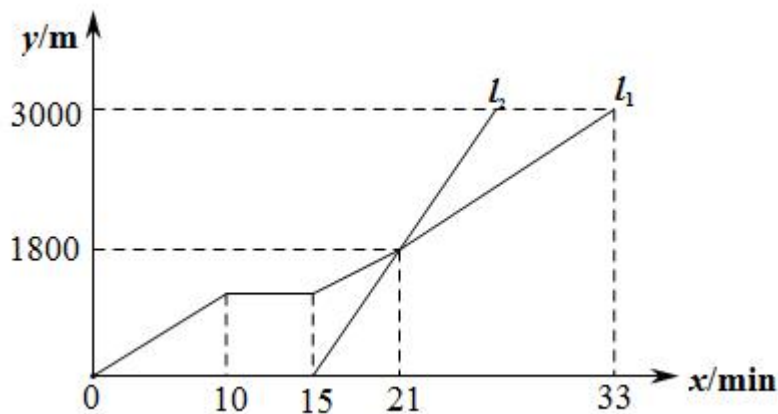
$$\text{解得: } BD \approx 32\text{ m},$$

$$\therefore CD = BD - BC \approx 32 - 26.6 \approx 5.4\text{ m}.$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形的实际应用, 正确构造直角三角形, 将实际问题转换为解直角三角形的问题是解答此题的关键.

23. 小军到某景区游玩, 他从景区入口处步行到达小憩屋, 休息片刻后继续前行, 此时观光车从景区入口处出发的沿相同路线先后到达观景点, 如图, l_1 , l_2 分别表示小军与观光车所行的路程 $y(\text{m})$ 与时间 $x(\text{min})$ 之间的关系.

根据图象解决下列问题:



- (1) 观光车出发_____分钟追上小军；
- (2) 求 l_2 所在直线对应的函数表达式；
- (3) 观光车比小军早几分钟到达观景点？请说明理由。

【答案】 (1) 6； (2) $y = 300x - 4500$ ； (3) 观光车比小军早 8 分钟到达观景点，理由见解析。

【解析】

【分析】 (1) 由图像可知， l_1 ， l_2 的交点，即为两者到达同一位置，所以在 21 分钟时观光车追上小军，而观光车是在 15 分钟时出发的，所以观光车出发 6 分钟后追上小军；

(2) 设 l_2 所在直线对应的函数表达式为 $y = kx + b$ ，将经过两点 (15,0) 和 (21,1800) 带入表达式 $y = kx + b$ ，得 $y = 300x - 4500$ ；

(3) 由图像可知，到达观景点需要 3000m 的路程，小军到达观景点的时间为 33min，通过 l_2 所在直线对应的函数表达式 $y = 300x - 4500$ ，可知，观光车到达观景点的时间为 $x = 25 \text{ min}$ ，因此观光车比小军早 $33 \text{ min} - 25 \text{ min} = 8 \text{ min}$ 到达观景点。

【详解】 解：(1) 由图像可知，在 21min 时， l_1 ， l_2 相交于一点，表示在 21min 时，小军和观光车到达了同一高度，此时观光车追上了小军，观光车是在 15min 时出发，

$$\therefore 21 \text{ min} - 15 \text{ min} = 6 \text{ min},$$

$\therefore$ 观光车出发 6 分钟后追上小军；

(2) 设 l_2 所在直线对应的函数表达式为 $y = kx + b$ ，由图像可知，直线 l_2 分别经过 (15,0) 和 (21,1800) 两点，将两点带入 l_2 函数表达式 $y = kx + b$ 得：

$$\begin{cases} 15k + b = 0 \\ 21k + b = 1800 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} k = 300 \\ b = -4500 \end{cases}$$

$\therefore l_2$ 函数表达式为 $y = 300x - 4500$ ；

(3) 由图像可知，到达观景点需要 3000m 的路程，小军到达观景点的时间为 33min，

$\therefore$ 观光车 l_2 函数表达式为 $y = 300x - 4500$ ，

$\therefore$ 将 $y=3000$ 代入 $y = 300x - 4500$ ，可知观光车到达观景点所需时间为 $x=25 \text{ min}$ ，

$\therefore 33\text{min} - 25\text{min} = 8\text{min}$ ，

$\therefore$ 观光车比小军早 8 分钟到达观景点.

