

2021 年湖南省邵阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. -3 的相反数是（ ）

- A. -3 B. 0 C. 3 D. π

2. 下列四个图形中，是中心对称图形的是（ ）

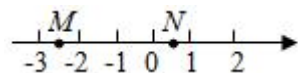


3. 2021 年我国首次发射探测器对火星进行探测. 北京时间 2 月 10 日晚, “天问一号” 探测器在距离地球约 $192000000km$ 处成功实施制动捕获, 随后进入火星轨道. 用科学记数法将 192000000 表示为 $a \times 10^8$ 的形式, 则 a 的值是（ ）



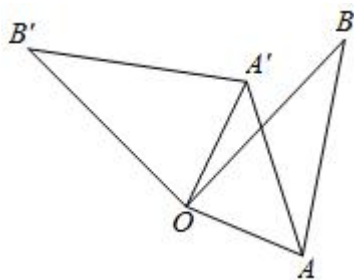
- A. 0.192 B. 1.92 C. 19.2 D. 192

4. 如图, 若数轴上两点 M , N 所对应的实数分别为 m , n , 则 $m+n$ 的值可能是（ ）



- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

5. 如图, 在 $\triangle AOB$ 中, $AO=1$, $BO=AB=\frac{3}{2}$. 将 $\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'OB'$, 连接 AA' . 则线段 AA' 的长为（ ）



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

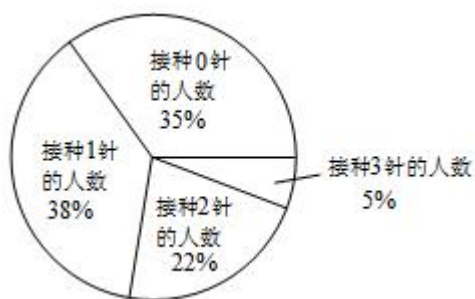
6. 其社区针对 5 月 30 日前该社区居民接种新冠疫苗的情况开展了问卷调查，共收回 6000 份有效问卷. 经统计，制成如下数据表格.

接种疫苗针数	0	1	2	3
人数	2100	2280	1320	300

小杰同学选择扇形统计图分析接种不同针数的居民人数所占总人数的百分比. 下面是制作扇形统计图的步骤（顺序打乱）:

- ①计算各部分扇形的圆心角分别为 126° , 136.8° , 79.2° , 18° .
- ②计算出接种不同针数的居民人数占总人数的百分比分别为 35%, 38%, 22%, 5%.
- ③在同一个圆中，根据所得的圆心角度数画出各个扇形，并注明各部分的名称及相应的百分比.

制作扇形统计图的步骤排序正确的是（ ）

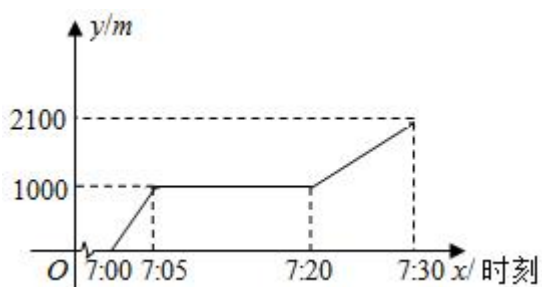


- A. ②①③ B. ①③② C. ①②③ D. ③①②

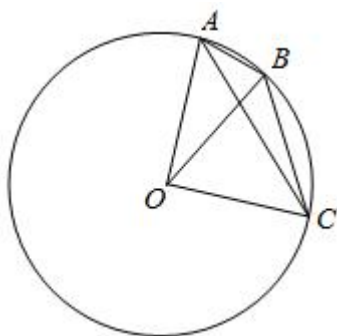
7. 下列数值不是不等式组 $\begin{cases} 5x-1 > 3x-4 \\ -\frac{1}{3}x \leq \frac{2}{3}-x \end{cases}$ 的整数解的是（ ）

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

8. 某天早晨 7:00，小明从家骑自行车去上学，途中因自行车发生故障，就地修车耽误了一段时间，修好车后继续骑行，7:30 赶到了学校. 如图所示的函数图象反映了他骑车上学的整个过程. 结合图象，判断下列结论正确的是（ ）



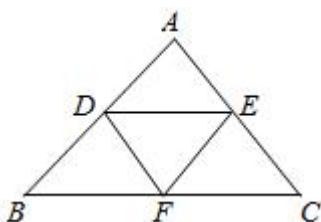
- A. 小明修车花了 $15min$
- B. 小明家距离学校 $1100m$
- C. 小明修好车后花了 $30min$ 到达学校
- D. 小明修好车后骑行到学校的平均速度是 $3m/s$
9. 如图, 点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的三点. 若 $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, 则 $\angle AOB$ 的大小为 ()



- A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°
10. 在平面直角坐标系中, 若直线 $y = -x + m$ 不经过第一象限, 则关于 x 的方程 $mx^2 + x + 1 = 0$ 的实数根的个数为 ()
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 1 或 2 个

二、填空题 (本大题有 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 16 的算术平方根是_____.
12. 因式分解: $xy^2 - x^3 =$ _____.
13. 如图, 点 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 三边的中点. 若 $\triangle ABC$ 的周长为 10, 则 $\triangle DEF$ 的周长为 _____.

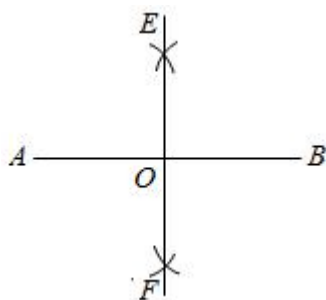


14. 已知点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 为反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象上的两点, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1 _____ y_2 . (填 “>” “=” 或 “<”)

15. 如图, 已知线段 AB 长为 4. 现按照以下步骤作图:

- ①分别以点 A , B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧, 两弧分别相交于点 E , F ;
②过 E , F 两点作直线, 与线段 AB 相交于点 O .

则 AO 的长为 _____.



16. 一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物, 假定蚂蚁在每个岔路口都会随机选择其中一条路径, 则它遇到食物的概率是 _____.



