

2021 年湖南省湘潭市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2021·黔东南州) 2021 的相反数是()

A. 2021

B. -2021

C. $\frac{1}{2021}$

D. $-\frac{1}{2021}$

2. (3 分) (2021·湘潭) 据国家航天局消息，航天科技集团所研制的天问一号探测器由长征五号运载火箭发射，并成功着陆于火星预选着陆区，距离地球 320000000 千米．其中 320000000 用科学记数法表示为()

A. 0.32×10^9

B. 3.2×10^8

C. 3.2×10^9

D. 32×10^7

3. (3 分) (2021·湘潭) 下列计算正确的是()

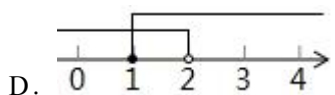
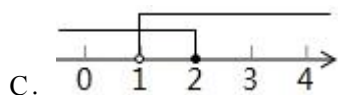
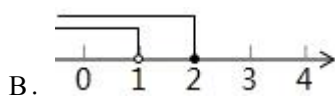
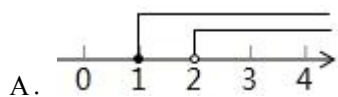
A. $m^3 \div m^2 = m$

B. $(a^3)^2 = a^5$

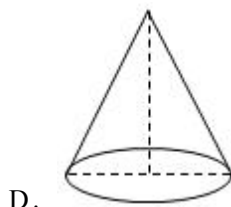
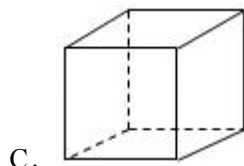
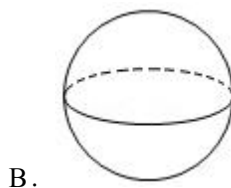
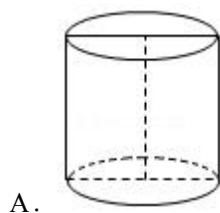
C. $x^2 \cdot x^3 = x^6$

D. $3a^3 - a^2 = 2a$

4. (3 分) (2021·湘潭) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 2 \\ 4x-8 < 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()



5. (3 分) (2021·湘潭) 下列几何体中，三视图不含圆的是()

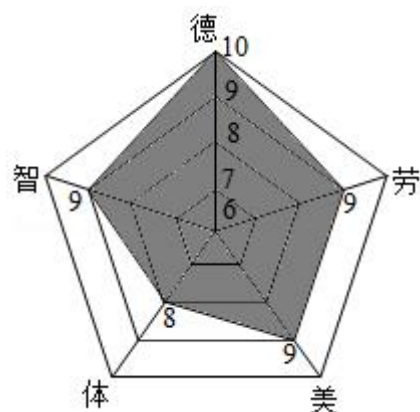


6. (3 分) (2021·湘潭) 为执行国家药品降价政策，给人民群众带来实惠，某药品经过两次降价，每瓶零售价由 100 元降为 64 元，求平均每次降价的百分率．设平均每次降价的百分

率为 x ，可列方程得()

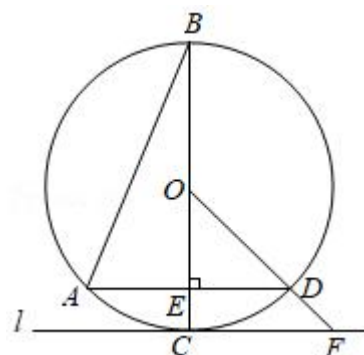
- A. $100(1-x)^2 = 64$ B. $100(1+x)^2 = 64$ C. $100(1-2x) = 64$ D. $100(1+2x) = 64$

7. (3分)(2021·湘潭)某中学积极响应党的号召，大力开展各项有益于德智体美劳全面发展的活动.小明同学在某学期德智体美劳的评价得分如图所示，则小明同学五项评价的平均得分为()



- A. 7分 B. 8分 C. 9分 D. 10分

8. (3分)(2021·湘潭)如图， BC 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AD \perp BC$ 于点 E ，直线 l 切 $\odot O$ 于点 C ，延长 OD 交 l 于点 F ，若 $AE = 2$ ， $\angle ABC = 22.5^\circ$ ，则 CF 的长度为()



- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

二、填空题(本题共8个小题，请将答案写在答题卡相应的位置上，每小题3分，满分24分)

9. (3分)(2021·湘潭)单项式 $3x^2y$ 的系数为 ____.

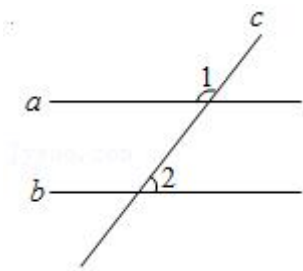
10. (3分)(2021·湘潭)在平面直角坐标系中，把点 $A(-2,1)$ 向右平移5个单位得到点 A' ，则点 A' 的坐标为 ____.

11. (3分)(2021·湘潭)若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是 ____.

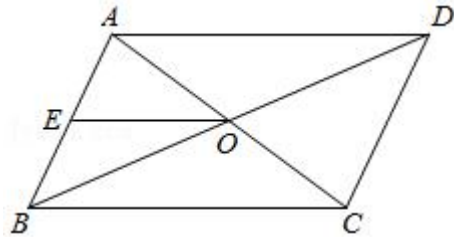
12. (3分)(2021·湘潭)“共和国勋章”获得者、“杂交水稻之父”袁隆平为世界粮食安全

作出了杰出贡献. 全球共有 40 多个国家引种杂交水稻, 中国境外种植面积达 800 万公顷. 某村引进了甲、乙两种超级杂交水稻品种, 在条件 (肥力、日照、通风...) 不同的 6 块试验田中同时播种并核定亩产, 统计结果为: $\overline{x_{\text{甲}}} = 1042\text{kg} / \text{亩}$, $s_{\text{甲}}^2 = 6.5$, $\overline{x_{\text{乙}}} = 1042\text{kg} / \text{亩}$, $s_{\text{乙}}^2 = 1.2$, 则 ____ 品种更适合在该村推广. (填“甲”或“乙”)

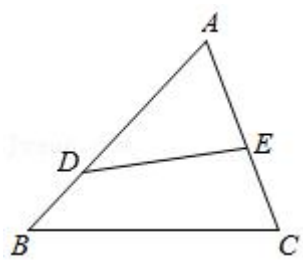
13. (3 分) (2021·湘潭) 如图, 直线 a , b 被直线 c 所截, 已知 $a \parallel b$, $\angle 1 = 130^\circ$, 则 $\angle 2$ 为度.