答：(1) 观光车出发 6 分钟追上小军；

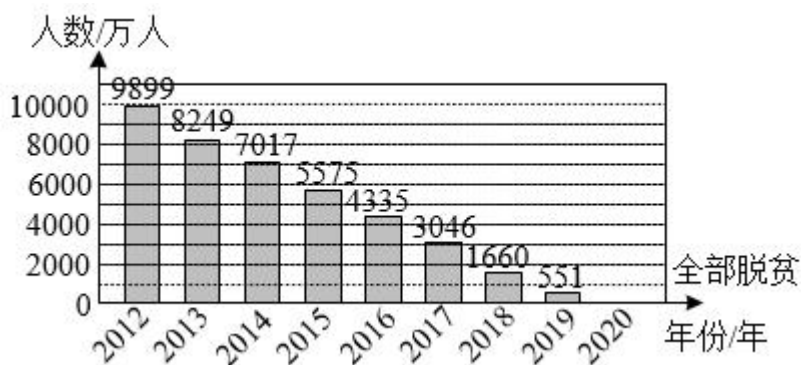
(2) l_2 所在直线对应的函数表达式为 $y = 300x - 4500$ ；

(3) 观光车比小军早 8 分钟到达观景点，理由见解析.

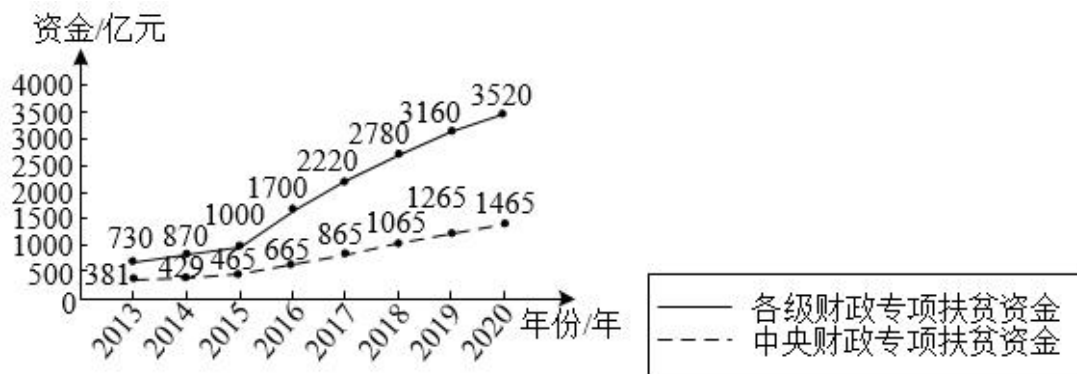
【点睛】 本题考查了一次函数的应用，熟练掌握待定系数法求出函数解析式是解答本题的关键.

24. 2021 年 2 月 25 日，习近平总书记在全国脱贫攻坚总结表彰大会上庄严宣告中国脱贫攻坚取得了全面胜利，完成了消除绝对贫困的艰巨任务，创造了又一个彪炳史册的人间奇迹，根据 2021 年 4 月 7 日《人民日报》刊登的“人类减贫的中国实践”的相关数据进行收集和整理，信息如下：

信息一：脱贫攻坚以来中国农村年度贫困人口数量



信息二：脱贫攻坚以来财政专项扶贫资金投入



信息三：脱贫攻坚以来贫困地区农村居民和全国农村居民年人均可支配收入及增长率

年份、统计量 名称	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	平均 数
贫困地区农村居民年人均可支配收入/元	6079	6852	7653	8452	9377	10371	11567	12588	9117
贫困地区农村居民年人均可支配收入增长率/%	16.5	12.7	11.7	10.4	10.9	10.6	11.5	8.8	11.6
全国农村居民年人均可支配收入增长率/%	12.4	11.2	8.9	8.2	8.6	8.8	9.6	6.9	9.3

请根据以上信息，解决下列问题：

- (1) 2019 年底中国农村贫困人口数量为_____万人.
- (2) 2013 年底至 2020 年底，贫困地区农村居民年人均可支配收入的极差为_____元.
- (3) 下列结论正确的是_____（只填序号）.
 - ①脱贫攻坚以来中国农村贫困人口数量逐年减少，最终全部脱贫；
 - ②脱贫攻坚以来我国贫困地区农村居民人均可支配收入年平均增长率为 11.6 %，增长持续快于全国农村；
 - ③2016 – 2020 年各级财政专项扶贫资金投入连续 5 年超过中央财政专项扶贫资金 1000 亿元.