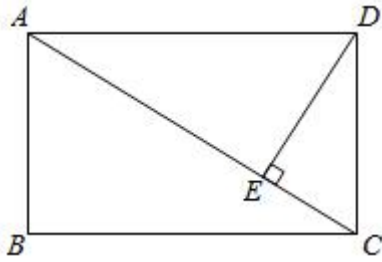
17. 《九章算术》中有一道阐述“盈不足术”的问题, 原文如下:

今有共买物, 人出八, 盈三; 人出七, 不足四. 问人数、物价各几何?

意思是: 几个人一起去购买某物品, 如果每人出 8 钱, 则多了 3 钱; 如果每人出 7 钱, 则少了 4 钱. 问有多少人, 物品的价值是多少?

该问题中物品的价值是 _____ 钱.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $DE \perp AC$, 垂足为点 E . 若 $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$, $AD = 4$, 则 AB 的长为 _____.



三、解答题（本大题有 8 个小题，第 19 ~ 25 题每题 8 分，第 26 题 10 分，共 66 分.解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程）

19.（8 分）计算： $(2021 - \pi)^0 - |\sqrt{3} - 2| - \tan 60^\circ$.

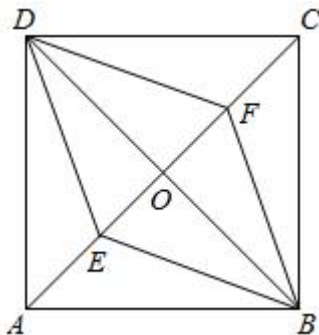
20.（8 分）先化简，再从 $-1, 0, 1, 2, \sqrt{2}+1$ 中选择一个合适的 x 的值代入求值. $(1 - \frac{x}{x+1})$

$$\div \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}.$$

21.（8 分）如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E, F 是对角线 AC 上的两点，且 $AE = CF$. 连接 DE, DF, BE, BF .

（1）证明： $\triangle ADE \cong \triangle CBF$.

（2）若 $AB = 4\sqrt{2}$, $AE = 2$, 求四边形 $BEDF$ 的周长.



22.（8 分）为庆祝中国共产党成立 100 周年，某校计划举行“学党史·感党恩”知识竞答活动，并计划购置篮球、钢笔、笔记本作为奖品. 采购员刘老师在某文体用品店购买了做为奖品的三种物品，回到学校后发现发票被弄花了，有几个数据变得不清楚，如图.



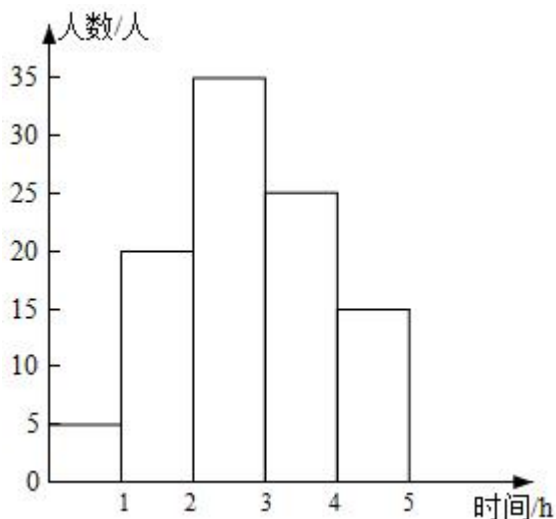
应税劳务、服务名称	规格型号	单位	数量	单价	金额
篮 球	...	个	6	100.00	600.00
钢 笔	...	支	15	15.00	225.00
笔记本	...	本	5	5.00	25.00
合 计			56		Y1000.00
税金合计(大写)		壹仟圆整			(小写)

请根据图所示的发票中的信息，帮助刘老师复原弄花的数据，即分别求出购置钢笔、笔记本的数量及对应的金额.

23. (8分) 为落实湖南省共青团“青年大学习”的号召，某校团委针对该校学生每周参加“青年大学习”的时间(单位： h)进行了随机抽样调查，并将获得的数据绘制成如下统计表和如图所示的统计图，请根据图表中的信息回答下列问题.

周学习时间	频数	频率
$0 \leq t < 1$	5	0.05
$1 \leq t < 2$	20	0.20
$2 \leq t < 3$	a	0.35
$3 \leq t < 4$	25	m
$4 \leq t \leq 5$	15	0.15

- (1) 求统计表中 a, m 的值.
- (2) 甲同学说“我的周学习时间是此次抽样调查所得数据的中位数”. 求甲同学的周学习时间在哪个范围内.
- (3) 已知该校学生约有 2000 人，试估计该校学生每周参加“青年大学习”的时间不少于 $3h$ 的人数.

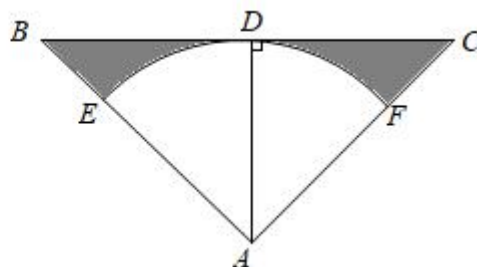
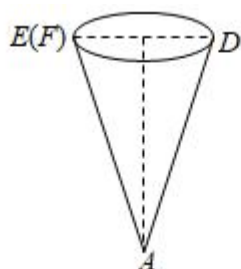


24. (8分) 某种冰激凌的外包装可以视为圆锥，它的底面圆直径 ED 与母线 AD 长之比为 1:

2. 制作这种外包装需要用如图所示的等腰三角形材料，其中 $AB = AC$ ， $AD \perp BC$. 将扇形 AEF 围成圆锥时， AE ， AF 恰好重合.

(1) 求这种加工材料的顶角 $\angle BAC$ 的大小.

(2) 若圆锥底面圆的直径 ED 为 5cm ，求加工材料剩余部分(图中阴影部分)的面积.(结果保留 π)



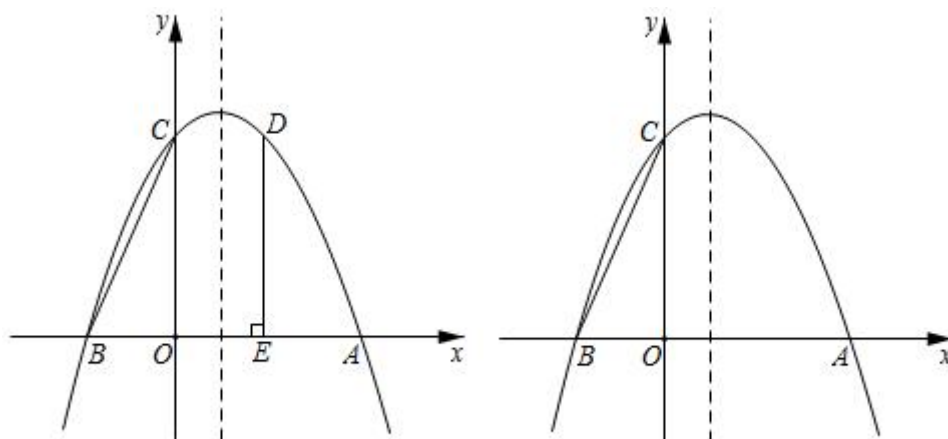
25. (8分) 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $(1, 1)$ 和 $(4, 1)$.

