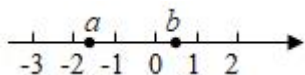


2021 年湖南省郴州市中考数学试卷

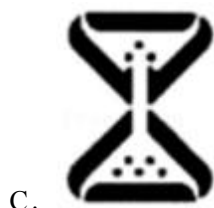
一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2021·郴州) 实数 a , b 在数轴上的位置如图所示, 则下列式子正确的是()



- A. $a > b$ B. $|a| > |b|$ C. $ab > 0$ D. $a + b > 0$

2. (3 分) (2021·郴州) 下列垃圾分类图标分别表示: “可回收垃圾”、“有害垃圾”、“厨余垃圾”、“其它垃圾”, 其中既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是()



3. (3 分) (2021·郴州) 为响应习近平总书记“坚决打赢关键核心技术攻坚战”的号召, 某科研团队最近攻克了 $7nm$ 的光刻机难题, 其中 $1nm = 0.000000001m$, 则 $7nm$ 用科学记数法表示为()

- A. $0.7 \times 10^8 m$ B. $7 \times 10^{-8} m$ C. $0.7 \times 10^{-8} m$ D. $7 \times 10^{-9} m$

4. (3 分) (2021·郴州) 下列运算正确的是()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(a^3)^2 = a^5$ C. $\sqrt{(-3)^2} = 3$ D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

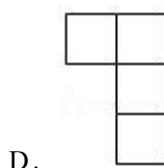
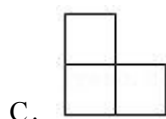
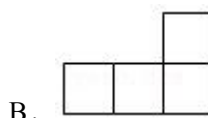
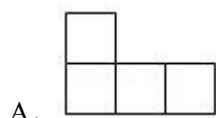
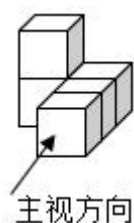
5. (3 分) (2021·郴州) 下列说法正确的是()

- A. “明天下雨的概率为 80%”, 意味着明天有 80% 的时间下雨
B. 经过有信号灯的十字路口时, 可能遇到红灯, 也可能遇到绿灯
C. “某彩票中奖概率是 1%”, 表示买 100 张这种彩票一定会有 1 张中奖
D. 小明前几次的数学测试成绩都在 90 分以上这次数学测试成绩也一定在 90 分以上

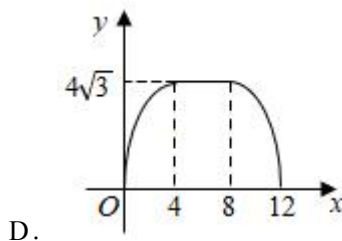
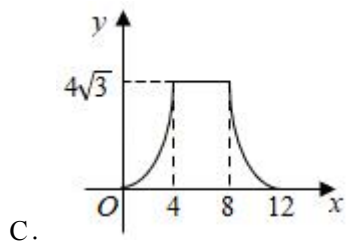
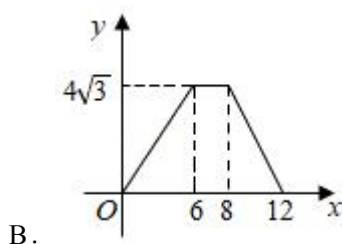
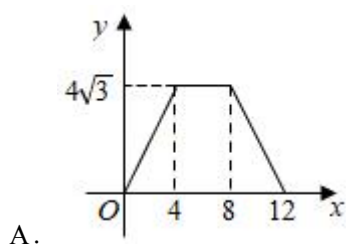
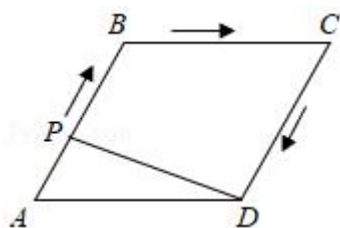
6. (3 分) (2021·郴州) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$, 则 $x - y$ 的值为()

- A. 2 B. 6 C. -2 D. -6

7. (3分) (2021·郴州) 由 5 个相同的小立方体搭成的物体如图所示, 则它的俯视图为 ()



8. (3分) (2021·郴州) 如图, 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 点 P 从点 A 出发, 沿路线 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 运动. 设 P 点经过的路程为 x , 以点 A, D, P 为顶点的三角形的面积为 y , 则下列图象能反映 y 与 x 的函数关系的是 ()



二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3分) (2021·郴州) 使 $\sqrt{\frac{2}{x}}$ 有意义的 x 的取值范围是 ____.

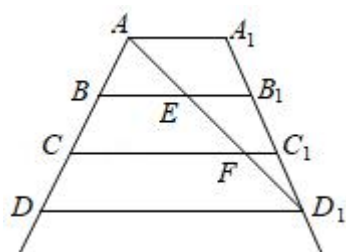
10. (3分) (2021·郴州) 在反比例函数 $y = \frac{m-3}{x}$ 的图象的每一支曲线上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大, 则 m 的取值范围是 ____.

11. (3分)(2021·郴州) 为庆祝中国共产党建党一百周年, 某校开展了主题为“我身边的共产党员”的演讲比赛. 比赛从演讲内容、演讲技巧、演讲效果三个方面打分, 最终得分按4:3:3的比例计算. 若选手甲在演讲内容、演讲技巧、演讲效果三个方面的得分分别为95分、80分、90分, 则选手甲的最终得分为 ____分.

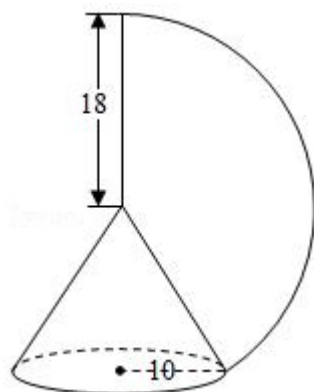
12. (3分)(2021·郴州) 一个多边形的每一个外角都等于 60° , 则这个多边形的内角和为 ____度.

13. (3分)(2021·郴州) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $m =$ ____.

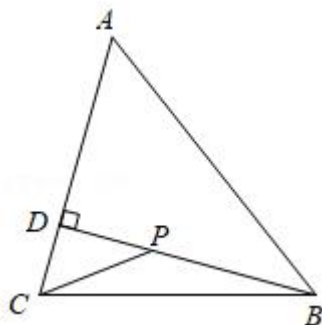
14. (3分)(2021·郴州) 如图是一架梯子的示意图, 其中 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, 且 $AB = BC = CD$. 为使其更稳固, 在 A, D_1 间加绑一条安全绳(线段 AD_1)量得 $AE = 0.4m$, 则 $AD_1 =$ ____ m .



15. (3分)(2021·郴州) 如图, 方老师用一张半径为 $18cm$ 的扇形纸板, 做了一个圆锥形帽子(接缝忽略不计). 如果圆锥形帽子的半径是 $10cm$, 那么这张扇形纸板的面积是 ____ cm^2 (结果用含 π 的式子表示).



16. (3分)(2021·郴州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 4$, $\sin A = \frac{4}{5}$, $BD \perp AC$ 交 AC 于点 D . 点 P 为线段 BD 上的动点, 则 $PC + \frac{3}{5}PB$ 的最小值为 ____.

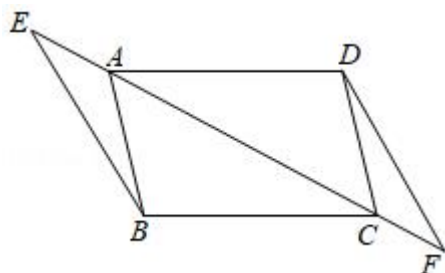


三、解答题（17~19 题每题 6 分，20~23 题每题 8 分，24~25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 82 分）

17.（6 分）（2021·郴州）计算： $(2021-\pi)^0 - |2-\sqrt{12}| + (\frac{1}{2})^{-1} \cdot \tan 60^\circ$.