【答案】 (1) 551； (2) 6509； (3) ①②③

【解析】

- 【分析】 (1) 根据信息一：脱贫攻坚以来中国农村年度贫困人口数量的条形统计图即可求得；
- (2) 根据信息三中的表格数据，以及极差的定义即可求得，极差：一组数据中最大值与最小值的差叫做这组数据的极差；
- (3) 根据信息一可得①正确，根据信息三中的表格数据，求得平均年增长率，并且观察每一年的数据贫困

地区农村居民人均可支配收入增长率快于全国农村的可支配收入增长率，即可判断②，根据信息二：脱贫攻坚以来财政专项扶贫资金投入，计算 2016－2020 年各级财政专项扶贫资金投入减去中央财政专项扶贫资金即可判断③.

【详解】(1) 根据信息一：脱贫攻坚以来中国农村年度贫困人口数量的条形统计图即可知：

2019 年底中国农村贫困人口数量为 551 万人；

故答案为：551

$$(2) 12588 - 6079 = 6509$$

故答案为：6509

(3) 根据信息一，可得，脱贫攻坚以来中国农村贫困人口数量逐年减少，最终全部脱贫，故①正确；

② $\therefore \frac{1}{9}(16.5 + 12.7 + 11.7 + 10.4 + 10.9 + 10.6 + 11.5 + 8.8 + 11.6) \approx 11.6$ ，且每一年的我国贫困地区农村居民人均可支配收入年增长率持续快于全国农村；故②正确；

$$\textcircled{3} 2016 \text{ 年: } 1700 - 665 = 1035 > 1000 ,$$

$$2017 \text{ 年: } 2220 - 865 = 1355 > 1000 ,$$

$$2018 \text{ 年: } 2780 - 1065 = 1715 > 1000 ,$$

$$2019 \text{ 年: } 3160 - 1265 = 1895 > 1000 ,$$

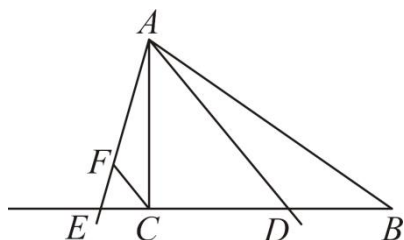
$$2020 \text{ 年: } 3520 - 1465 = 2055 > 1000 ,$$

$\therefore$ 2016－2020 年各级财政专项扶贫资金投入连续 5 年超过中央财政专项扶贫资金 1000 亿元. 故③正确

故答案为：①②③.

【点睛】本题考查了求极差，平均数，折线统计图，条形统计图，从表格或统计图获取信息是解题的关键.

25. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，将 $\angle BAC$ 绕点 A 顺时针旋转，角的两边分别交射线 BC 于 D，E 两点，F 为 AE 上一点，连接 CF，且 $\angle ACF = \angle B$ （当点 B，D 重合时，点 C，F 也重合）. 设 B，D 两点间的距离为 $x\text{cm}$ ($0 \leq x \leq 8$)，A，F 两点间的距离为 $y\text{cm}$.



小刚根据学习函数的经验，对因变量 y 随着自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

下面是小刚的探究过程，请补充完整.

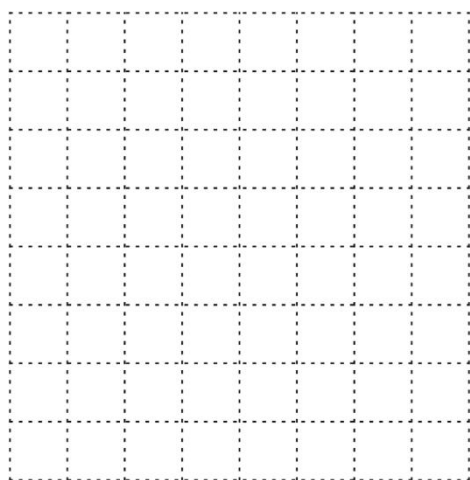
(1) 列表：下表的已知数据是根据 B，D 两点间的距离 x 进行取点，画图，测量分别得到了 x 与 y 的几组

对应值;

x/cm	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6	7	8
y/cm	6.00	5.76	5.53	5.31	5.09	4.88	4.69	4.50	4.33	4.17	4.02	3.79	3.65	a

请你通过计算补全表格: $a =$ _____;

(2) 描点、连线: 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出表中各组数值所对应的点 (x, y) , 并画出函数 y 关于 x 的图像;