(1) 求抛物线 C 的对称轴.

(2) 当 $a = -1$ 时，将抛物线 C 向左平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位，得到抛物线 C_1 .

①求抛物线 C_1 的解析式.

②设抛物线 C_1 与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 C , 连接 BC . 点 D 为第一象限内抛物线 C_1 上一动点, 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E . 设点 D 的横坐标为 m . 是否存在点 D , 使得以点 O, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle BOC$ 相似, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



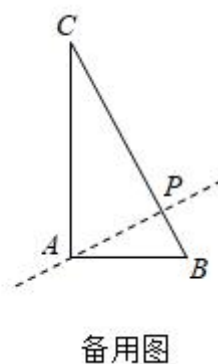
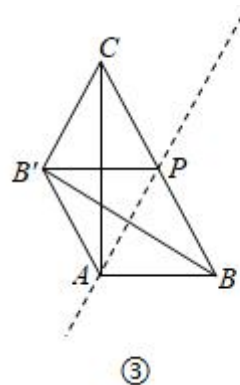
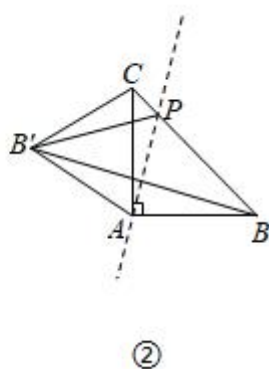
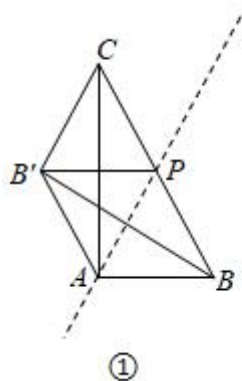
备用图

26. (10分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 P 为斜边 BC 上一动点, 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 折叠, 使得点 B 的对应点为 B' , 连接 AB' , CB' , BB' , PB' .

(1) 如图①, 若 $PB' \perp AC$, 证明: $PB' = AB'$.

(2) 如图②, 若 $AB = AC$, $BP = 3PC$, 求 $\cos \angle B'AC$ 的值.

(3) 如图③, 若 $\angle ACB = 30^\circ$, 是否存在点 P , 使得 $AB = CB'$. 若存在, 求此时 $\frac{PC}{BC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



2021 年湖南省邵阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. -3 的相反数是（ ）

- A. -3 B. 0 C. 3 D. π

【分析】根据相反数的概念求解即可．

【解答】解：相反数指的是只有符号不同的两个数，因此 -3 的相反数为 3 ．

故选：C．

2. 下列四个图形中，是中心对称图形的是（ ）



【分析】根据中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解．把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心．

【解答】解：A. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故本选项不合题意；

C. 是中心对称图形，故本选项符合题意；

D. 不是中心对称图形，故本选项不合题意．

故选：C．

3. 2021 年我国首次发射探测器对火星进行探测．北京时间 2 月 10 日晚，“天问一号”探测器在距离地球约 $192000000km$ 处成功实施制动捕获，随后进入火星轨道．用科学记数法将 192000000 表示为 $a \times 10^8$ 的形式，则 a 的值是（ ）



- A. 0.192 B. 1.92 C. 19.2 D. 192

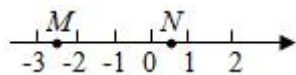
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负整数．

【解答】解： $192000000 = 1.92 \times 10^8$ ，

故 $a = 1.92$ ，

故选：B．

4. 如图，若数轴上两点 M ， N 所对应的实数分别为 m ， n ，则 $m+n$ 的值可能是（ ）



- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

【分析】根据在数轴上表示的两个数，右边的总比左边的大，可得： $-3 < m < -2 < 0 < n < 1$ ， $m+n$ 的结果即可求得．

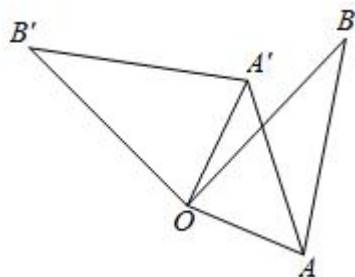
【解答】解： $\because M, N$ 所对应的实数分别为 m, n ，

$\therefore -3 < m < -2 < 0 < n < 1$ ，

$\therefore m+n$ 的值可能是 -2．

故选：D．

5. 如图，在 $\triangle AOB$ 中， $AO = 1$ ， $BO = AB = \frac{3}{2}$ ．将 $\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle A'OB'$ ，连接 AA' ．则线段 AA' 的长为（ ）



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

【分析】由旋转性质可判定 $\triangle AOA'$ 为等腰直角三角形，再由勾股定理可求得 AA' 的长．

【解答】解：由旋转性质可知， $OA = OA' = 1$ ， $\angle AOA' = 90^\circ$ ，

则 $\triangle AOA'$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AA' = \sqrt{OA^2 + OA'^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

故选：B.

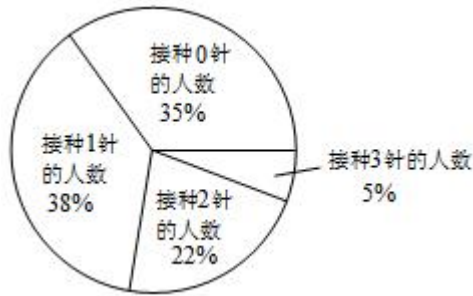
6. 其社区针对 5 月 30 日前该社区居民接种新冠疫苗的情况开展了问卷调查，共收回 6000 份有效问卷. 经统计，制成如下数据表格.