18.（6 分）（2021·郴州）先化简，再求值： $(\frac{a-1}{a^2+a} - \frac{a-3}{a^2-1}) \div \frac{1}{a-1}$ ，其中 $a = \sqrt{2}$.

19.（6 分）（2021·郴州）如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB = DC$ ，将对角线 AC 向两端分别延长至点 E ， F ，使 $AE = CF$ ．连接 BE ， DF ，若 $BE = DF$ ．证明：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．



20.（8 分）（2021·郴州）我市为加快推进生活垃圾分类工作，对分类垃圾桶实行统一的外形、型号、颜色等，其中，可回收物用蓝色收集桶，有害垃圾用红色收集桶，厨余垃圾用绿色收集桶，其他垃圾用灰色收集桶．为了解学生对垃圾分类知识的掌握情况，某校宣传小组就“用过的餐巾纸应投放到哪种颜色的收集桶”在全校随机采访了部分学生，根据调查结果，绘制了如图所示的两幅不完整的统计

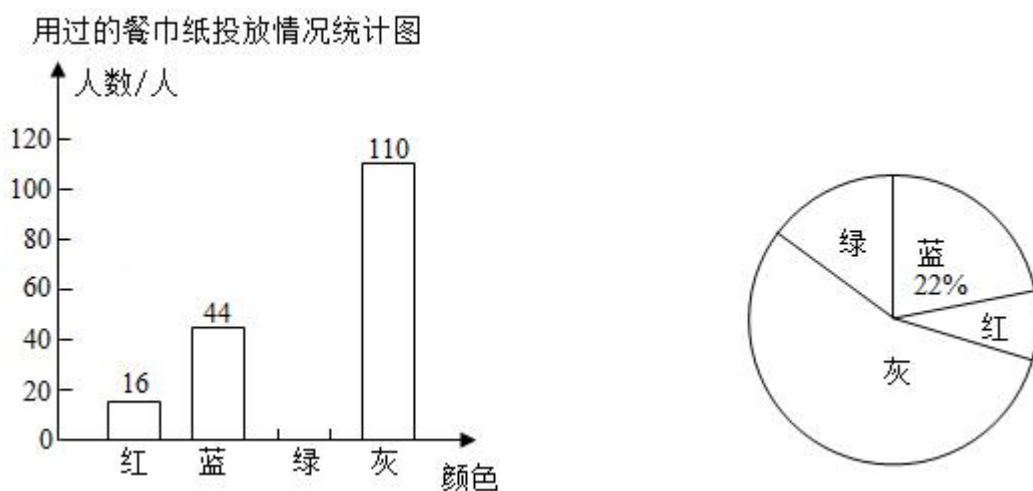


图.

根据图中信息，解答下列问题：

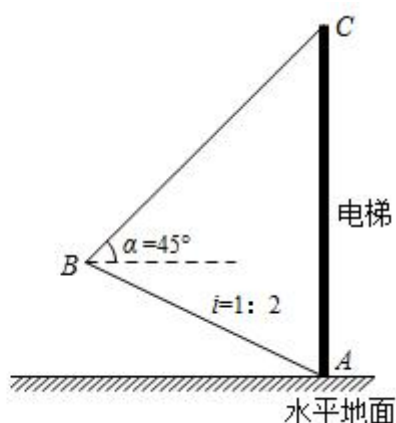
- (1) 此次调查一共随机采访了 ____ 名学生，在扇形统计图中，“灰”所在扇形的圆心角的度数为 ____ 度；
- (2) 补全条形统计图（要求在条形图上方注明人数）；
- (3) 若该校有 3600 名学生，估计该校学生将用过的餐巾纸投放到红色收集桶的人数；
- (4) 李老师计划从 A ， B ， C ， D 四位学生中随机抽取两人参加学校的垃圾分类知识抢答赛，请用树状图法或列表法求出恰好抽中 A ， B 两人的概率.

21. (8 分) (2021·郴州) 如图，莽山五指峰景区新建了一座垂直观光电梯. 某测绘兴趣小组为测算电梯 AC 的高度，测得斜坡 $AB=105$ 米，坡度 $i=1:2$ ，在 B 处测得电梯顶端 C 的仰角 $\alpha=45^\circ$ ，求观光电梯 AC 的高度.

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{5} \approx 2.24$. 结果精确到 0.1 米)



莽山五指峰景区摩天岭垂直电梯



22. (8 分) (2021·郴州) “七·一”建党节前夕，某校决定购买 A ， B 两种奖品，用于表彰在“童心向党”活动中表现突出的学生. 已知 A 奖品比 B 奖品每件多 25 元，预算资金为 1700 元，其中 800 元购买 A 奖品，其余资金购买 B 奖品，且购买 B 奖品的数量是 A 奖品的 3 倍.

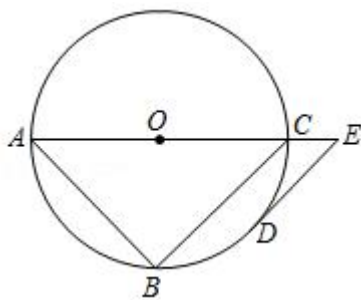
(1) 求 A , B 奖品的单价;

(2) 购买当日, 正逢该店搞促销活动, 所有商品均按原价八折销售, 故学校调整了购买方案: 不超过预算资金且购买 A 奖品的资金不少于 720 元, A , B 两种奖品共 100 件, 求购买 A , B 两种奖品的数量, 有哪几种方案?

23. (8 分)(2021·郴州) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AC 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点, $DE \parallel BC$ 交 AC 的延长线于点 E .

(1) 求证: 直线 DE 与 $\odot O$ 相切;

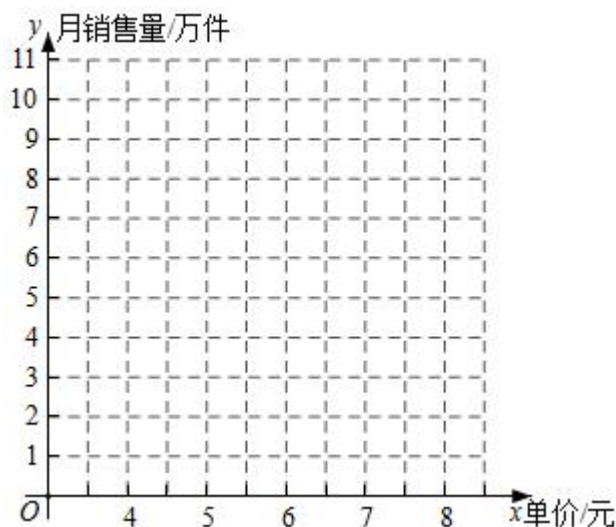
(2) 若 $\odot O$ 的直径是 10, $\angle A = 45^\circ$, 求 CE 的长.



24. (10 分)(2021·郴州) 某商店从厂家以每件 2 元的价格购进一批商品, 在市场试销中发现, 此商品的月销售量 y (单位: 万件) 与销售单价 x (单位: 元) 之间有如下表所示关系:

x	...	4.0	5.0	5.5	6.5	7.5	...
y	...	8.0	6.0	5.0	3.0	1.0	...