(3) 探究性质: 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 的变化趋势;

(4) 解决问题: 当 $AF = CD$ 时, BD 的长度大约是 _____ cm . (结果保留两位小数)

【答案】 (1) 3.6; (2) 见解析; (3) 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 不断减小; (4) 3.50

【解析】

【分析】 (1) 根据题意画出图形, 证明 $\triangle ACF \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形性质可得结果;

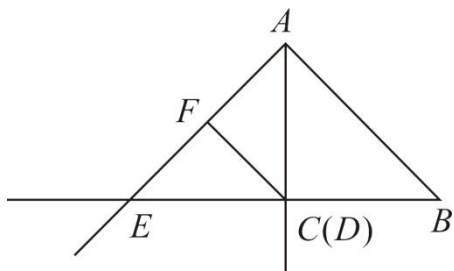
(2) 描点连线画出图形即可;

(3) 根据 (2) 画出图像判断增减性即可;

(4) 根据 $AF = CD$, 可得 $y = -x + 8$, 画出 $y = -x + 8$ 与 (2) 中图像交点即为所求.

【详解】 解: (1) 当 $x = 8$ 时, 即 B, D 两点之间的距离为 8cm ,

旋转至如图所示时:



$\therefore$ 此时点 D 和点 C 重合,

$\because \angle ACF = \angle B, \angle FAC = \angle CAB,$

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABC,$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

$\because AC = 6\text{cm}, BC = 8\text{cm}, \angle ACB = 90^\circ,$

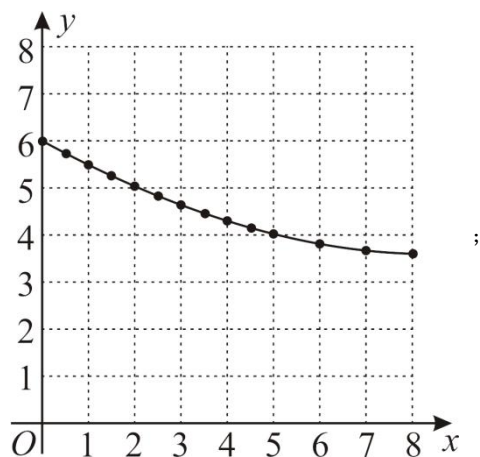
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10(\text{cm}),$$

$$\therefore AF = 3.6\text{cm},$$

$$\therefore a = 3.6,$$

故答案为: 3.6;

(2) 函数图像如下图:

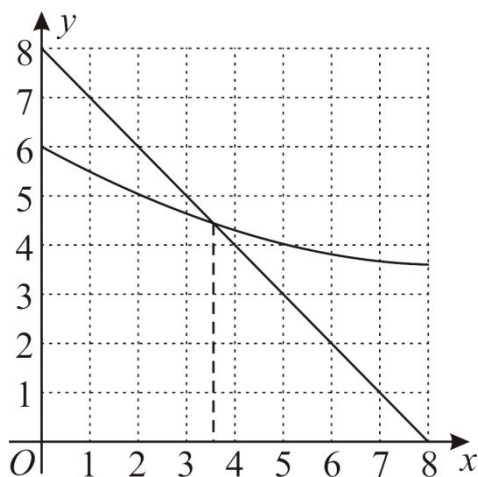


(3) 根据图像可知: 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 不断减小;

(4) $\because AF = CD, BD = x, AF = CD = 8 - x$

$$\therefore y = -x + 8,$$

如图: $y = -x + 8$ 与 (2) 中函数图像交点即为所求



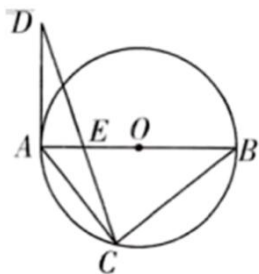
$\therefore x \approx 3.50$,

即 BD 的长度大约是: 3.50 cm ,

故答案为: 3.50 .

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，旋转的性质，动点问题的函数图像，读懂题意，运用数形结合的思想解题是关键.

26. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, E 为 AB 上一点, $BE = BC$, 延长 CE 交 AD 于点 D , $AD = AC$.



(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle ACE = \frac{1}{3}$, $OE = 3$, 求 BC 的长.