接种疫苗针数	0	1	2	3
人数	2100	2280	1320	300

小杰同学选择扇形统计图分析接种不同针数的居民人数所占总人数的百分比. 下面是制作扇形统计图的步骤（顺序打乱）:

- ①计算各部分扇形的圆心角分别为 126° , 136.8° , 79.2° , 18° .
- ②计算出接种不同针数的居民人数占总人数的百分比分别为 35%, 38%, 22%, 5%.
- ③在同一个圆中，根据所得的圆心角度数画出各个扇形，并注明各部分的名称及相应的百分比.

制作扇形统计图的步骤排序正确的是（ ）



- A. ②①③ B. ①③② C. ①②③ D. ③①②

【分析】根据制作扇形图的步骤即可求解.

【解答】解：由题意可知，小杰同学制作扇形统计图的步骤为：

先计算出接种不同针数的居民人数占总人数的百分比分别为 35%，38%，22%，5%；

再计算各部分扇形的圆心角分别为 126° , 136.8° , 79.2° , 18° ；

然后在同一个圆中，根据所得的圆心角度数画出各个扇形，并注明各部分的名称及相应的百分比.

故选：A.

7. 下列数值不是不等式组 $\begin{cases} 5x-1>3x-4 \\ -\frac{1}{3}x \leq \frac{2}{3}-x \end{cases}$ 的整数解的是 ()

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【分析】先分别求每个不等式的解集，取其解集的公共部分作为不等式组的解集，然后再确定其整数解.

【解答】解： $\begin{cases} 5x-1>3x-4 \text{ ①} \\ -\frac{1}{3}x \leq \frac{2}{3}-x \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①，得： $x > -\frac{3}{2}$,

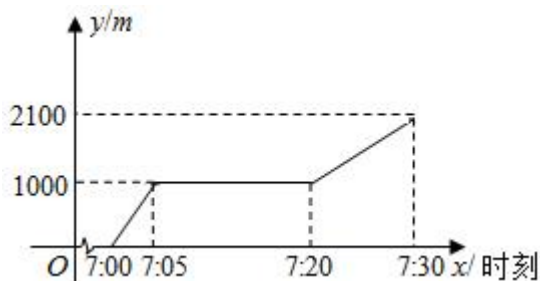
解不等式②，得： $x \leq 1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-\frac{3}{2} < x \leq 1$,

$\therefore$ 不等式组的整数解为 -1, 0, 1,

故选：A.

8. 某天早晨 7:00，小明从家骑自行车去上学，途中因自行车发生故障，就地修车耽误了一段时间，修好车后继续骑行，7:30 赶到了学校. 如图所示的函数图象反映了他骑车上学的整个过程. 结合图象，判断下列结论正确的是 ()



- A. 小明修车花了 15min
B. 小明家距离学校 1100m
C. 小明修好车后花了 30min 到达学校
D. 小明修好车后骑行到学校的平均速度是 3m/s

【分析】根据横坐标，可得时间；根据函数图象的纵坐标，可得路程.

【解答】解：A. 由横坐标看出，小明修车时间为 $20 - 5 = 15$ (分钟)，故本选项符合题意；

B. 由纵坐标看出，小明家学校离家的距离为 2100 米，故本选项不合题意；

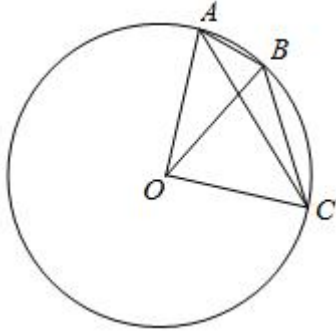
C. 由横坐标看出，小明修好车后花了 $30 - 20 = 10$ (min)到达学校，故本选项不合题意；

D. 小明修好车后骑行到学校的平均速度是： $(2100 - 1100) \div 10 = 100$ (米/分钟) $= \frac{5}{3}$

(m/s), 故本选项不合题意;

故选: A .

9. 如图, 点 A, B, C 是 $\odot O$ 上的三点. 若 $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, 则 $\angle AOB$ 的大小为 ()



- A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°

【分析】由圆周角定理可得 $\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$, 继而 $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

【解答】解: $\because \angle BAC$ 与 $\angle BOC$ 所对弧为 $\widehat{BC}$,
由圆周角定理可知: $\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$,
又 $\angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

故选: B .

10. 在平面直角坐标系中, 若直线 $y = -x + m$ 不经过第一象限, 则关于 x 的方程 $mx^2 + x + 1 = 0$ 的实数根的个数为 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 1 或 2 个

【分析】由直线解析式求得 $m \leq 0$, 然后确定 Δ 的符号即可.

【解答】解: $\because$ 直线 $y = -x + m$ 不经过第一象限,
 $\therefore m \leq 0$,

当 $m = 0$ 时, 方程 $mx^2 + x + 1 = 0$ 是一次方程, 有一个根,

当 $m < 0$ 时,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $mx^2 + x + 1 = 0$,

$\therefore \Delta = 1^2 - 4m > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $mx^2 + x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

故选：D.

二、填空题（本大题有 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. 16 的算术平方根是 4.

【分析】根据算术平方根的定义即可求出结果.

【解答】解： $\because 4^2 = 16$,

$$\therefore \sqrt{16} = 4.$$

故答案为：4.

12. 因式分解： $xy^2 - x^3 = \underline{x(y+x)(y-x)}$.

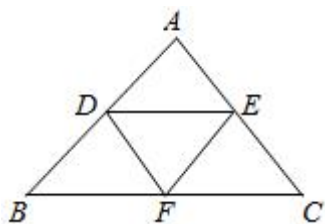
【分析】首先提取公因式 x ，再利用平方差公式分解因式即可.

【解答】解： $xy^2 - x^3 = x(y^2 - x^2)$

$$= x(y+x)(y-x).$$

故答案为： $x(y+x)(y-x)$.

13. 如图，点 D 、 E 、 F 分别为 $\triangle ABC$ 三边的中点. 若 $\triangle ABC$ 的周长为 10，则 $\triangle DEF$ 的周长为 5.



【分析】根据 D 、 E 、 F 分别是 AB 、 AC 、 BC 的中点，可以判断 DF 、 FE 、 DE 为三角形中位线，利用中位线定理求出 DF 、 FE 、 DE 与 AB 、 BC 、 CA 的长度关系即可解答.