14. (3 分) (2021·湘潭) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 是边 AB 的中点. 已知 $BC = 10$, 则 $OE =$ ____.



15. (3 分) (2021·湘潭) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别为边 AB , AC 上的点, 试添加一个条件: ____, 使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似. (任意写出一个满足条件的即可)



16. (3 分) (2021·湘潭) 天干地支纪年法是上古文明的产物, 又称节气历或中国阳历. 有十天干与十二地支, 如下表:

天干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸		
	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3		
地支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
--	---	---	---	---	---	---	----	----	----	---	---	---

算法如下：先用年份的尾数查出天干，再用年份除以 12 的余数查出地支．如 2008 年，尾数 8 为戊，2008 除以 12 余数为 4，4 为子，那么 2008 年就是戊子年．

2021 年是伟大、光荣、正确的中国共产党成立 100 周年，则 2021 年是 ____ 年．（用天干地支纪年法表示）

三、解答题（本大题共 10 个小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将解答过程写在答题卡相应位置上，满分 72 分）

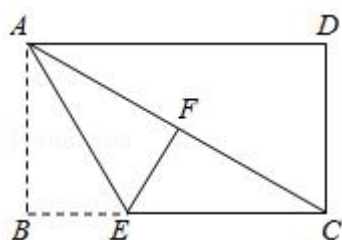
17.（6 分）（2021·湘潭）计算： $|-2| - (\pi - 2)^0 + (\frac{1}{3})^{-1} - 4 \tan 45^\circ$ ．

18.（6 分）（2021·湘潭）先化简，再求值： $(\frac{1}{x+2} + 1) \div \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 4}$ ，其中 $x = 3$ ．

19.（6 分）（2021·湘潭）如图，矩形 $ABCD$ 中， E 为边 BC 上一点，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折后，点 B 恰好落在对角线 AC 的中点 F 上．

（1）证明： $\triangle AEF \cong \triangle CEF$ ；

（2）若 $AB = \sqrt{3}$ ，求折痕 AE 的长度．



20.（6 分）（2021·湘潭）“共和国勋章”获得者钟南山院士说：按照疫苗保护率达到 70% 计算，中国的新冠疫苗覆盖率需要达到近 80%，才有可能形成群体免疫．本着自愿的原则，18 至 60 周岁符合身体条件的中国公民均可免费接种新冠疫苗．居民甲、乙准备接种疫苗，其居住地及工作单位附近有两个大型医院和两个社区卫生服务中心均可免费接种疫苗，提供疫苗种类如下表：

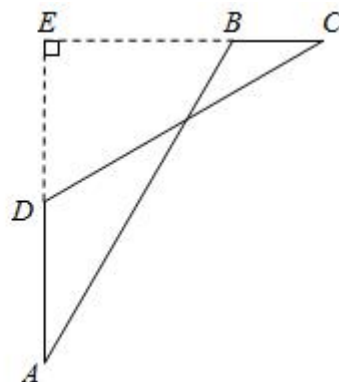
接种地点		疫苗种类
医院	A	新冠病毒灭活疫苗
	B	重组新冠病毒疫苗 (CHO 细胞)
社区卫生服务中心	C	新冠病毒灭活疫苗

	D	重组新冠病毒疫苗(CHO 细胞)
--	-----	------------------

若居民甲、乙均在 A 、 B 、 C 、 D 中随机独立选取一个接种点接种疫苗，且选择每个接种点的机会均等. (提示：用 A 、 B 、 C 、 D 表示选取结果)

- (1) 求居民甲接种的是新冠病毒灭活疫苗的概率；
- (2) 请用列表或画树状图的方法求居民甲、乙接种的是相同种类疫苗的概率.

21. (6分)(2021·湘潭) 万楼是湘潭历史上的标志性建筑，建在湘潭城东北、湘江的下游宋家桥. 万楼的外形设计既融入了皇家大院、一类寺庙的庄严典雅，也吸收了江南民居诸如马头墙、猫拱背墙、灰瓦等特色，而最为独特的还是万楼“九五至尊”的结构.



某数学小组为了测量万楼主楼高度，进行了如下操作：用一架无人机在楼基 A 处起飞，沿直线飞行 120 米至点 B ，在此处测得楼基 A 的俯角为 60° ，再将无人机沿水平方向向右飞行 30 米至点 C ，在此处测得楼顶 D 的俯角为 30° ，请计算万楼主楼 AD 的高度. (结果保留整数， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)

22. (6分)(2021·湘潭) 为隆重纪念中国共产党成立 100 周年，进一步激发师生的爱党爱国热情，某校开展了四项庆祝活动： A 、感党恩·我们诵； B 、听党话·我们唱； C 、跟党走·我们画； D 、学党史·我们写. 其中 C 项活动全体同学参与，预计成绩 $95 < x \leq 100$ 可获一等奖，成绩 $90 < x \leq 95$ 可获二等奖，随机抽取 50 个同学的作品进行打分并对成绩进行整理、分析，得到频数分布直方图如图：

收集其中 $90 < x \leq 100$ 这一组成绩如下：

n 93 92 98 95 95 96 91 94 96

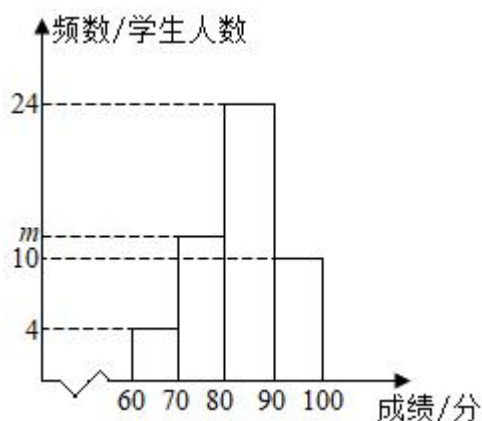
整理该组数据得下表：

组别	平均数	中位数	众数
----	-----	-----	----

获奖组	94.5	95	95
-----	------	----	----

根据以上信息，回答下列问题：

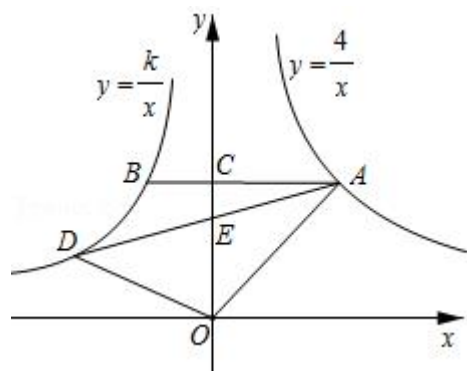
- (1) 频数分布直方图中 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) $90 < x \leq 100$ 组中 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 已知该校有 1200 名学生，估计本次活动获一等奖的同学有多少人？