【答案】(1) 见解析; (2) 8

【解析】

【分析】(1) 根据 $BE = BC$, 可得 $\angle BEC = \angle BCE$, 根据对顶角相等可得 $\angle AED = \angle BEC$, 进而可得 $\angle BCE = \angle AED$, 根据 $AD = AC$, 可得 $\angle ADC = \angle ACE$, 结合 $\angle ACB = 90^\circ$, 根据角度的转化可得 $\angle AED + \angle D = 90^\circ$, 进而即可证明 AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 根据 $\angle ADC = \angle ACE$, 可得 $\tan D = \frac{EA}{DA} = \tan \angle ACE = \frac{1}{3}$, 设 $AE = x$, 则 $AC = AD = 3x$, 分别求得 AC, AB, BC , 进而根据勾股定理列出方程解方程可得 x , 进而根据 $BC = x + 6$ 即可求得.

【详解】(1) $\because BE = BC$,

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE,$$

$$\because \angle AED = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle AED,$$

$$\because AD = AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACE,$$

$\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle AED = \angle ACD + \angle BCE = \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线;

$$(2) \because AD = AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACE,$$

$$\therefore \tan D = \frac{EA}{DA} = \tan \angle ACE = \frac{1}{3},$$

设 $AE = x$, 则 $AC = AD = 3x$,

$$OB = OA = AE + OE = 3 + x, BC = BE = OE + OB = 3 + x + 3 = 6 + x, AB = 2OA = 2x + 6,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$\text{即 } (3x)^2 + (x+6)^2 = (2x+6)^2,$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = 0$ (舍去),

$$\therefore BC = x + 6 = 8.$$

【点睛】本题考查了切线的判定, 勾股定理理解直角三角形, 正切的定义, 利用角度相等则正切值相等将已知条件转化是解题的关键.

27. 已知正方形 $ABCD$, E, F 为平面内两点.

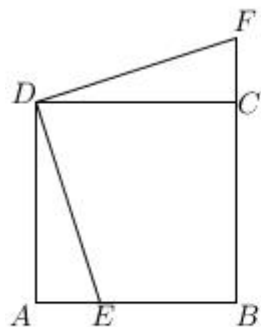


图1

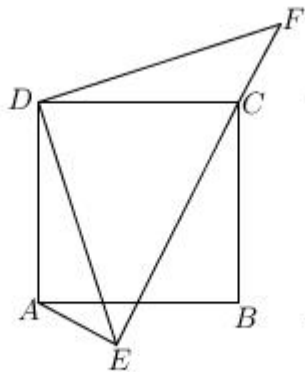


图2

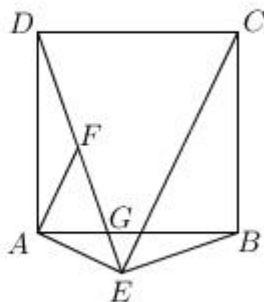


图3

【探究建模】

(1) 如图 1, 当点 E 在边 AB 上时, $DE \perp DF$, 且 B, C, F 三点共线. 求证: $AE = CF$;

【类比应用】

(2) 如图 2, 当点 E 在正方形 $ABCD$ 外部时, $DE \perp DF$, $AE \perp EF$, 且 E, C, F 三点共线. 猜想并证明线段 AE, CE, DE 之间的数量关系;

【拓展迁移】

(3) 如图 3, 当点 E 在正方形 $ABCD$ 外部时, $AE \perp EC$, $AE \perp AF$, $DE \perp BE$, 且 D, F, E 三点共线, DE 与 AB 交于 G 点. 若 $DF = 3$, $AE = \sqrt{2}$, 求 CE 的长.

【答案】(1) 见解析; (2) $AE + CE = \sqrt{2}DE$; 理由见解析 (3) $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据正方形性质以及题意证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ 即可得出结论;

(2) 根据已知条件证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF (AAS)$, 然后证明 $\triangle EDF$ 为等腰直角三角形即可得出结论;

(3) 先证明 $\triangle BAE \cong \triangle DAF (AAS)$, 得出 $\triangle FAE$ 为等腰直角三角形, 根据勾股定理以及等腰直角三角形的性质求出 CH, EH 的长度, 即可得出结论.