【解答】解： $\because D$ 、 E 、 F 分别是 AB 、 AC 、 BC 的中点，

$\therefore FD$ 、 FE 、 DE 为 $\triangle ABC$ 中位线，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AC, FE = \frac{1}{2}AB, DE = \frac{1}{2}BC;$$

$$\therefore DF + FE + DE = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + CB) = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

故答案为：5.

14. 已知点 $A(1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ 为反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象上的两点，则 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1 > y_2 . (填 “>” “=” 或 “<”)

【分析】先根据反比例函数的解析式判断出函数图象所在的象限及其增减性，再根据各点横坐标的值判断出各点所在的象限，进而可得出结论.

【解答】解：∵反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 中， $k = 3 > 0$ ，

∴函数图象的两个分支分别位于第一、三象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小．

∵ $A(1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ ，

∴点 A 、 B 都在第一象限，

又 $1 < 2$ ，

∴ $y_1 > y_2$ ，

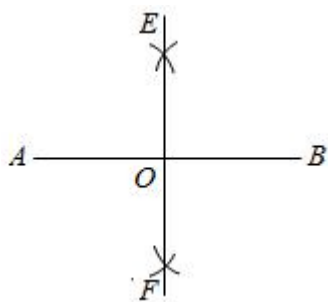
故答案为：>．

15. 如图，已知线段 AB 长为 4．现按照以下步骤作图：

①分别以点 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，两弧分别相交于点 E ， F ；

②过 E ， F 两点作直线，与线段 AB 相交于点 O ．

则 AO 的长为 2．



【分析】直接利用基本作图方法得出 EF 垂直平分 AB ，即可得出答案．

【解答】解：由基本作图方法可得： EF 垂直平分 AB ，

∵ $AB = 4$ ，

∴ $AO = \frac{1}{2}AB = 2$ ．

故答案为：2．

16. 一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个岔路口都会随机选择其中一条路径，则它遇到食物的概率是 $\frac{1}{3}$ ．



【分析】由一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个岔路口都会随机的选择一条路径，观察图可得：它有 6 种路径，且获得食物的有 2 种路径，然后利用概率公式求解即可求得答案．

【解答】解：∵一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个岔路口都会随机的选择一条路径，

∴它有 6 种路径，

∴获得食物的有 2 种路径，

∴它遇到食物的概率是：

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

17. 《九章算术》中有一道阐述“盈不足术”的问题，原文如下：

今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四．问人数、物价各几何？

意思是：几个人一起去购买某物品，如果每人出 8 钱，则多了 3 钱；如果每人出 7 钱，则少了 4 钱．问有多少人，物品的价值是多少？

该问题中物品的价值是 53 钱．

【分析】设有 x 人，物品的价值为 y 钱，由题意：几个人一起去购买某物品，如果每人出 8 钱，则多了 3 钱；如果每人出 7 钱，则少了 4 钱．列出方程组，解方程组即可．

【解答】解：设有 x 人，物品的价值为 y 钱，

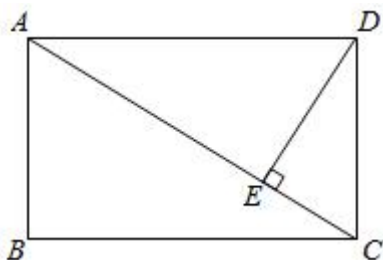
依题意，得：
$$\begin{cases} y=8x-3 \\ y=7x+4 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x=7 \\ y=53 \end{cases},$$

即该问题中物品的价值是 53 钱，

故答案为： 53 .

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $DE \perp AC$, 垂足为点 E . 若 $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$, $AD = 4$, 则 AB 的长为 3.



【分析】易证 $\angle ACD = \angle ADE$, 由矩形的性质得出 $\angle BAC = \angle ACD$, 则 $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$, 由此得到 $AC = \frac{BC}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5$, 最后由勾股定理得出结果.

【解答】解: $\because DE \perp AC$,
 $\therefore \angle ADE + \angle CAD = 90^\circ$,
 $\because \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = \angle ADE$,
 $\because$ 矩形 $ABCD$ 的对边 $AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle BAC = \angle ACD$,
 $\because \sin \angle ADE = \frac{4}{5}$,
 $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$,
 $\therefore AC = \frac{BC}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5$,

由勾股定理得, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

故答案为: 3.

三、解答题 (本大题有 8 个小题, 第 19~25 题每题 8 分, 第 26 题 10 分, 共 66 分. 解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程)

19. (8 分) 计算: $(2021 - \pi)^0 - |\sqrt{3} - 2| - \tan 60^\circ$.

【分析】结合零指数幂, 绝对值的化简和 60° 角的正切值可以求出结果.

【解答】解: 原式 $= 1 - (2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}$
 $= 1 - 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}$

$$= -1.$$

20. (8分) 先化简, 再从 $-1, 0, 1, 2, \sqrt{2}+1$ 中选择一个合适的 x 的值代入求值. $(1 - \frac{x}{x+1})$

$$\div \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}.$$

【分析】 先计算分式的混合运算进行化简, 先算小括号里面的, 然后算括号外面的, 最后根据分式成立的条件确定 x 的取值, 代入求值即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \frac{x+1-x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1}, \end{aligned}$$

又 $\because x \neq \pm 1$,

$\therefore x$ 可以取 0 , 此时原式 $= -1$;

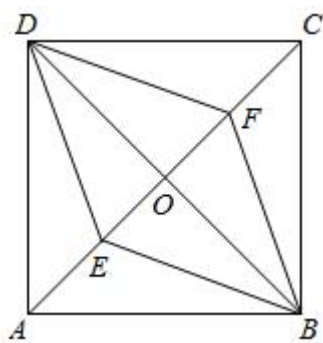
x 可以取 2 , 此时原式 $= 1$;

x 可以取 $\sqrt{2}+1$, 此时原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. (8分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 是对角线 AC 上的两点, 且 $AE = CF$. 连接 DE, DF, BE, BF .

(1) 证明: $\triangle ADE \cong \triangle CBF$.

(2) 若 $AB = 4\sqrt{2}$, $AE = 2$, 求四边形 $BEDF$ 的周长.