23. (8分)(2021·湘潭) 如图，点 $A(a, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上， $AB \parallel x$ 轴，且交 y

轴于点 C ，交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 于点 B ，已知 $AC = 2BC$ 。

- (1) 求直线 OA 的解析式；
- (2) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式；
- (3) 点 D 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上一动点，连接 AD 交 y 轴于点 E ，当 E 为 AD 中点时，求 $\triangle OAD$ 的面积。



24. (8分)(2021·湘潭) 2020 年 12 月 30 日，中共湘潭市委创造性地提出了深化“六个湘潭”(实力湘潭、创新湘潭、文化湘潭、幸福湘潭、美丽湘潭、平安湘潭)建设的发展目标.为响应政府号召，湘潭县湘莲种植户借助电商平台，在线下批发的基础上同步在电商平台“拼多多”上零售湘莲. 已知线上零售 40kg 、线下批发 80kg 湘莲共获得 4000 元；线上零售 60kg

和线下批发 80kg 湘莲销售额相同.

(1) 求线上零售和线下批发湘莲的单价分别为每千克多少元?

(2) 该产地某种植大户某月线上零售和线下批发共销售湘莲 2000kg , 设线上零售 $x\text{ kg}$, 获得的总销售额为 y 元:

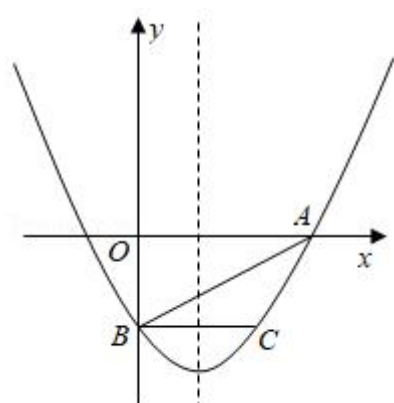
①请写出 y 与 x 的函数关系式;

②若总销售额不低于 70000 元, 则线上零售量至少应达到多少千克?

25. (10 分) (2021·湘潭) 如图, 一次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 图象与坐标轴交于点 A 、 B , 二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 图象过 A 、 B 两点.

(1) 求二次函数解析式;

(2) 点 B 关于抛物线对称轴的对称点为点 C , 点 P 是对称轴上一动点, 在抛物线上是否存在点 Q , 使得以 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 求出 Q 点坐标; 若不存在, 请说明理由.

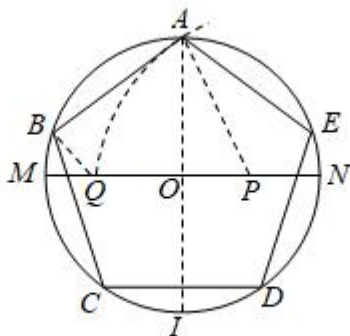


26. (10 分) (2021·湘潭) 德国著名的天文学家开普勒说过: “几何学里有两件宝, 一个是勾股定理, 另一个是黄金分割. 如果把勾股定理比作黄金矿的话, 那么可以把黄金分割比作钻石矿”.

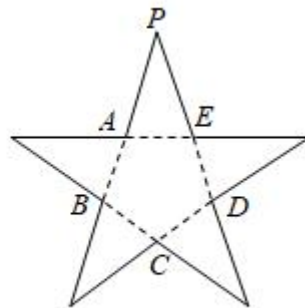
如图①, 点 C 把线段 AB 分成两部分, 如果 $\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 那么称点 C 为线段 AB 的黄金分割点.



图①



图②



图③

(1) 特例感知：在图①中，若 $AB=100$ ，求 AC 的长；

(2) 知识探究：如图②，作 $\odot O$ 的内接正五边形；

①作两条相互垂直的直径 MN 、 AI ；

②作 ON 的中点 P ，以 P 为圆心， PA 为半径画弧交 OM 于点 Q ；

③以点 A 为圆心， AQ 为半径，在 $\odot O$ 上连续截取等弧，使弦 $AB=BC=CD=DE=AQ$ ，连接 AE ；

则五边形 $ABCDE$ 为正五边形．

在该正五边形作法中，点 Q 是否为线段 OM 的黄金分割点？请说明理由；

(3) 拓展应用：国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征，是一个非常优美的几何图形，与黄金分割有着密切的联系．

延长题(2)中的正五边形 $ABCDE$ 的每条边，相交可得到五角星，摆正后如图③，点 E 是线段 PD 的黄金分割点，请利用题中的条件，求 $\cos 72^\circ$ 的值．

2021 年湖南省湘潭市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2021·黔东南州) 2021 的相反数是()

- A. 2021 B. -2021 C. $\frac{1}{2021}$ D. $-\frac{1}{2021}$

【解答】解：2021 的相反数是 -2021，

故选：B.

2. (3 分) (2021·湘潭) 据国家航天局消息，航天科技集团所研制的天问一号探测器由长征五号运载火箭发射，并成功着陆于火星预选着陆区，距离地球 320000000 千米．其中 320000000 用科学记数法表示为()

- A. 0.32×10^9 B. 3.2×10^8 C. 3.2×10^9 D. 32×10^7

【解答】解：320000000 = 3.2×10^8 ，

故选：B.