【详解】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, B, C, F 三点共线,

$$\therefore DC = DA, \angle DAE = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp DF,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle DCF \\ DA = DC \\ \angle ADE = \angle CDF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (ASA),$$

$$\therefore AE = CF;$$

(2) $\because DE \perp DF$, 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ADC = \angle EDF = 90^\circ, AD = CD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF,$$

$$\because AE \perp EF, DE \perp DF,$$

$$\therefore \angle DEF + \angle F = 90^\circ, \angle AED + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle F,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF \\ \angle AED = \angle F \\ AD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (AAS),$$

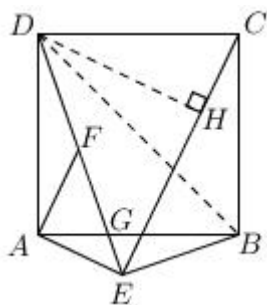
$$\therefore DE = DF, AE = CF,$$

$\therefore \triangle EDF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore EF = \sqrt{2}DE,$$

$$\text{即 } AE + CE = \sqrt{2}DE;$$

(3) 过点 D 作 $DH \perp CE$ 于点 H , 连接 BD ,



$$\therefore \angle DFA = \angle FAE + \angle FEA = 90^\circ + \angle FEA,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FEA + \angle DEB = 90^\circ + \angle FEA,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DFA,$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - \angle FAB, \angle DAF = 90^\circ - \angle FAB,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DAF \\ \angle BEA = \angle DFA \\ BA = DA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAF (AAS),$$

$$\therefore DF = BE = 3, \quad FA = EA = \sqrt{2},$$

$$\therefore AE = FA = \sqrt{2} \text{ 且 } FA \perp AE,$$

$\therefore \triangle FAE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore EF = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2,$$

在 $Rt\triangle DEB$ 中, $DE = 3 + 2 = 5, BE = 3,$

$$\therefore DB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34},$$

$\therefore BD$ 是正方 $ABCD$ 对角线,

$$\therefore AD = CD = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} = \sqrt{17},$$

$$\therefore \angle FEA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DEC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DHE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore DH = EH = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle DHC \text{ 中, } CH = \sqrt{DC^2 - DH^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = CH + EH = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 等腰直角三角形判定与性质, 熟知性质定理是解本题的关键.

28. 如图 1, 二次函数 $y = a(x+3)(x-4)$ 的图象交坐标轴于点 A , $B(0, -2)$, 点 P 为 x 轴上一动点.

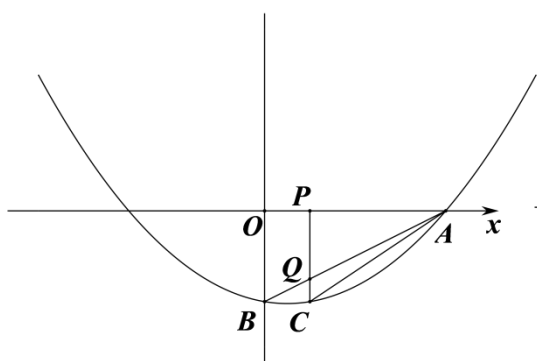


图1

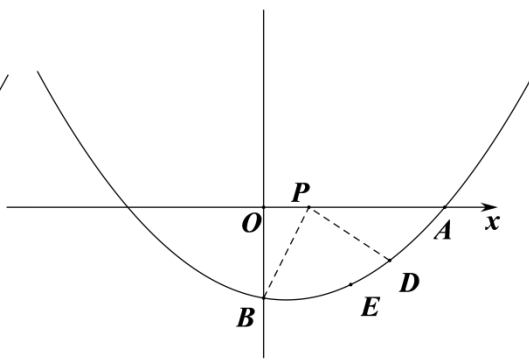


图2

(1) 求二次函数 $y = a(x+3)(x-4)$ 的表达式;

(2) 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴分别交线段 AB , 抛物线于点 Q , C , 连接 AC . 当 $OP = 1$ 时, 求 $\triangle ACQ$ 的面积;

(3) 如图 2, 将线段 PB 绕点 P 逆时针旋转 90 得到线段 PD .

①当点 D 在抛物线上时, 求点 D 的坐标;

②点 $E\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ 在抛物线上, 连接 PE , 当 PE 平分 $\angle BPD$ 时, 直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - 2$; (2) $\frac{3}{4}$; (3) ① $D(3, -1)$ 或 $(-8, 10)$; ② $(-\frac{1}{3}, 0)$ 或 $(2, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 根据 B 点的坐标以及已知条件, 将 B 的坐标代入即可求得 a 的值, 进而求得抛物线的解析式;

(2) 依题意根据 (1) 的解析式求得 A 的坐标, 进而求得 $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$, 据此求得 PQ , 根据 $OP = 1$ 进而求得 C 的坐标, 根据 $S_{\triangle ACQ} = \frac{1}{2} \cdot QC \cdot AP$ 即可求得 $\triangle ACQ$ 的面积;