(1) 根据表中的数据, 在如图中描出实数对 (x, y) 所对应的点, 并画出 y 关于 x 的函数图象;



(2) 根据画出的函数图象, 求出 y 关于 x 的函数表达式;

(3) 设经营此商品的月销售利润为 P (单位: 万元),

①写出 P 关于 x 的函数表达式；

②该商店计划从这批商品获得的月销售利润为 10 万元（不计其它成本），若物价局限定商品的销售单价不得超过进价的 200%，则此时的销售单价应定为多少元？

25.（10 分）（2021·郴州）如图 1，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 E ， F 分别为 AB ， AC 的中点， H 为线段 EF 上一动点（不与点 E ， F 重合），将线段 AH 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 AG ，连接 GC ， HB 。

（1）证明： $\triangle AHB \cong \triangle AGC$ ；

（2）如图 2，连接 GF ， HG ， HG 交 AF 于点 Q 。

①证明：在点 H 的运动过程中，总有 $\angle HFG = 90^\circ$ ；

②若 $AB = AC = 4$ ，当 EH 的长度为多少时 $\triangle AQG$ 为等腰三角形？

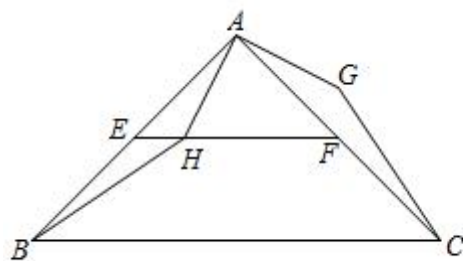


图1

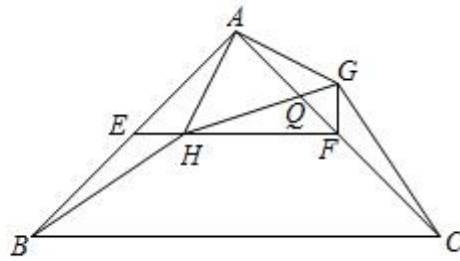


图2

26.（12 分）（2021·郴州）将抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 向左平移 1 个单位，再向上平移 4 个单位后，得到抛物线 $H: y = a(x-h)^2 + k$ 。抛物线 H 与 x 轴交于点 A ， B ，与 y 轴交于点 C 。已知 $A(-3, 0)$ ，点 P 是抛物线 H 上的一个动点。

（1）求抛物线 H 的表达式；

（2）如图 1，点 P 在线段 AC 上方的抛物线 H 上运动（不与 A ， C 重合），过点 P 作 $PD \perp AB$ ，垂足为 D ， PD 交 AC 于点 E 。作 $PF \perp AC$ ，垂足为 F ，求 $\triangle PEF$ 的面积的最大值；

（3）如图 2，点 Q 是抛物线 H 的对称轴 l 上的一个动点，在抛物线 H 上，是否存在点 P ，使得以点 A ， P ， C ， Q 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，说明理由。

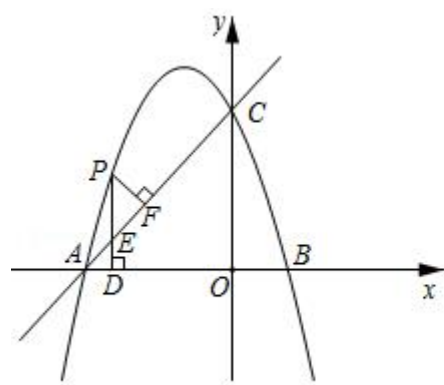


图1

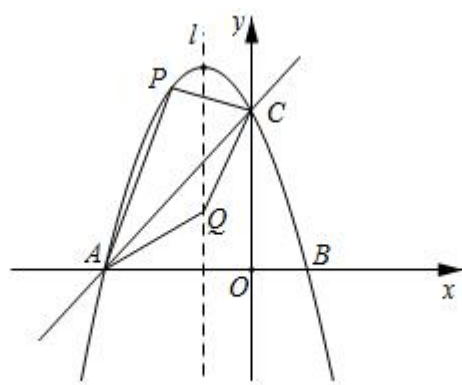
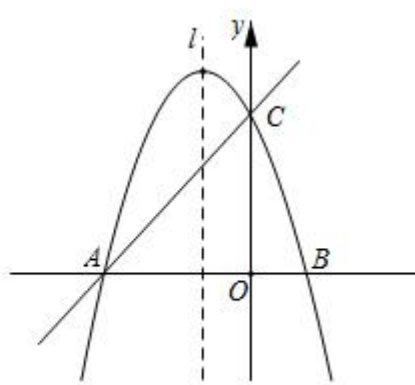


图2



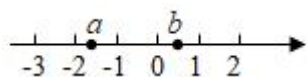
备用图

2021 年湖南省郴州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2021·郴州) 实数 a , b 在数轴上的位置如图所示, 则下列式子正确的是()



A. $a > b$

B. $|a| > |b|$

C. $ab > 0$

D. $a + b > 0$

【解答】解: A. $\because a < 0$, $b > 0$, $\therefore a < b$, 故 A 项不符合题意;

B. 由数轴可知 $|a| > |b|$, 故 B 项符合题意;

C. $\because a < 0$, $b > 0$, $\therefore ab < 0$, 故 C 项不符合题意;

D. $\because a < 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$, $\therefore a + b < 0$, 故 D 项不符合题意.

故选: B.

2. (3 分) (2021·郴州) 下列垃圾分类图标分别表示: “可回收垃圾”、“有害垃圾”、“厨余垃圾”、“其它垃圾”, 其中既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是()



【解答】解: A. 既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形. 故本选项不合题意;

B. 既是轴对称图形, 又是中心对称图形. 故本选项符合题意;

C. 是轴对称图形, 不是中心对称图形. 故本选项不合题意;

D. 既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形. 故本选项不合题意.

故选: B.

3. (3 分) (2021·郴州) 为响应习近平总书记“坚决打赢关键核心技术攻坚战”的号召, 某科研团队最近攻克了 $7nm$ 的光刻机难题, 其中 $1nm = 0.000000001m$, 则 $7nm$ 用科学记数法表示为()

- A. $0.7 \times 10^8 m$ B. $7 \times 10^{-8} m$ C. $0.7 \times 10^{-8} m$ D. $7 \times 10^{-9} m$

【解答】解： $\because 1nm = 0.000000001m$ ，

$$\therefore 7nm = 7 \times 10^{-9} m.$$

故选：D.

4. (3分) (2021·郴州) 下列运算正确的是()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(a^3)^2 = a^5$ C. $\sqrt{(-3)^2} = 3$ D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【解答】解：A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故A选项不符合题意；

B. $(a^3)^2 = a^6$ ，故B选项不符合题意；

C. $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ，故C选项符合题意；

D. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故D选项不符合题意；

故选：C.

5. (3分) (2021·郴州) 下列说法正确的是()

- A. “明天下雨的概率为80%”，意味着明天有80%的时间下雨
B. 经过有信号灯的十字路口时，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯
C. “某彩票中奖概率是1%”，表示买100张这种彩票一定会有1张中奖
D. 小明前几次的数学测试成绩都在90分以上这次数学测试成绩也一定在90分以上

【解答】解：A. 明天下雨的概率为80%，只是说明明天下雨的可能性大，与时间无关，故本选项不符合题意；

B. 经过有信号灯的十字路口时，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯，故本选项符合题意；

C. 某彩票中奖概率是1%，买100张这种彩票中奖是随机事件，不一定会有1张中奖，故本选项不符合题意；

D. 小明前几次的数学测试成绩都在90分以上这次数学测试成绩不一定在90分以上，故本选项不符合题意.

故选：B.