3. (3 分) (2021·湘潭) 下列计算正确的是()

- A. $m^3 \div m^2 = m$ B. $(a^3)^2 = a^5$ C. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ D. $3a^3 - a^2 = 2a$

【解答】解：A. $m^3 \div m^2 = m$ ，故此选项符合题意；

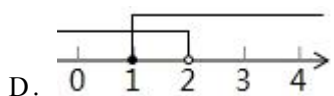
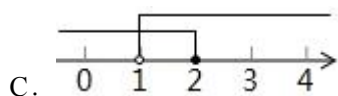
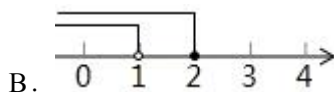
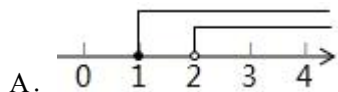
B. $(a^3)^2 = a^6$ ，故此选项不合题意；

C. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，故此选项不合题意；

D. $3a^3$ 与 a^2 无法合并，故此选项不合题意．

故选：A.

4. (3 分) (2021·湘潭) 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 2 \\ 4x-8 < 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()

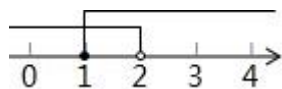


【解答】解：解不等式 $x+1 \geq 2$ ，得： $x \geq 1$ ，

解不等式 $4x - 8 < 0$ ，得： $x < 2$ ，

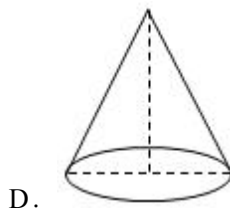
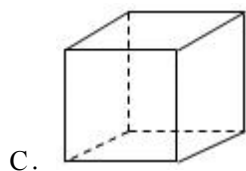
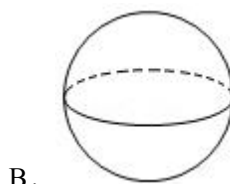
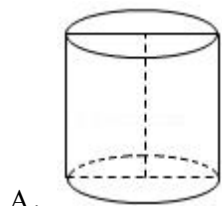
则不等式组的解集为 $1 \leq x < 2$ ，

将不等式组的解集表示在数轴上如下：



故选：D．

5. (3分) (2021·湘潭) 下列几何体中，三视图不含圆的是()



【解答】解：A、圆柱的俯视图是圆，故不符合题意；

B、球的三视图都是圆，故不符合题意；

C、正方体的三视图都是正方形，故符合题意；

D、圆锥的俯视图是圆，故不符合题意，

故选：C．

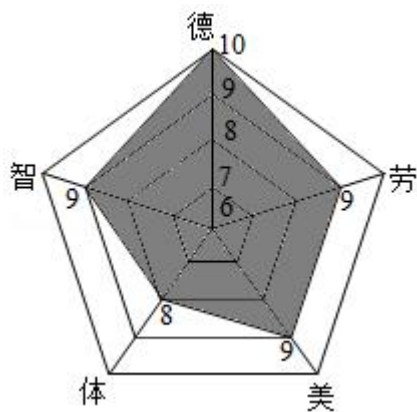
6. (3分) (2021·湘潭) 为执行国家药品降价政策，给人民群众带来实惠，某药品经过两次降价，每瓶零售价由100元降为64元，求平均每次降价的百分率．设平均每次降价的百分率为 x ，可列方程得()

A. $100(1-x)^2 = 64$ B. $100(1+x)^2 = 64$ C. $100(1-2x) = 64$ D. $100(1+2x) = 64$

【解答】解：根据题意得： $100(1-x)^2 = 64$ ，

故选：A．

7. (3分) (2021·湘潭) 某中学积极响应党的号召，大力开展各项有益于德智体美劳全面发展的活动．小明同学在某学期德智体美劳的评价得分如图所示，则小明同学五项评价的平均得分为()

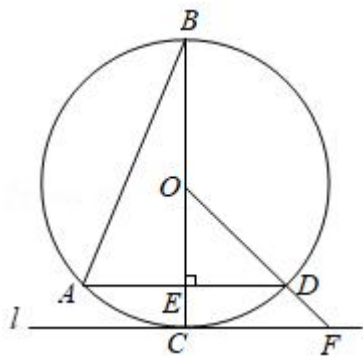


- A. 7 分 B. 8 分 C. 9 分 D. 10 分

【解答】解：小明同学五项评价的平均得分为 $\frac{10+9+9+8+9}{5}=9$ （分），

故选：C．

8. (3 分) (2021·湘潭) 如图， BC 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AD \perp BC$ 于点 E ，直线 l 切 $\odot O$ 于点 C ，延长 OD 交 l 于点 F ，若 $AE=2$ ， $\angle ABC=22.5^\circ$ ，则 CF 的长度为()



- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【解答】解： $\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AD \perp BC$ 于点 E ，

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD}, \quad AE = DE = 2,$$

$$\therefore \angle COD = 2\angle ABC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OED$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore OE = ED = 2,$$

$$\therefore OD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because$ 直线 l 切 $\odot O$ 于点 C ，

$$\therefore BC \perp CF,$$

$\therefore \triangle OCF$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore CF = OC,$$

$$\because OC = OD = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CF = 2\sqrt{2},$$

故选：B.

二、填空题（本题共 8 个小题，请将答案写在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

9.（3 分）（2021·湘潭）单项式 $3x^2y$ 的系数为 3.

【解答】解： $3x^2y = 3 \cdot x^2y$ ，其中数字因式为 3，

则单项式的系数为 3.

故答案为：3.

10.（3 分）（2021·湘潭）在平面直角坐标系中，把点 $A(-2,1)$ 向右平移 5 个单位得到点 A' ，则点 A' 的坐标为 $(3,1)$.

【解答】解： $\because$ 点 $A(-2,1)$ 向右平移 5 个单位得到点 A' ，

$$\therefore A'(3,1),$$

故答案为 $(3,1)$.

11.（3 分）（2021·湘潭）若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $x \geq 2$.

【解答】解：根据题意，使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，即 $x-2 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 2$ ；

故答案为： $x \geq 2$.