(3) ①过 D 作 $DF \perp x$ 轴, 分 D 点在 x 轴上方和下方两种情况讨论, 证明 $\triangle BOP \cong \triangle PFD$, 设 $P(a, 0)$, $D(a+2, -a)$ 将点 D 的坐标代入 (1) 中抛物线解析式中即可求得 D 点的坐标情形 2, 方法同情形 1;

②分当 PE 不平行于 y 轴和 $PE \parallel y$ 轴两种情况讨论, 当 PE 不平行于 y 轴时, 过点 B 作 $BM \perp BP$ 交 PE 于点 M , 过点 M 作 $MH \perp OB$ 于点 H , 证明 $\triangle BOP \cong \triangle MHB$ 进而可得 P 的坐标, 当 $PE \parallel y$ 轴时, 结合已知条件即可求得 P 的坐标.

【详解】 (1) $\because$ 二次函数 $y = a(x+3)(x-4)$ 的图象经过 $B(0, -2)$

$$\therefore -12a = -2$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore y = a(x+3)(x-4) = \frac{1}{6}(x+3)(x-4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - 2$$

$$(2) \text{ 由 } y = \frac{1}{6}(x+3)(x-4), \text{ 令 } y = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = -3, x_2 = 4$$

$$\therefore A(4, 0), OA = 4$$

$$\because \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

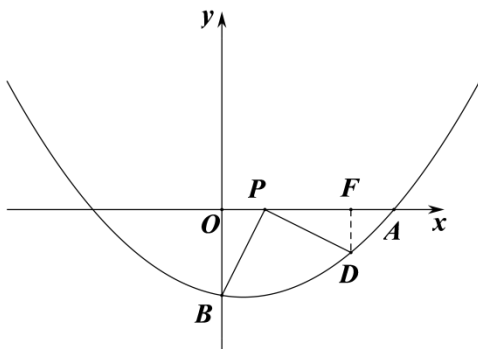
$$\therefore \text{当 } OP = 1 \text{ 时, } PA = OA - OP = 4 - 1 = 3$$

$$PQ = PA \cdot \tan \angle OAB = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x_C = 1, \text{ 则 } y_C = \frac{1}{6}(1+3)(1-4) = -2$$

$$\therefore S_{\triangle ACQ} = \frac{1}{2} \cdot QC \cdot AP = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{4};$$

(3) 如图, 当点 D 在 x 轴下方时, 过点 D 作 $DF \perp AP$ 于点 F ,



$$\text{由 } y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - 2, \text{ 令 } x = 0,$$

$$\text{解得 } y = -2$$

$$\therefore B(0, -2), \quad OB = 2$$

$$\therefore \angle FPD + \angle PDF = 90^\circ,$$

$\because$ 将线段 PB 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PD ,

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OPB + \angle FPD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OPB = \angle PDF$$

$$\because \angle BOP = \angle PFD = 90^\circ, PB = DP$$

$$\therefore \triangle BOP \cong \triangle PFD$$

$$\therefore BO = PF = 2, \quad OP = DF,$$

$$\text{设 } OP = DF = a (a > 0),$$

$$\therefore OF = OP + PF = a + 2$$

$$\therefore D(a+2, -a)$$

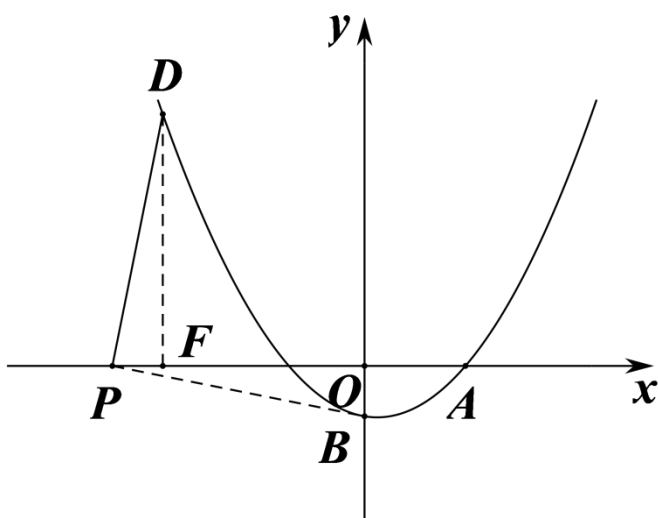
$\because D$ 点在抛物线上,

$$\therefore \frac{1}{6}(a+2+3)(a+2-4) = -a$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, a_2 = -10 \quad (\text{舍})$$

$$\therefore D(3, -1)$$

当点 D 在 x 轴上方时, 如图,



过点 D 作 $DF \perp AP$ 于点 F ，设 $OF = a$ ($a > 0$)