6. (3分) (2021·郴州) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ ，则 $x - y$ 的值为()

- A. 2 B. 6 C. -2 D. -6

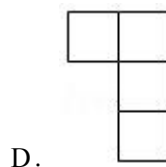
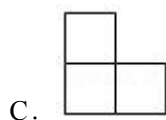
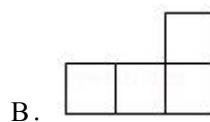
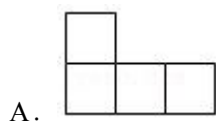
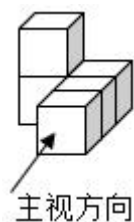
【解答】解：
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \text{①} \\ x - 2y = 1 \text{②} \end{cases},$$

① + ②，得 $3x - 3y = 6$ ，

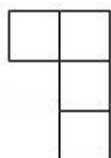
两边都除以 3 得： $x - y = 2$ ，

故选：A．

7. (3 分) (2021·郴州) 由 5 个相同的小立方体搭成的物体如图所示，则它的俯视图为 ()

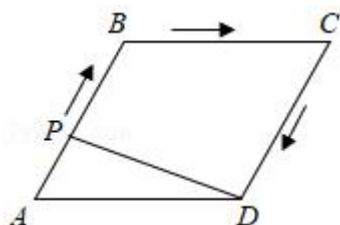


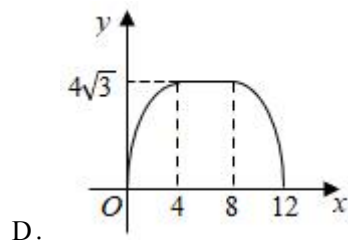
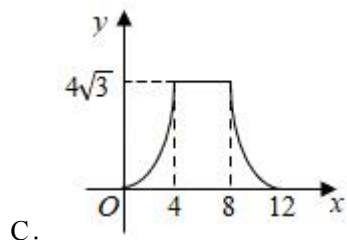
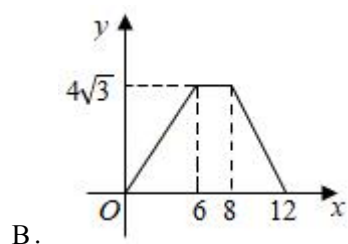
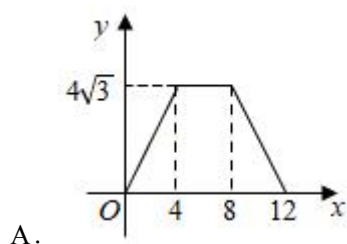
【解答】解：该组合体的俯视图如下：



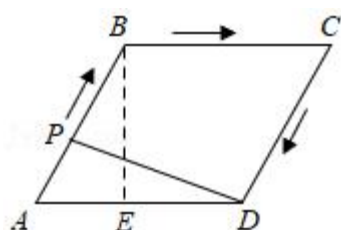
故选：D．

8. (3 分) (2021·郴州) 如图，在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，点 P 从点 A 出发，沿路线 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 运动．设 P 点经过的路程为 x ，以点 A ， D ， P 为顶点的三角形的面积为 y ，则下列图象能反映 y 与 x 的函数关系的是 ()





【解答】 解：过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，如图所示：



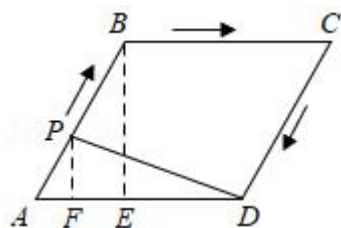
边长为 4 的菱形， $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，

$$\therefore AB = AD = BC = 4,$$

$$\therefore \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2, \quad BE = 2\sqrt{3},$$

当点 P 从点 A 运动到点 B 时，过点 P 作 $PF \perp AD$ 于点 F ，



$$\text{则 } AP = x, \quad AF = \frac{1}{2}x, \quad PF = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PF = \frac{1}{2} \times 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{3}x,$$

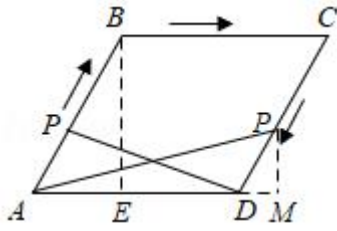
$\therefore \triangle ADP$ 的面积逐渐增大；

当在线段 BC 上时，

$$S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BE = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$\therefore \triangle ADP$ 的面积保持不变；

当点 P 在线段 CD 上时, 如图, 过点 P 作 $PM \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 M ,



则 $AB + BC + CP = x$,

则 $DP = 12 - x$, $DM = 6 - \frac{1}{2}x$, $PM = \sqrt{3}DM = 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$$S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PM = \frac{1}{2} \times 4 \times (6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x) = 12\sqrt{3} - \sqrt{3}x,$$

$\therefore \triangle ADP$ 的面积逐渐减小.

故选: A .

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

9. (3 分) (2021·郴州) 使 $\sqrt{\frac{2}{x}}$ 有意义的 x 的取值范围是 $x > 0$.

【解答】解: 使 $\sqrt{\frac{2}{x}}$ 有意义, 则 $\frac{2}{x} \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得: $x > 0$.

故答案为: $x > 0$.

10. (3 分) (2021·郴州) 在反比例函数 $y = \frac{m-3}{x}$ 的图象的每一支曲线上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大, 则 m 的取值范围是 $m < 3$.

【解答】解: 比例函数 $y = \frac{m-3}{x}$ 图象上的每一条曲线上, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore m - 3 < 0,$$

$$\therefore m < 3.$$

故答案为: $m < 3$.

11. (3 分) (2021·郴州) 为庆祝中国共产党建党一百周年, 某校开展了主题为“我身边的共产党员”的演讲比赛. 比赛从演讲内容、演讲技巧、演讲效果三个方面打分, 最终得分按 4:3:3 的比例计算. 若选手甲在演讲内容、演讲技巧、演讲效果三个方面的得分分别为 95 分、80 分、90 分, 则选手甲的最终得分为 89 分.

【解答】解: 选手甲的最终得分为: $\frac{95 \times 4 + 80 \times 3 + 90 \times 3}{4 + 3 + 3} = \frac{890}{10} = 89$ (分).

故答案为: 89.

12. (3分)(2021·郴州) 一个多边形的每一个外角都等于 60° , 则这个多边形的内角和为 720 度.

【解答】解: $\because$ 多边形的每一个外角都等于 60° ,

$\therefore$ 它的边数为: $360^\circ \div 60^\circ = 6$,

$\therefore$ 它的内角和: $180^\circ \times (6 - 2) = 720^\circ$,

故答案为: 720.

13. (3分)(2021·郴州) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $m = \frac{25}{4}$.

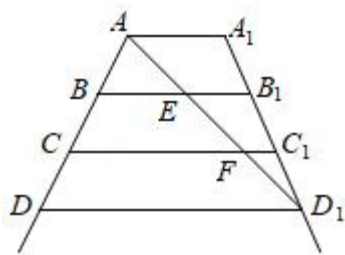
【解答】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4m = 0$,

解得: $m = \frac{25}{4}$.

故答案为: $\frac{25}{4}$.

14. (3分)(2021·郴州) 如图是一架梯子的示意图, 其中 $AA_1 // BB_1 // CC_1 // DD_1$, 且 $AB = BC = CD$. 为使其更稳固, 在 A , D_1 间加绑一条安全绳 (线段 AD_1) 量得 $AE = 0.4m$, 则 $AD_1 = \underline{1.2} m$.