12.（3 分）（2021·湘潭）“共和国勋章”获得者、“杂交水稻之父”袁隆平为世界粮食安全作出了杰出贡献. 全球共有 40 多个国家引种杂交水稻，中国境外种植面积达 800 万公顷. 某村引进了甲、乙两种超级杂交水稻品种，在条件（肥力、日照、通风...）不同的 6 块试验田中同时播种并核定亩产，统计结果为： $\overline{x_{\text{甲}}} = 1042\text{kg}/\text{亩}$ ， $s_{\text{甲}}^2 = 6.5$ ， $\overline{x_{\text{乙}}} = 1042\text{kg}/\text{亩}$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 1.2$ ，则 乙 品种更适合在该村推广.（填“甲”或“乙”）

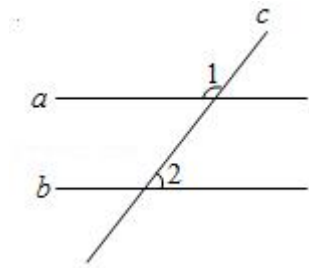
【解答】解： $\because \overline{x_{\text{甲}}} = 1042\text{kg}/\text{亩}$ ， $\overline{x_{\text{乙}}} = 1042\text{kg}/\text{亩}$ ， $s_{\text{甲}}^2 = 6.5$ ， $s_{\text{乙}}^2 = 1.2$ ，

$$\therefore \overline{x_{\text{甲}}} = \overline{x_{\text{乙}}}, \quad s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2,$$

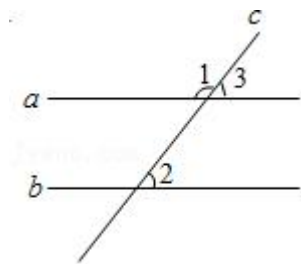
$\therefore$ 产量稳定，适合推广的品种为乙，

故答案为：乙.

13. (3分)(2021·湘潭)如图,直线 a , b 被直线 c 所截,已知 $a \parallel b$, $\angle 1 = 130^\circ$, 则 $\angle 2$ 为 50 度.



【解答】解: $\because \angle 1 = 130^\circ$,



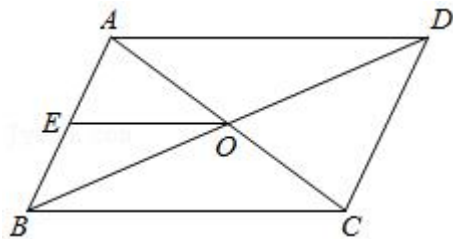
$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ,$$

$\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 50^\circ,$$

故答案为: 50.

14. (3分)(2021·湘潭)如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC , BD 相交于点 O ,点 E 是边 AB 的中点. 已知 $BC = 10$, 则 $OE =$ 5.



【解答】解: 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O ,

$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点,

$\because$ 点 E 是边 AB 的中点,

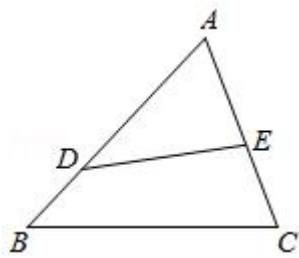
$\therefore OE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = 5.$$

故答案为: 5.

15. (3分)(2021·湘潭)如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D , E 分别为边 AB , AC 上的点, 试添加

一个条件： $\angle ADE = \angle C$ （答案不唯一），使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似.（任意写出一个满足条件的即可）



【解答】解：添加 $\angle ADE = \angle C$ ，
 又 $\because \angle A = \angle A$ ，
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，
 故答案为： $\angle ADE = \angle C$ （答案不唯一）.

16.（3分）（2021·湘潭）天干地支纪年法是上古文明的产物，又称节气历或中国阳历.有十天干与十二地支，如下表：

天干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸		
	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3		
地支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3

算法如下：先用年份的尾数查出天干，再用年份除以 12 的余数查出地支.如 2008 年，尾数 8 为戊，2008 除以 12 余数为 4，4 为子，那么 2008 年就是戊子年.

2021 年是伟大、光荣、正确的中国共产党成立 100 周年，则 2021 年是 辛丑 年.（用天干地支纪年法表示）

【解答】解：2021 年，尾数 1 为辛，2021 除以 12 余数为 5，5 为丑，那么 2021 年就是辛丑年.
 故答案为：辛丑.

三、解答题（本大题共 10 个小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将解答过程写在答题卡相应位置上，满分 72 分）

17.（6分）（2021·湘潭）计算： $|-2| - (\pi - 2)^0 + (\frac{1}{3})^{-1} - 4 \tan 45^\circ$.

【解答】解：原式 $= 2 - 1 + 3 - 4 \times 1$
 $= 2 - 1 + 3 - 4$

= 0 .

18. (6分)(2021·湘潭)先化简,再求值: $(\frac{1}{x+2} + 1) \div \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 4}$, 其中 $x = 3$.

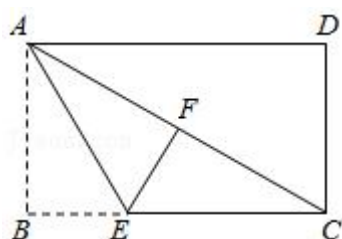
【解答】解: $(\frac{1}{x+2} + 1) \div \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 4}$
 $= \frac{1+x+2}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)^2}$
 $= \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)^2}$
 $= \frac{x-2}{x+3},$

当 $x = 3$ 时, 原式 $= \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$.

19. (6分)(2021·湘潭)如图, 矩形 $ABCD$ 中, E 为边 BC 上一点, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折后, 点 B 恰好落在对角线 AC 的中点 F 上.

(1) 证明: $\triangle AEF \cong \triangle CEF$;

(2) 若 $AB = \sqrt{3}$, 求折痕 AE 的长度.