同理可得 $\triangle BOP \cong \triangle PFD$

$$\therefore BO = PF = 2, DF = OP = a + 2$$

$$\therefore D(-a, a+2)$$

$\because D$ 点在抛物线上,

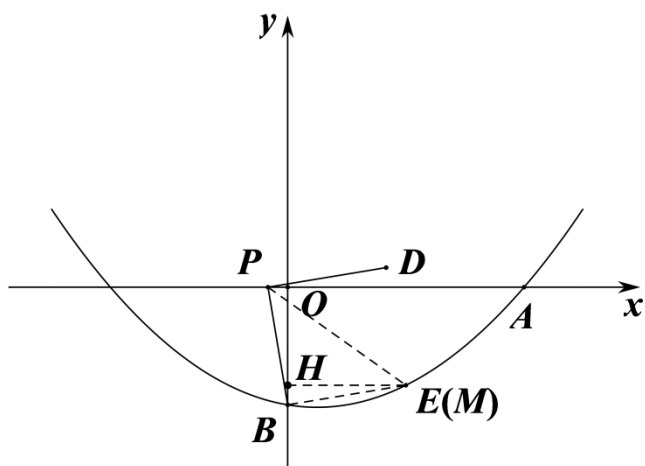
$$\therefore \frac{1}{6}(-a+3)(-a-4) = a+2$$

解得 $a_1 = 8, a_2 = -3$ (舍去),

$$\therefore D(-8, 10)$$

综上所述, $D(3, -1)$ 或 $(-8, 10)$;

②当 PE 不平行于 y 轴时, 过点 B 作 $BM \perp BP$ 交 PE 于点 M , 过点 M 作 $MH \perp OB$ 于点 H , 如图,



$\because PE$ 平分 $\angle BPD$, $PD \perp PB$,

$$\therefore \angle BPE = 45^\circ,$$

$\because BP \perp BM$,

$$\therefore \angle HBM + \angle PBO = 90^\circ,$$

$\because \angle BOP = \angle BHM = 90^\circ, PB = BM$

$$\therefore \angle HBM + \angle PBO = 90^\circ$$

$\because \angle BPO + \angle PBO = 90^\circ$

$$\therefore \angle BPO = \angle HBM$$

$\therefore \angle BOP = \angle BHM = 90^\circ, PB = BM$

$$\therefore \triangle BOP \cong \triangle MHB$$

$$\therefore HM = OB = 2$$

$$\therefore x_M = 2$$

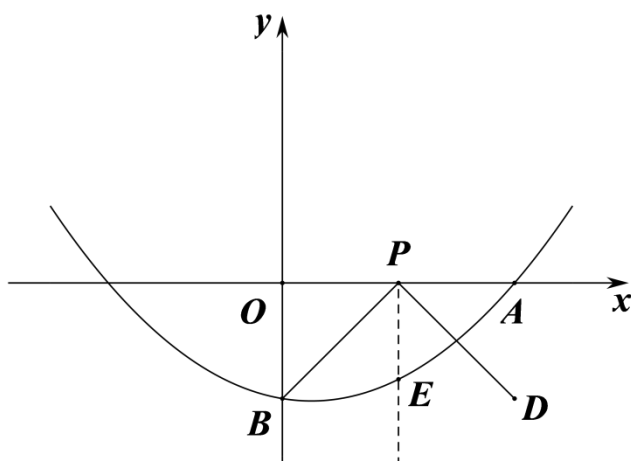
$\therefore$ 当 PE 不平行于 y 轴时, E, M 重合,

$$\because \triangle BOP \cong \triangle MHB, E\left(2, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore OP = BH = OB - OH = 2 - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

当 $PE \parallel y$ 轴时, 如图,



此时 $x_P = x_E$

则 $P(2, 0)$

综上所述, 当 PE 平分 $\angle BPD$ 时, 点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 或 $(2, 0)$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数与坐标轴交点, 正切的定义, 三角形全等的性质与判定, 分类讨论是解题的关键.