【分析】 (1) 由正方形对角线性质可得 $\angle DAE = \angle BCF = 45^\circ$, 再由 SAS 可证 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$;

(2) 由正方形性质及勾股定理可求得 $BD = AC = 8$, $DO = BO = 4$. 再证明四边形 $BEDF$ 为菱形, 因为 $AE = CF = 2$, 所以可得 $OE = 2$, 在 $Rt\triangle DOE$ 中用勾股定理求得 $DE = 2\sqrt{5}$, 进而四边形 $BEDF$ 的周长为 $4DE$, 即可求得答案.

【解答】 解: (1) 证明: 由正方形对角线平分每一组对角可知: $\angle DAE = \angle BCF = 45^\circ$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AD=BC \\ \angle DAE=\angle BCF, \\ AE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF (SAS).$

$$(2) \because AB=AD=4\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8,$$

由正方形对角线相等且互相垂直平分可得: $AC=BD=8$, $DO=BO=4$, $OA=OC=4$,

又 $AE=CF=2$,

$$\therefore OA-AE=OC-CF,$$

$$\text{即 } OE=OF=4-2=2,$$

故四边形 $BEDF$ 为菱形.

$$\because \angle DOE = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{DO^2 + EO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore 4DE = 8\sqrt{5}$$

故四边形 $BEDF$ 的周长为 $8\sqrt{5}$.

22. (8分) 为庆祝中国共产党成立100周年, 某校计划举行“学党史·感党恩”知识竞答活动, 并计划购置篮球、钢笔、笔记本作为奖品. 采购员刘老师在某文体用品店购买了做为奖品的三种物品, 回到学校后发现发票被弄花了, 有几个数据变得不清楚, 如图.



品名	规格型号	单位	数量	单价	金额
篮球	...	个	6	100.00	600.00
钢笔	...	支	...	15.00	...
笔记本	...	本	...	5.00	...
合计			56		¥1000.00
会计(大)	壹仟圆整				(小)

请根据图所示的发票中的信息, 帮助刘老师复原弄花的数据, 即分别求出购置钢笔、笔记本的数量及对应的金额.

【分析】设钢笔购买了 x 支，笔记本购买了 y 本，篮球个数+钢笔支数+笔记本本数 = 56，篮球总价+钢笔总价+笔记本总价 = 1000，利用这两个相等关系列出二元一次方程组，解出即得钢笔和笔记本的数量，乘以各自单价即得各自总价.

【解答】解：设钢笔购买了 x 支，笔记本购买了 y 本.

由题意得：
$$\begin{cases} x+y+6=56 \\ 15x+5y+600=1000 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=15 \\ y=35 \end{cases}$$

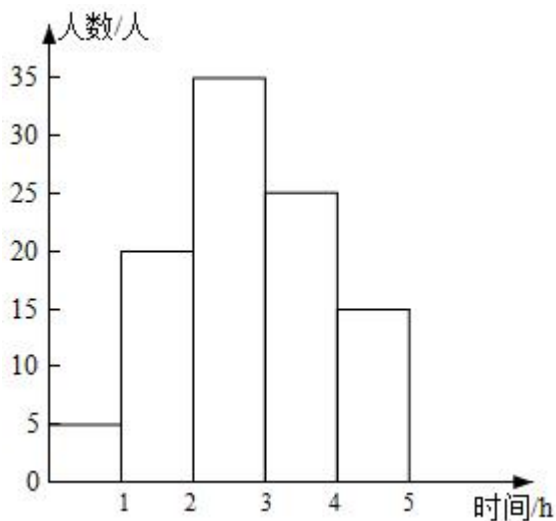
$\therefore 15 \times 15 = 225$ (元), $35 \times 5 = 175$ (元),

答：钢笔购买了 15 支共 225 元，笔记本购买了 35 本共 175 元.

23. (8 分) 为落实湖南省共青团“青年大学习”的号召，某校团委针对该校学生每周参加“青年大学习”的时间(单位： h)进行了随机抽样调查，并将获得的数据绘制成如下统计表和如图所示的统计图，请根据图表中的信息回答下列问题.

周学习时间	频数	频率
$0 \leq t < 1$	5	0.05
$1 \leq t < 2$	20	0.20
$2 \leq t < 3$	a	0.35
$3 \leq t < 4$	25	m
$4 \leq t \leq 5$	15	0.15

- (1) 求统计表中 a , m 的值.
- (2) 甲同学说“我的周学习时间是此次抽样调查所得数据的中位数”. 求甲同学的周学习时间在哪个范围内.
- (3) 已知该校学生约有 2000 人，试估计该校学生每周参加“青年大学习”的时间不少于 $3h$ 的人数.



【分析】(1) 由周学习时间在 $0 \leq t < 1$ 的频数及频率求出样本容量，再由频率 = 频数 ÷ 样本容量求解即可得出答案；

(2) 根据中位数的定义可得答案；

(3) 用总人数乘以样本中 $3 \leq t < 4$ 、 $4 \leq t \leq 5$ 的频率和．

【解答】解：(1) $\because$ 样本容量为 $5 \div 0.05 = 100$ ，

$\therefore a = 100 \times 0.35 = 35$ ， $m = 25 \div 100 = 0.25$ ；

(2) $\because$ 一共有 100 个数据，其中位数是第 50、51 个数据的平均数，而这 2 个数据均落在 $2 \leq t < 3$ 范围内，

$\therefore$ 甲同学的周学习时间在 $2 \leq t < 3$ 范围内；

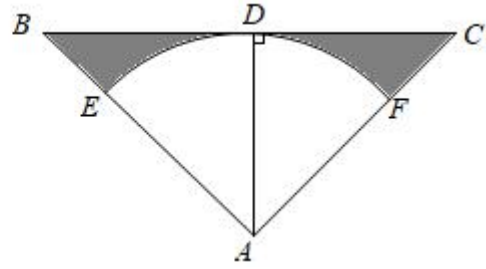
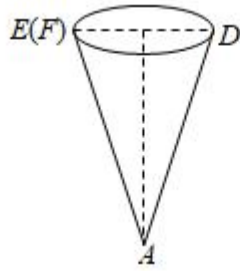
(3) 估计该校学生每周参加“青年大学习”的时间不少于 3h 的人数为 $2000 \times (0.25 + 0.15) = 800$ (人)．

24. (8 分) 某种冰激凌的外包装可以视为圆锥，它的底面圆直径 ED 与母线 AD 长之比为 1:

2. 制作这种外包装需要用如图所示的等腰三角形材料，其中 $AB = AC$ ， $AD \perp BC$. 将扇形 AEF 围成圆锥时， AE ， AF 恰好重合．

(1) 求这种加工材料的顶角 $\angle BAC$ 的大小．

(2) 若圆锥底面圆的直径 ED 为 5cm，求加工材料剩余部分(图中阴影部分)的面积．(结果保留 π)



【分析】(1) 设 $\angle BAC = n^\circ$. 根据弧 EF 的两种求法, 构建方程, 可得结论.