【解答】解: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折后, 点 B 恰好落在对角线 AC 的中点 F 上,

$$\therefore \angle AFE = \angle B = 90^\circ, \quad AF = CF,$$

$$\because \angle AFE + \angle CFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = 180^\circ - \angle AFE = 90^\circ,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CEF$ 中,

$$\begin{cases} AF = CF \\ \angle AFE = \angle CFE \\ EF = EF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CEF (SAS).$$

(2) 由 (1) 知, $\triangle AEF \cong \triangle CEF$,

$$\therefore \angle EAF = \angle ECF,$$

由折叠性质得， $\angle BAE = \angle EAF$ ，

$$\therefore \angle BAE = \angle EAF = \angle ECF，$$

$$\because \angle B = 90^\circ，$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ，$$

$$\therefore 3\angle BAE = 90^\circ，$$

$$\therefore \angle BAE = 30^\circ，$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore AE = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2。$$

20. (6分)(2021·湘潭)“共和国勋章”获得者钟南山院士说：按照疫苗保护率达到70%计算，中国的新冠疫苗覆盖率需要达到近80%，才有可能形成群体免疫。本着自愿的原则，18至60周岁符合身体条件的中国公民均可免费接种新冠疫苗。居民甲、乙准备接种疫苗，其居住地及工作单位附近有两个大型医院和两个社区卫生服务中心均可免费接种疫苗，提供疫苗种类如下表：

接种地点		疫苗种类
医院	A	新冠病毒灭活疫苗
	B	重组新冠病毒疫苗(CHO 细胞)
社区卫生服务中心	C	新冠病毒灭活疫苗
	D	重组新冠病毒疫苗(CHO 细胞)

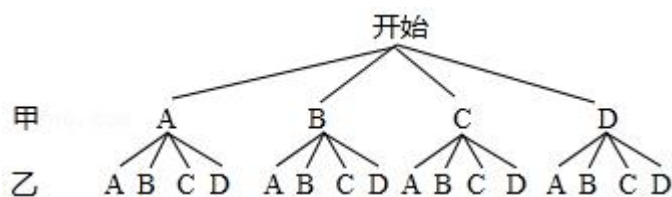
若居民甲、乙均在 A 、 B 、 C 、 D 中随机独立选取一个接种点接种疫苗，且选择每个接种点的机会均等。(提示：用 A 、 B 、 C 、 D 表示选取结果)

(1) 求居民甲接种的是新冠病毒灭活疫苗的概率；

(2) 请用列表或画树状图的方法求居民甲、乙接种的是相同种类疫苗的概率。

【解答】解：(1) 居民甲接种的是新冠病毒灭活疫苗的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

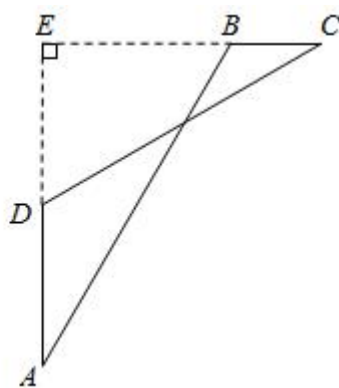
(2) 画树状图如图：



共有 16 种等可能的结果，居民甲、乙接种的是相同种类疫苗的结果有 8 种，

$\therefore$ 居民甲、乙接种的是相同种类疫苗的概率为 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

21. (6 分) (2021·湘潭) 万楼是湘潭历史上的标志性建筑，建在湘潭城东北、湘江的下游宋家桥. 万楼的外形设计既融入了皇家大院、一类寺庙的庄严典雅，也吸收了江南民居诸如马头墙、猫拱背墙、灰瓦等特色，而最为独特的还是万楼“九五至尊”的结构.



某数学小组为了测量万楼主楼高度，进行了如下操作：用一架无人机在楼基 A 处起飞，沿直线飞行 120 米至点 B ，在此处测得楼基 A 的俯角为 60° ，再将无人机沿水平方向向右飞行 30 米至点 C ，在此处测得楼顶 D 的俯角为 30° ，请计算万楼主楼 AD 的高度. (结果保留整数， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)

【解答】 解：由题意可得，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

$\because AB = 120$ 米， $\angle ABE = 60^\circ$ ，

$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 120 = 60$ (米)， $AE = \sin 60^\circ \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 120 = 60\sqrt{3}$ (米)，

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，

$\because \angle DCE = 30^\circ$ ， $CE = BE + CB = 60 + 30 = 90$ (米)，

$\therefore DE = \tan 30^\circ \cdot CE = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 90 = 30\sqrt{3}$ (米)，

$\therefore AD = AE - DE = 60\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \approx 52$ (米) .

答：万楼主楼 AD 的高度约为 52 米.

22. (6分)(2021·湘潭)为隆重纪念中国共产党成立100周年,进一步激发师生的爱党爱国热情,某校开展了四项庆祝活动: A 、感党恩·我们诵; B 、听党话·我们唱; C 、跟党走·我们画; D 、学党史·我们写.其中 C 项活动全体同学参与,预计成绩 $95 < x \leq 100$ 可获一等奖,成绩 $90 < x \leq 95$ 可获二等奖,随机抽取50个同学的作品进行打分并对成绩进行整理、分析,得到频数分布直方图如图:

收集其中 $90 < x \leq 100$ 这一组成绩如下:

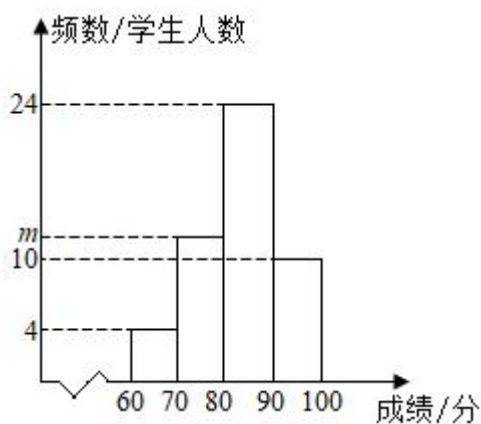
n 93 92 98 95 95 96 91 94 96

整理该组数据得下表:

组别	平均数	中位数	众数
获奖组	94.5	95	95

根据以上信息,回答下列问题:

- (1) 频数分布直方图中 $m = \underline{12}$;
- (2) $90 < x \leq 100$ 组中 $n = \underline{\quad}$;
- (3) 已知该校有1200名学生,估计本次活动获一等奖的同学有多少人?