【解答】解: $\because BB_1 // CC_1$,

$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC}$,

$\because AB = BC$,

$\therefore AE = EF$,

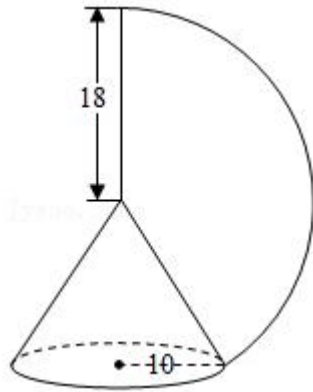
同理可得: $AE = EF = FD_1$,

$\because AE = 0.4m$,

$\therefore AD_1 = 0.4 \times 3 = 1.2(m)$,

故答案为：1.2.

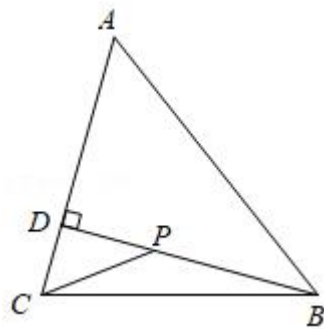
15. (3分)(2021·郴州)如图,方老师用一张半径为 18cm 的扇形纸板,做了一个圆锥形帽子(接缝忽略不计).如果圆锥形帽子的半径是 10cm ,那么这张扇形纸板的面积是 180π cm^2 (结果用含 π 的式子表示).



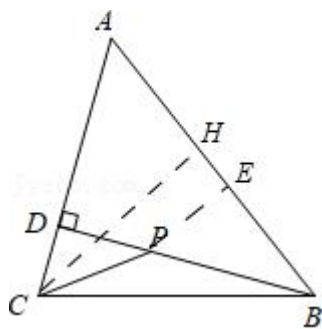
【解答】解：这张扇形纸板的面积 $= \frac{1}{2} \times 2\pi \times 10 \times 18 = 180\pi (\text{cm}^2)$.

故答案为 180π .

16. (3分)(2021·郴州)如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=4$, $\sin A = \frac{4}{5}$, $BD \perp AC$ 交 AC 于点 D .点 P 为线段 BD 上的动点,则 $PC + \frac{3}{5}PB$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$.



【解答】解：过点 P 作 $PE \perp AB$ 于点 E ,过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ,



$\because BD \perp AC$,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{4}{5}, \quad AB = 5,$$

$$\therefore BD = 4,$$

$$\text{由勾股定理得 } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore \sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{PE}{BP} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore EP = \frac{3}{5}BP,$$

$$\therefore PC + \frac{3}{5}PB = PC + PE,$$

即点 C 、 P 、 E 三点共线时， $PC + \frac{3}{5}PB$ 最小，

$\therefore PC + \frac{3}{5}PB$ 的最小值为 CH 的长，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times AB \times CH,$$

$$\therefore 4 \times 4 = 5 \times CH,$$

$$\therefore CH = \frac{16}{5}.$$

$$\therefore PC + \frac{3}{5}PB \text{ 的最小值为 } \frac{16}{5}.$$

故答案为： $\frac{16}{5}$.

三、解答题（17～19 题每题 6 分，20～23 题每题 8 分，24～25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 82 分）

$$17. (6 \text{ 分}) (2021 \cdot \text{郴州}) \text{ 计算: } (2021 - \pi)^0 - |2 - \sqrt{12}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \tan 60^\circ.$$

$$\text{【解答】解: 原式} = 1 - (2\sqrt{3} - 2) + 2 \times \sqrt{3}$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3}$$

$$= 3.$$

$$18. (6 \text{ 分}) (2021 \cdot \text{郴州}) \text{ 先化简, 再求值: } \left(\frac{a-1}{a^2+a} - \frac{a-3}{a^2-1}\right) \div \frac{1}{a-1}, \text{ 其中 } a = \sqrt{2}.$$

$$\text{【解答】解: } \left(\frac{a-1}{a^2+a} - \frac{a-3}{a^2-1}\right) \div \frac{1}{a-1}$$

$$= \left[\frac{a-1}{a(a+1)} - \frac{a-3}{(a+1)(a-1)}\right] \cdot (a-1)$$

$$= \frac{(a-1)^2 - a(a-3)}{a(a+1)(a-1)} \cdot (a-1)$$

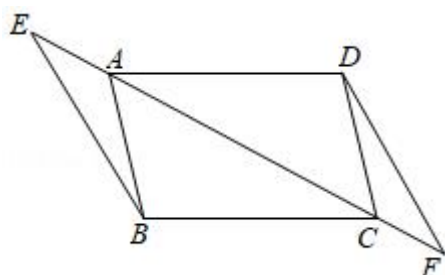
$$= \frac{a^2 - 2a + 1 - a^2 + 3a}{a(a+1)(a-1)} \cdot (a-1)$$

$$= \frac{a+1}{a(a+1)(a-1)} \cdot (a-1)$$

$$= \frac{1}{a},$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

19. (6分) (2021·郴州) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = DC$, 将对角线 AC 向两端分别延长至点 E, F , 使 $AE = CF$. 连接 BE, DF , 若 $BE = DF$. 证明: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【解答】证明: 在 $\triangle BEA$ 和 $\triangle DFC$ 中,

$$\begin{cases} AB = DC \\ AE = CF \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEA \cong \triangle DFC (SSS),$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FCD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DCA,$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\because AB = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

20. (8分) (2021·郴州) 我市为加快推进生活垃圾分类工作, 对分类垃圾桶实行统一的外形、型号、颜色等, 其中, 可回收物用蓝色收集桶, 有害垃圾用红色收集桶, 厨余垃圾用绿色收集桶, 其他垃圾用灰色收集桶. 为了解学生对垃圾分类知识的掌握情况, 某校宣传小组就“用过的餐巾纸应投放到哪种颜色的收集桶”在全校随机采访了部分学生, 根据调查结果, 绘制了如图所示的两幅不完整的统计

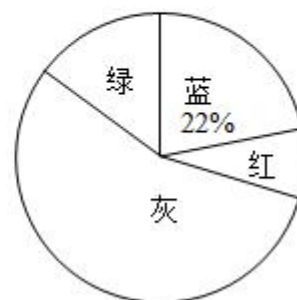
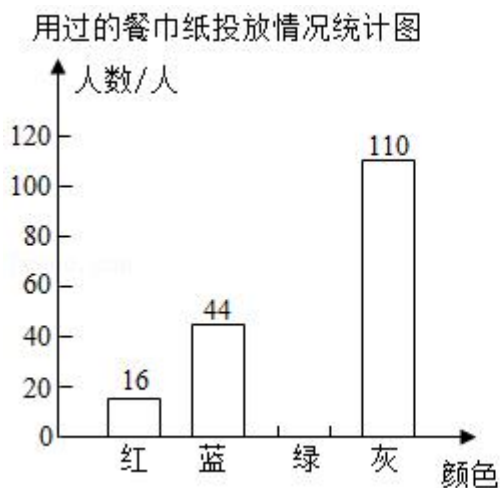


图.