(2) 根据 $S_{\text{阴}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD - S_{\text{扇形} AEF}$ 求解即可.

【解答】解: (1) 设 $\angle BAC = n^\circ$.

由题意得 $n \cdot DE = \frac{n\pi \cdot AD}{180}$, $AD = 2DE$,

$$\therefore n = 90,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ .$$

$$(2) \because AD = 2DE = 10(\text{cm}),$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD - S_{\text{扇形} AEF} = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 - \frac{90\pi \cdot 10^2}{360} = (100 - 25\pi)\text{cm}^2.$$

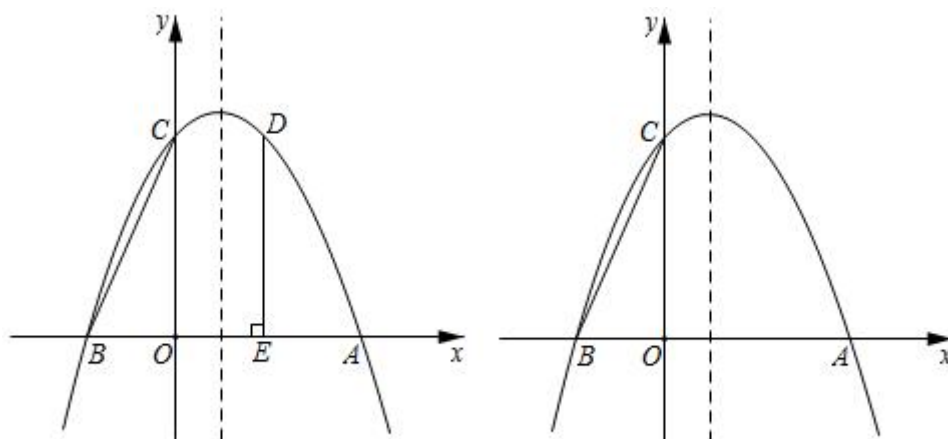
25. (8分) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $(1, 1)$ 和 $(4, 1)$.

(1) 求抛物线 C 的对称轴.

(2) 当 $a = -1$ 时, 将抛物线 C 向左平移 2 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到抛物线 C_1 .

①求抛物线 C_1 的解析式.

②设抛物线 C_1 与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 C , 连接 BC . 点 D 为第一象限内抛物线 C_1 上一动点, 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E . 设点 D 的横坐标为 m . 是否存在点 D , 使得以点 O, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle BOC$ 相似, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



备用图

【分析】(1) 点 $(1, 1)$ 和 $(4, 1)$ 的纵坐标相同，故上述两点关于抛物线对称轴对称，即可求解；

(2) ①用待定系数法即可求解；

②当以点 O, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle BOC$ 相似时，则 $\tan \angle DOE = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ ，即 $\tan \angle DOE = \frac{DE}{OE} = \frac{-m^2+m+2}{m} = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ ，即可求解．

【解答】解：(1) $\because$ 点 $(1, 1)$ 和 $(4, 1)$ 的纵坐标相同，故上述两点关于抛物线对称轴对称，

故抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{5}{2}$ ；

(2) ①由题意得： $\begin{cases} -1+b+c=0 \\ -16+4b+c=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b=5 \\ c=-3 \end{cases}$ ，

故原抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 5x - 3$ ；

由平移的性质得，平移后的抛物线表达式为 $y = -(x+2)^2 + 5(x+2) - 3 - 1 = -x^2 + x + 2$ ；

②存在，理由：

令 $y = -x^2 + x + 2 = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 2 ，令 $x = 0$ ，则 $y = 2$ ，

故点 B, A 的坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，点 $C(0, 2)$ ；

$$\because \tan \angle BCO = \frac{OB}{CO} = \frac{1}{2},$$

同理可得： $\tan \angle CBO = 2$ ，

当以点 O, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle BOC$ 相似时，

则 $\tan \angle DOE = 2$ 或 $\frac{1}{2}$,

设点 D 的坐标为 $(m, -m^2+m+2)$,

则 $\tan \angle DOE = \frac{DE}{OE} = \frac{-m^2+m+2}{m} = 2$ 或 $\frac{1}{2}$,

解得: $m = -2$ (舍去) 或 1 或 $\frac{1-\sqrt{33}}{2}$ (舍去) 或 $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$,

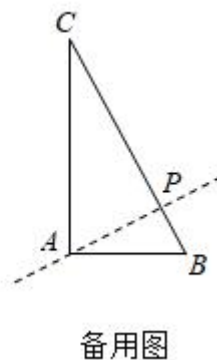
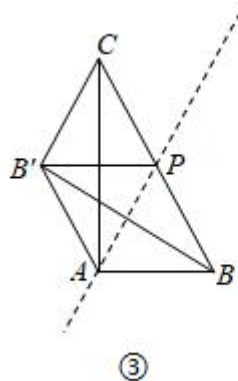
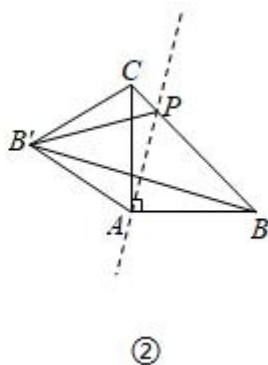
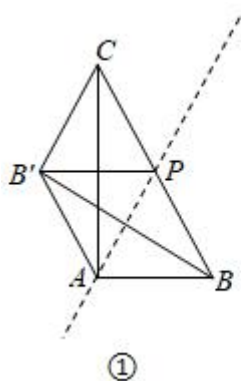
故 $m = 1$ 或 $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

26. (10分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 P 为斜边 BC 上一动点, 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 折叠, 使得点 B 的对应点为 B' , 连接 AB' , CB' , BB' , PB' .

(1) 如图①, 若 $PB' \perp AC$, 证明: $PB' = AB'$.