【解答】解:(1) $m = 50 - 4 - 10 - 24 = 12$,

故答案为:12;

(2) $90 < x \leq 100$ 这一组成绩如下: n 93 92 98 95 95 96 91 94 96, 其中95, 96都出现了2次,

$\therefore$ 该组数据的众数是95,

$\therefore n = 95$,

故答案为:95;

(3) 抽取50个同学的作品成绩 $95 < x \leq 100$ 的人数为3,

$$\therefore 1200 \times \frac{3}{50} = 72 \text{ (人)},$$

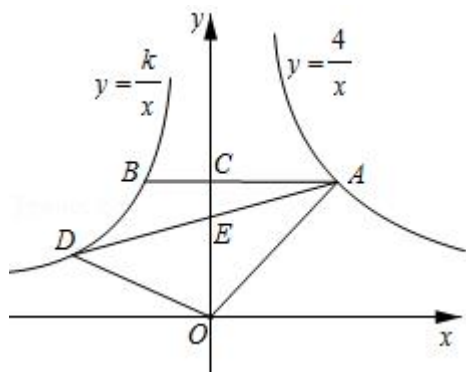
答：估计本次活动获一等奖的同学有 72 人.

23. (8 分) (2021·湘潭) 如图, 点 $A(a, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上, $AB \parallel x$ 轴, 且交 y 轴于点 C , 交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 于点 B , 已知 $AC = 2BC$.

(1) 求直线 OA 的解析式;

(2) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式;

(3) 点 D 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上一动点, 连接 AD 交 y 轴于点 E , 当 E 为 AD 中点时, 求 $\triangle OAD$ 的面积.



【解答】 解: (1) $\because$ 点 $A(a, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上,

$$\therefore 2 = \frac{4}{a}, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\therefore A(2, 2),$$

设直线 OA 解析式为 $y = mx$,

$$\text{则 } 2 = 2m, \text{ 解得 } m = 1,$$

$\therefore$ 直线 OA 解析式为 $y = x$;

(2) 由 (1) 知: $A(2, 2)$,

$\because AB \parallel x$ 轴, 且交 y 轴于点 C ,

$$\therefore AC = 2,$$

$$\because AC = 2BC,$$

$$\therefore BC = 1,$$

$$\therefore B(-1, 2),$$

$$\text{把 } B(-1, 2) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 得: } 2 = \frac{k}{-1},$$

$$\therefore k = -2,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式为 $y = \frac{-2}{x}$;

(3) 设 $D(t, \frac{-2}{t})$, 而 $A(2, 2)$,

$$\therefore AD \text{ 中点 } E(\frac{t+2}{2}, \frac{-\frac{2}{t}+2}{2}),$$

而 E 在 y 轴上,

$$\therefore \frac{t+2}{2} = 0, \text{ 解得 } t = -2,$$

$$\therefore D(-2, 1), E(0, \frac{3}{2}),$$

$$\therefore S_{\triangle DOE} = \frac{1}{2} OE \cdot |x_D| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2},$$

$$S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} OE \cdot |x_A| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \triangle OAD \text{ 面积 } S = S_{\triangle DOE} + S_{\triangle AOE} = 3.$$

24. (8分) (2021·湘潭) 2020年12月30日, 中共湘潭市委创造性地提出了深化“六个湘潭”(实力湘潭、创新湘潭、文化湘潭、幸福湘潭、美丽湘潭、平安湘潭)建设的发展目标. 为响应政府号召, 湘潭县湘莲种植户借助电商平台, 在线下批发的基础上同步在电商平台“拼多多”上零售湘莲. 已知线上零售40kg、线下批发80kg湘莲共获得4000元; 线上零售60kg和线下批发80kg湘莲销售额相同.

(1) 求线上零售和线下批发湘莲的单价分别为每千克多少元?

(2) 该产地某种植大户某月线上零售和线下批发共销售湘莲2000kg, 设线上零售 x kg, 获得的总销售额为 y 元:

①请写出 y 与 x 的函数关系式;

②若总销售额不低于70000元, 则线上零售量至少应达到多少千克?

【解答】解: (1) 设线上零售湘莲的单价为每千克 x 元, 线下批发湘莲的单价为每千克 y 元,

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 40x + 80y = 4000 \\ 60x = 80y \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases},$$

答: 线上零售湘莲的单价为每千克40元, 线下批发湘莲的单价为每千克30元;

(2) ①由题意得: $y = 40x + 30(2000 - x) = 10x + 60000$,

即 y 与 x 的函数关系式为: $y = 10x + 60000$;

②设线上零售量应达到 x 千克,

由①得: $10x + 60000 \geq 70000$,

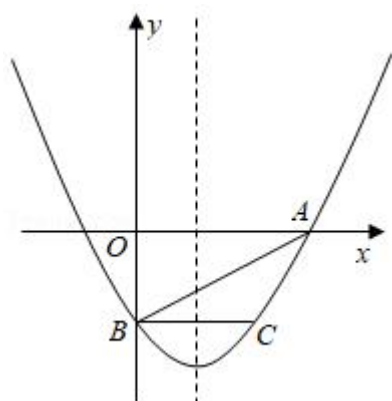
解得: $x \geq 1000$,

答: 线上零售量至少应达到 1000 千克.

25. (10 分) (2021·湘潭) 如图, 一次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 图象与坐标轴交于点 A 、 B , 二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 图象过 A 、 B 两点.

(1) 求二次函数解析式;

(2) 点 B 关于抛物线对称轴的对称点为点 C , 点 P 是对称轴上一动点, 在抛物线上是否存在点 Q , 使得以 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 求出 Q 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



【解答】解: (1) 在 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = -\sqrt{3}$, 令 $y = 0$ 得 $x = 3$,

$\therefore A(3, 0)$, $B(0, -\sqrt{3})$,

$\because$ 二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + bx + c$ 图象过 A 、 B 两点,

$$\therefore \begin{cases} 0 = 3\sqrt{3} + 3b + c \\ -\sqrt{3} = c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ c = -\sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$;

(2) 存在, 理由如下:

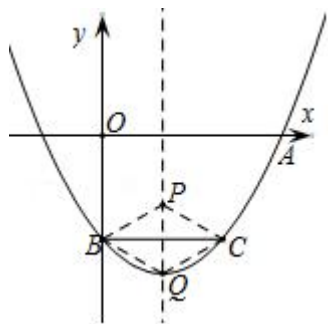
由二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 可得其对称轴为直线 $x = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = 1$,

设 $P(1, m)$, $Q(n, \frac{\sqrt{3}}{3}n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}n - \sqrt{3})$, 而 $B(0, -\sqrt{3})$,