根据图中信息，解答下列问题：

- (1) 此次调查一共随机采访了 200 名学生，在扇形统计图中，“灰”所在扇形的圆心角的度数为 198 度；
- (2) 补全条形统计图（要求在条形图上方注明人数）；
- (3) 若该校有 3600 名学生，估计该校学生将用过的餐巾纸投放到红色收集桶的人数；
- (4) 李老师计划从 A ， B ， C ， D 四位学生中随机抽取两人参加学校的垃圾分类知识抢答赛，请用树状图法或列表法求出恰好抽中 A ， B 两人的概率．

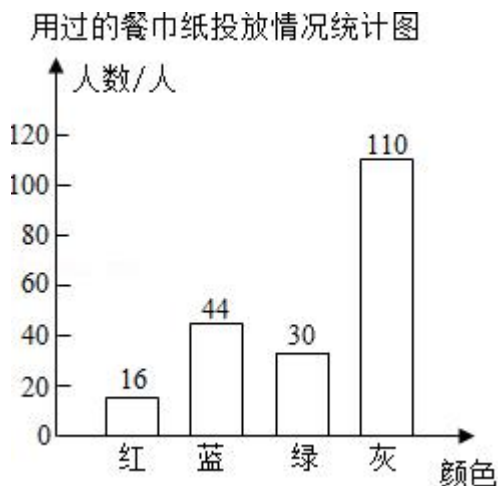
【解答】 解：(1) 此次调查一共随机采访学生 $44 \div 22\% = 200$ （名），

在扇形统计图中，“灰”所在扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{110}{200} = 198^\circ$ ，

故答案为：200，198；

(2) 绿色部分的人数为 $200 - (16 + 44 + 110) = 30$ （人），

补全图形如下：



(3) 估计该校学生将用过的餐巾纸投放到红色收集桶的人数 $3600 \times \frac{16}{200} = 288$ （人）；

(4) 列表如下:

	A	B	C	D
A		(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)		(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)		(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	

由表格知, 共有 12 种等可能结果, 其中恰好抽中 A , B 两人的有 2 种结果,

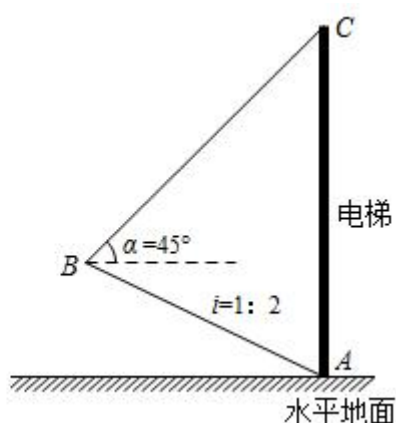
所以恰好抽中 A , B 两人的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

21. (8 分) (2021·郴州) 如图, 莽山五指峰景区新建了一座垂直观光电梯. 某测绘兴趣小组为测算电梯 AC 的高度, 测得斜坡 $AB = 105$ 米, 坡度 $i = 1:2$, 在 B 处测得电梯顶端 C 的仰角 $\alpha = 45^\circ$, 求观光电梯 AC 的高度.

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{5} \approx 2.24$. 结果精确到 0.1 米)



莽山五指峰景区摩天岭垂直电梯



【解答】 解: 过 B 作 $BM \perp$ 水平地面于 M , $BN \perp AC$ 于 N , 如图所示:

则四边形 $AMBN$ 是矩形,

$$\therefore AN = BM, \quad BN = MA,$$

$$\because \text{斜坡 } AB = 105 \text{ 米, 坡度 } i = 1:2 = \frac{BM}{AM},$$

$$\therefore \text{设 } BM = x \text{ 米, 则 } AM = 2x \text{ 米,}$$

$$\therefore AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x = 105,$$

$$\therefore x = 21\sqrt{5},$$

$$\therefore AN = BM = 21\sqrt{5} \text{ (米)}, \quad BN = AM = 42\sqrt{5} \text{ (米)},$$

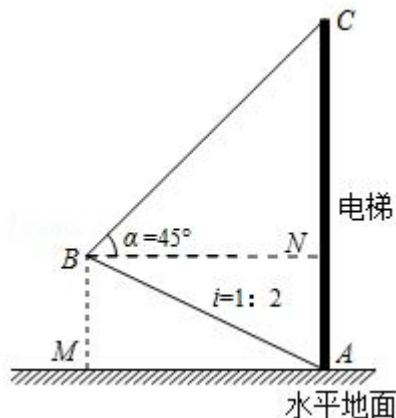
在 $\text{Rt}\triangle BCN$ 中, $\angle CBN = \alpha = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BCN$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CN = BN = 42\sqrt{5} \text{ (米)},$$

$$\therefore AC = AN + CN = 21\sqrt{5} + 42\sqrt{5} = 63\sqrt{5} \approx 141.1 \text{ (米)},$$

答: 观光电梯 AC 的高度约为 141.1 米.



22. (8分)(2021·郴州)“七·一”建党节前夕,某校决定购买 A , B 两种奖品,用于表彰在“童心向党”活动中表现突出的学生.已知 A 奖品比 B 奖品每件多 25 元,预算资金为 1700 元,其中 800 元购买 A 奖品,其余资金购买 B 奖品,且购买 B 奖品的数量是 A 奖品的 3 倍.

(1) 求 A , B 奖品的单价;

(2) 购买当日,正逢该店搞促销活动,所有商品均按原价八折销售,故学校调整了购买方案:不超过预算资金且购买 A 奖品的资金不少于 720 元, A , B 两种奖品共 100 件,求购买 A , B 两种奖品的数量,有哪几种方案?

【解答】解: (1) 设 A 奖品的单价为 x 元,则 B 奖品的单价为 $(x-25)$ 元,

$$\text{由题意得: } \frac{800}{x} \times 3 = \frac{1700 - 800}{x - 25},$$

解得: $x = 40$,

经检验, $x = 40$ 是原方程的解,

$$\text{则 } x - 25 = 15,$$

答: A 奖品的单价为 40 元,则 B 奖品的单价为 15 元;

(2) 设购买 A 种奖品的数量为 m 件,则购买 B 种奖品的数量为 $(100-m)$ 件,

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 40 \times 0.8 \times m \geq 720 \\ 40 \times 0.8 \times m + 15 \times 0.8 \times (100 - m) \leq 700 \end{cases},$$

解得： $22.5 \leq m \leq 25$ ，

$\because m$ 为正整数，

$\therefore m$ 的值为 23，24，25，

$\therefore$ 有三种方案：

①购买 A 种奖品 23 件，B 种奖品 77 件；

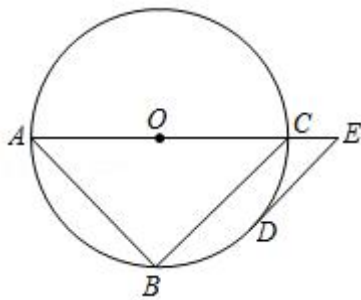
②购买 A 种奖品 24 件，B 种奖品 76 件；

③购买 A 种奖品 25 件，B 种奖品 75 件．

23. (8 分)(2021·郴州)如图， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形， AC 是 $\odot O$ 的直径，点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点， $DE \parallel BC$ 交 AC 的延长线于点 E ．

(1) 求证：直线 DE 与 $\odot O$ 相切；

(2) 若 $\odot O$ 的直径是 10， $\angle A = 45^\circ$ ，求 CE 的长．



【解答】(1) 证明：连接 OD ，如图，

$\because$ 点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

$\therefore OD \perp BC$ ，

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore OD \perp DE$ ，

$\therefore$ 直线 DE 与 $\odot O$ 相切；

(2) 解： $\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ ，

$\because \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = 45^\circ$ ，

$\because BC \parallel DE$ ，

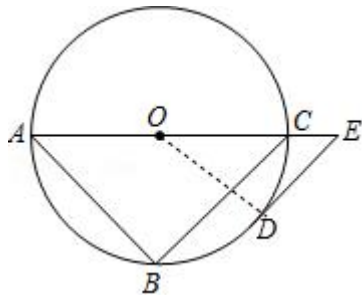
$\therefore \angle E = 45^\circ$ ，

而 $\angle ODE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ODE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore OE = \sqrt{2}OD = 5\sqrt{2},$$