(2) 如图②, 若 $AB = AC$, $BP = 3PC$, 求 $\cos \angle B'AC$ 的值.

(3) 如图③, 若 $\angle ACB = 30^\circ$, 是否存在点 P , 使得 $AB = CB'$. 若存在, 求此时 $\frac{PC}{BC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



【分析】 (1) 易证 $PB' \parallel AB$. 所以 $\angle B'PA = \angle BAP$, 又由折叠可知 $\angle BAP = \angle B'AP$, 所以 $\angle B'PA = \angle B'AP$. 故 $PB' = AB'$;

(2) 设 $AB = AC = a$, AC 、 PB' 交于点 D , 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 再证明 $\triangle CDP \sim$

$\triangle B'DA$, 可得 $\frac{CD}{B'D} = \frac{PD}{DA} = \frac{CP}{B'A} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 设 $B'D = b$, 则 $CD = \frac{\sqrt{2}}{4}b$. 则 $AD = a - \frac{\sqrt{2}}{4}b$, $PD = \frac{3\sqrt{2}}{4}a - b$, 由 $\frac{PD}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 解得 $b = \frac{4\sqrt{2}}{7}a$. 再过点 D 作 $DE \perp AB'$ 于点 E ,

则 $\triangle B'DE$ 为等腰直角三角形. 所以 $B'E = \sin 45^\circ \times B'D = \frac{4}{7}a$, $AE = AB - B'E = \frac{3}{7}a$, $AD = \frac{5}{7}a$. 故 $\cos \angle B'AC = \cos \angle EAD = \frac{AE}{AD}$ 即可求;

(3) 分①点 P 在 BC 外的圆弧上; ②点 P 在 BC 上两种情况分别求解即可.

【解答】解：（1）证明：∵ $PB' \perp AC$ ， $\angle CAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore PB' \parallel AB.$$

$$\therefore \angle B'PA = \angle BAP,$$

又由折叠可知 $\angle BAP = \angle B'AP$ ，

$$\therefore \angle B'PA = \angle B'AP.$$

故 $PB' = AB'$ 。

（2）设 $AB = AC = a$ ， AC 、 PB' 交于点 D ，

则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore BC = \sqrt{2}a, PC = \frac{\sqrt{2}}{4}a, PB = \frac{3\sqrt{2}}{4}a,$$

由折叠可知， $\angle PB'A = \angle B = 45^\circ$ ，

又 $\angle ACB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle PB'A = \angle ACB,$$

又 $\angle CDP = \angle B'DA$ ，

$$\therefore \triangle CDP \sim \triangle B'DA.$$

$$\therefore \frac{CD}{B'D} = \frac{PD}{DA} = \frac{CP}{B'A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad ①$$

设 $B'D = b$ ，则 $CD = \frac{\sqrt{2}}{4}b$ 。

$$\therefore AD = AC - CD = a - \frac{\sqrt{2}}{4}b,$$

$$PD = PB' - B'D = PB - B'D = \frac{3\sqrt{2}}{4}a - b,$$

$$\text{由①} \frac{PD}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{得: } \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}a - b}{a - \frac{\sqrt{2}}{4}b} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{解得: } b = \frac{4\sqrt{2}}{7}a.$$

过点 D 作 $DE \perp AB'$ 于点 E ，则 $\triangle B'DE$ 为等腰直角三角形。

$$\therefore B'E = \sin 45^\circ \times B'D = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{7}a = \frac{4}{7}a,$$

$$\therefore AE = AB' - B'E = AB - B'E = a - \frac{4}{7}a = \frac{3}{7}a.$$

$$\text{又 } AD = AC - CD = a - \frac{\sqrt{2}}{4}b = a - \frac{2}{7}a = \frac{5}{7}a.$$

$$\therefore \cos \angle B'AC = \cos \angle EAD = \frac{AE}{AD} = \frac{\frac{3}{7}a}{\frac{5}{7}a} = \frac{3}{5}.$$

(3) 存在点 P , 使得 $CB' = AB = m$.

$\because \angle ACB = 30^\circ$, $\angle CAB = 90^\circ$.

$\therefore BC = 2m$.

①如答图 2 所示,

由题意可知, 点 B' 的运动轨迹为以 A 为圆心、 AB 为半径的半圆 A .

当 P 为 BC 中点时, $PC = BP = AP = AB' = m$,

又 $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore \triangle PAB$ 为等边三角形.

又由折叠可得四边形 $ABPB'$ 为菱形.

$\therefore PB' \parallel AB$,

$\therefore PB' \perp AC$.

又 $\because AP = AB'$,

则易知 AC 为 PB' 的垂直平分线.

故 $CB' = PC = AB = m$, 满足题意.

此时, $\frac{PC}{BC} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$.

②当点 B' 落在 BC 上时, 如答图 3 所示,

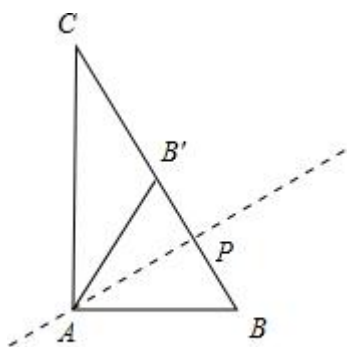
此时 $CB' = AB = m$,

则 $PB' = \frac{1}{2}(2a - a) = \frac{1}{2}a$.

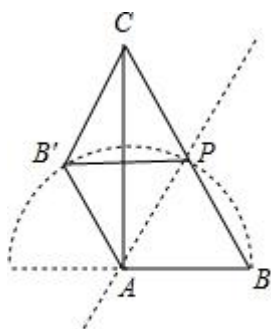
$\therefore PC = CB' + PB' = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$.

$\therefore \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{3}{2}a}{2a} = \frac{3}{4}$.

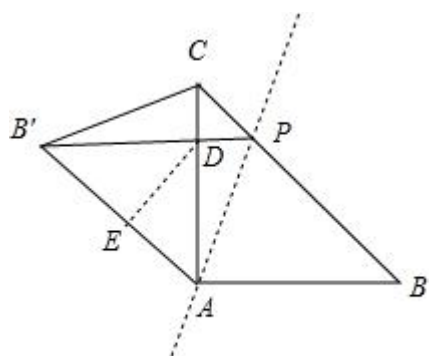
综上所述, $\frac{PC}{BC}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{4}$.



答图3



答图2



答图1