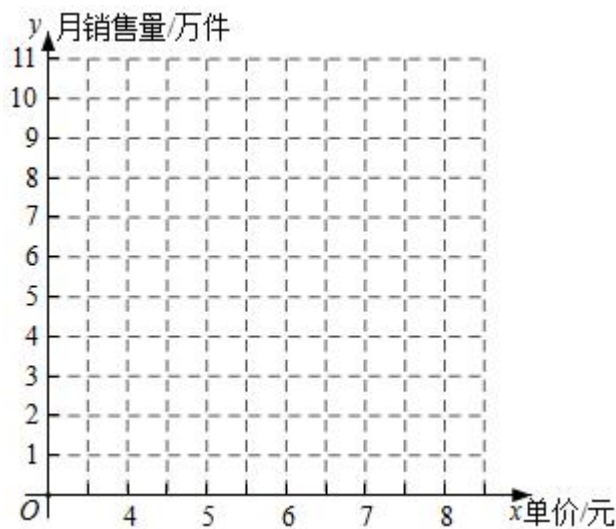
$$\therefore CE = OE - OC = 5\sqrt{2} - 5.$$



24. (10 分) (2021·郴州) 某商店从厂家以每件 2 元的价格购进一批商品, 在市场试销中发现, 此商品的月销售量 y (单位: 万件) 与销售单价 x (单位: 元) 之间有如下表所示关系:

x	...	4.0	5.0	5.5	6.5	7.5	...
y	...	8.0	6.0	5.0	3.0	1.0	...

(1) 根据表中的数据, 在如图中描出实数对 (x, y) 所对应的点, 并画出 y 关于 x 的函数图象;



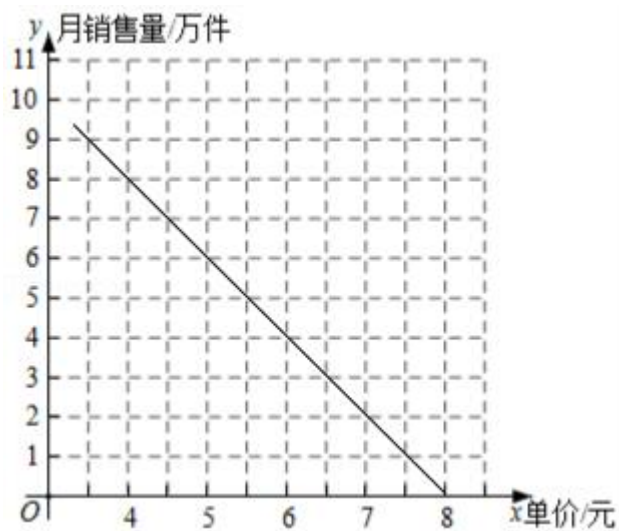
(2) 根据画出的函数图象, 求出 y 关于 x 的函数表达式;

(3) 设经营此商品的月销售利润为 P (单位: 万元),

①写出 P 关于 x 的函数表达式;

②该商店计划从这批商品获得的月销售利润为 10 万元 (不计其它成本), 若物价局限定商品的销售单价不得超过进价的 200%, 则此时的销售单价应定为多少元?

【解答】 解: (1)



(2) 根据图象设 $y = kx + b$ ，把 $(4.0, 8.0)$ 和 $(5.0, 6.0)$ 代入上式，

$$\text{得} \begin{cases} 8.0 = 4.0k + b \\ 6.0 = 5.0k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 16 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x + 16,$$

$$\because y \geq 0,$$

$$\therefore -2x + 16 \geq 0,$$

$$\text{解得 } x \leq 8,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数表达式为 } y = -2x + 16 (x \leq 8);$$

$$(3) \text{ ① } P = (x - 2)y$$

$$= (x - 2)(-2x + 16)$$

$$= -2x^2 + 20x - 32,$$

$$\text{即 } P \text{ 与 } x \text{ 的函数表达式为: } P = -2x^2 + 20x - 32 (x \leq 8);$$

② $\because$ 物价局限定商品的销售单价不得超过进价的 200%，

$$\therefore x \leq 2 \times 200\%,$$

$$\text{即 } x \leq 4,$$

$$\text{由题意得 } P = 10,$$

$$\therefore -2x^2 + 20x - 32 = 10,$$

$$\text{解得 } x_1 = 3, \quad x_2 = 7,$$

$\therefore x \leq 4$,

$\therefore$ 此时销售单价为 3 元.

25. (10 分) (2021·郴州) 如图 1, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 E, F 分别为 AB, AC 的中点, H 为线段 EF 上一动点 (不与点 E, F 重合), 将线段 AH 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 AG , 连接 GC, HB .

(1) 证明: $\triangle AHB \cong \triangle AGC$;

(2) 如图 2, 连接 GF, HG , HG 交 AF 于点 Q .

①证明: 在点 H 的运动过程中, 总有 $\angle HFG = 90^\circ$;

②若 $AB = AC = 4$, 当 EH 的长度为多少时 $\triangle AQG$ 为等腰三角形?

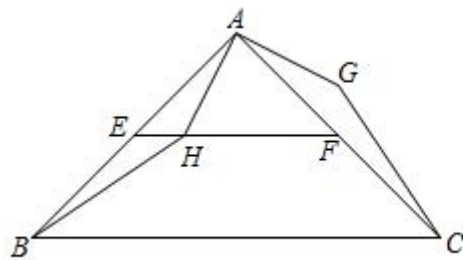


图1

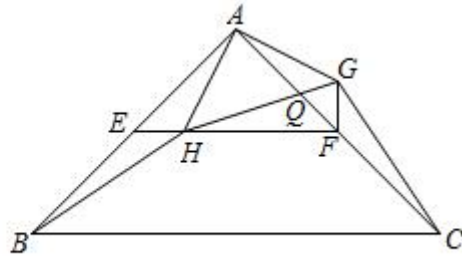


图2

【解答】(1) 证明: 如图 1,

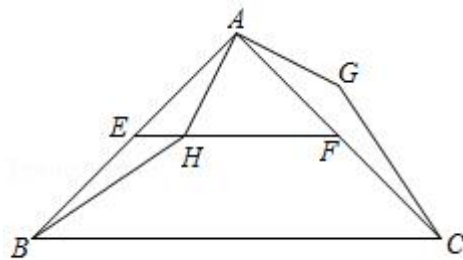


图1

由旋转得: $AH = AG$, $\angle HAG = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAH = \angle CAG$,

$\therefore AB = AC$,

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle ACG(SAS)$;

(2) ①证明: 如图 2, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$,

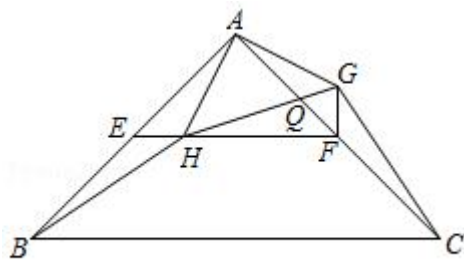


图2

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$\because$ 点 E , F 分别为 AB , AC 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel BC, \quad AE = \frac{1}{2} AB, \quad AF = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore AE = AF, \quad \angle AEF = \angle ABC = 45^\circ, \quad \angle AFE = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle FAG, \quad AH = AG,$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle AFG (SAS),$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AEH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HFG = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ;$$

②分两种情况:

i) 如图 3, $AQ = QG$ 时,

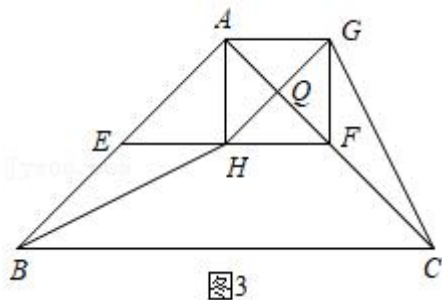


图3

$$\therefore AQ = QG,$$

$$\therefore \angle QAG = \angle AGQ,$$

$$\therefore \angle HAG = \angle HAQ + \angle QAG = \angle AHG + \angle AGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QAH = \angle AHQ,$$

$$\therefore AQ = QH = QG,$$

$$\therefore AH = AG,$$

$$\therefore AQ \perp GH,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AFH = 45^\circ,$$

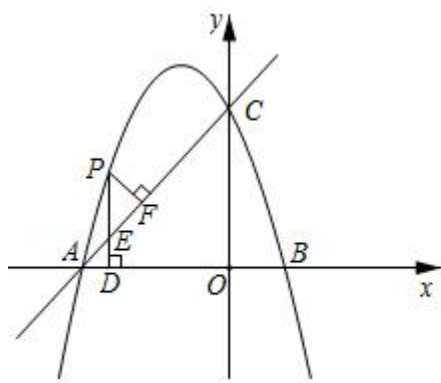


图1

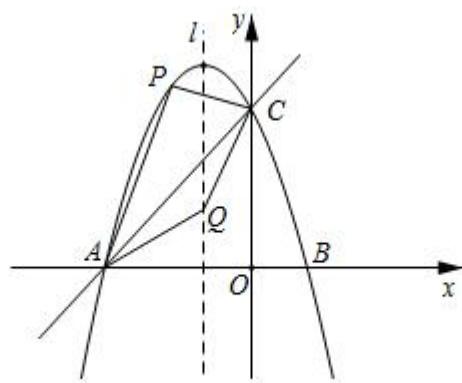
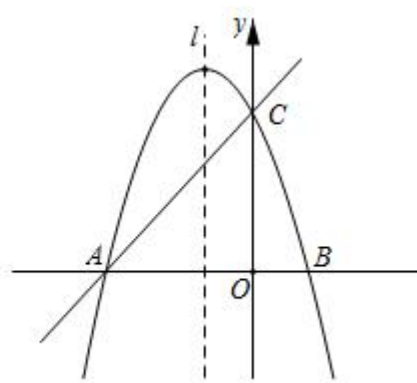


图2



备用图

【解答】解：（1）由题意得抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $H: y = a(x+1)^2 + 4$ ，

将 $A(-3, 0)$ 代入，得： $a(-3+1)^2 + 4 = 0$ ，

解得： $a = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线 H 的表达式为 $y = -(x+1)^2 + 4$ ；

（2）如图 1，由（1）知： $y = -x^2 - 2x + 3$ ，

令 $x = 0$ ，得 $y = 3$ ，

$\therefore C(0, 3)$ ，

设直线 AC 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$\because A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 3$ ，

设 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$ ，则 $E(m, m + 3)$ ，

$$\therefore PE = -m^2 - 2m + 3 - (m + 3) = -m^2 - 3m = -(m + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4},$$

$\because -1 < 0$ ，

$\therefore$ 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时， PE 有最大值 $\frac{9}{4}$ ，

$\because OA = OC = 3$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\because PD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = \angle AOC,$$

$$\therefore PD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\because PF \perp AC,$$

$\therefore \triangle PEF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore PF = EF = \frac{\sqrt{2}}{2} PE,$$

$$\therefore S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} PF \cdot EF = \frac{1}{4} PE^2,$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\triangle PEF \text{ 最大值}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{64};$$

(3) ①当 AC 为平行四边形的边时, 则有 $PQ \parallel AC$, 且 $PQ = AC$,

如图 2, 过点 P 作对称轴的垂线, 垂足为 G , 设 AC 交对称轴于点 H ,

则 $\angle AHG = \angle ACO = \angle PQG$,

在 $\triangle PQG$ 和 $\triangle ACO$ 中,

$$\begin{cases} \angle PGQ = \angle AOC \\ \angle PQG = \angle ACO, \\ PQ = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PQG \cong \triangle ACO (AAS),$$

$$\therefore PG = AO = 3,$$

$\therefore$ 点 P 到对称轴的距离为 3,

$$\text{又 } \because y = -(x+1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = -1$,

设点 $P(x, y)$, 则 $|x+1| = 3$,

解得: $x = 2$ 或 $x = -4$,

当 $x = 2$ 时, $y = -5$,

当 $x = -4$ 时, $y = -5$,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(2, -5)$ 或 $(-4, -5)$;

②当 AC 为平行四边形的对角线时,

如图 3, 设 AC 的中点为 M ,

$\because A(-3, 0), C(0, 3),$

$\therefore M(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}),$

$\because$ 点 Q 在对称轴上,

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 -1 , 设点 P 的横坐标为 x ,

根据中点公式得: $x + (-1) = 2 \times (-\frac{3}{2}) = -3,$

$\therefore x = -2$, 此时 $y = 3$,

$\therefore P(-2, 3)$;

综上所述, 点 P 的坐标为 $(2, -5)$ 或 $(-4, -5)$ 或 $(-2, 3)$.

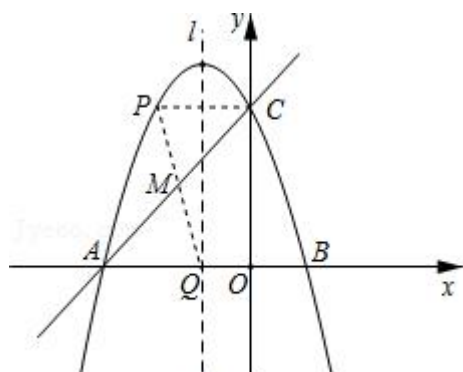


图3

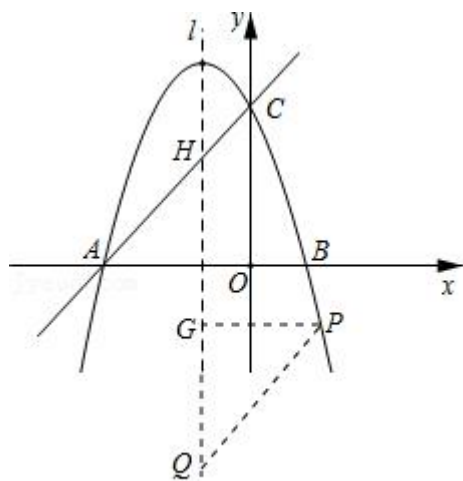


图2

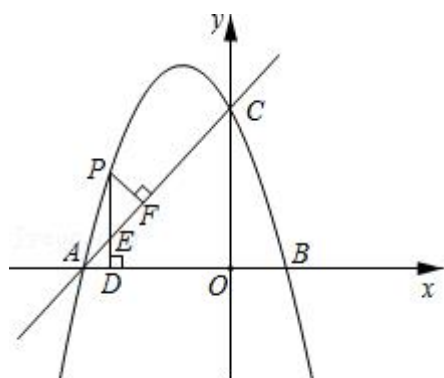


图 1