$\therefore C$ 与 B 关于直线 $x=1$ 对称,

$\therefore C(2, -\sqrt{3})$,

①当 BC 、 PQ 为对角线时, 如图:



此时 BC 的中点即是 PQ 的中点, 即
$$\begin{cases} \frac{0+2}{2} = \frac{1+n}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{m + \frac{\sqrt{3}}{3}n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}n - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} m = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ n = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $P(1, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, $Q(1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 时, 四边形 $BQCP$ 是平行四边形,

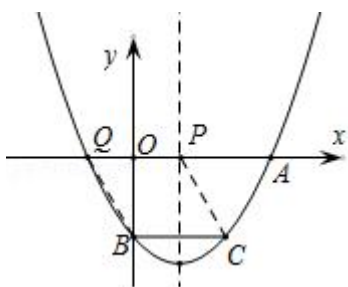
由 $P(1, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, $B(0, -\sqrt{3})$, $C(2, -\sqrt{3})$ 可得 $PB^2 = \frac{4}{3} = PC^2$,

$\therefore PB = PC$,

$\therefore$ 四边形 $BQCP$ 是菱形,

$\therefore$ 此时 $Q(1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$;

② BP 、 CQ 为对角线时, 如图:



同理 BP 、 CQ 中点重合，可得
$$\begin{cases} \frac{0+1}{2} = \frac{2+n}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2} = \frac{-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}n - \sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} m=0 \\ n=-1 \end{cases},$$

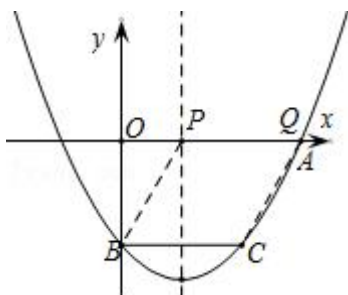
$\therefore$ 当 $P(1,0)$ ， $Q(-1,0)$ 时，四边形 $BCPQ$ 是平行四边形，

由 $P(1,0)$ ， $B(0,-\sqrt{3})$ ， $C(2,-\sqrt{3})$ 可得 $BC^2 = 4 = PC^2$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCPQ$ 是菱形，

$\therefore$ 此时 $Q(-1,0)$ ；

③以 BQ 、 CP 为对角线，如图：



BQ 、 CP 中点重合，可得
$$\begin{cases} \frac{0+n}{2} = \frac{2+1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}n - \sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} m=0 \\ n=3 \end{cases},$$

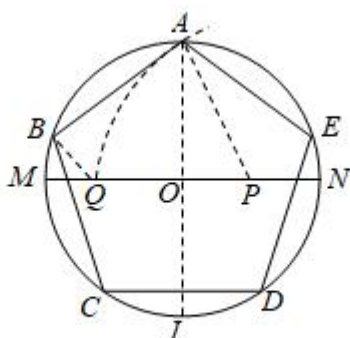
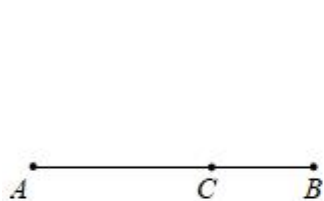
$\therefore P(1,0)$ ， $Q(3,0)$ 时，四边形 $BCQP$ 是平行四边形，

由 $P(1,0)$ ， $B(0,-\sqrt{3})$ ， $C(2,-\sqrt{3})$ 可得 $BC^2 = 4 = PC^2$ ，

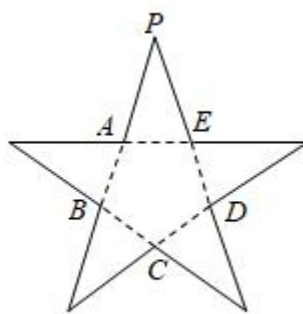
$\therefore$ 四边形 $BCQP$ 是菱形，

综上所述, Q 的坐标为: $(1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(3, 0)$.

如图①，点 C 把线段 AB 分成两部分，如果 $\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ ，那么称点 C 为线段 AB 的黄金分割点。



25



35

(2) 知识探究: 如图②, 作 $\odot O$ 的内接正五边形;

③以点 A 为圆心, AQ 为半径, 在 $\odot O$ 上连续截取等弧, 使弦 $AB = BC = CD = DE = AQ$, 连接 AE ;

在该正五边形作法中，点 O 是否为线段 OM 的黄金分割点？请说明理由；

延长题(2)中的正五边形 $ABCDE$ 的每条边, 相交可得到五角星, 摆正后如图③, 点 E 是线段 PD 的黄金分割点, 请利用题中的条件, 求 $\cos 72^\circ$ 的值.

$$\text{得 } \frac{AB-AC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

第 24 页 (共 25 页)

$$\therefore AC = 50\sqrt{5} - 50 ;$$

(2) Q 是线段 OM 的黄金分割点, 理由如下:

设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OP = \frac{1}{2}r$,

$$\therefore PQ = AP = \sqrt{OP^2 + OA^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r ,$$

$$\therefore OQ = QP - OP = \frac{\sqrt{5}}{2}r - \frac{1}{2}r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r , \quad MQ = OM - OQ = r - \frac{\sqrt{5}-1}{2}r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}r ,$$

$$\therefore \frac{MQ}{OQ} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}r}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}r} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} ,$$

即 Q 是线段 OM 的黄金分割点;

(3) 如图③, 作 $PH \perp AE$ 于 H ,

由题可知, $AH = HE$,

$\therefore$ 正五边形的每个内角都为 $(5-2) \times 180^\circ \div 5 = 108^\circ$,

$$\therefore \angle PEH = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ ,$$

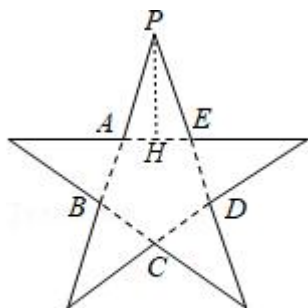
$$\text{即 } \cos \angle PEH = \cos 72^\circ = \frac{EH}{PE} ,$$

$\therefore$ 点 E 是线段 PD 的黄金分割点,

$$\therefore \frac{DE}{PE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} ,$$

$$\text{又 } \because DE = AE , \quad HE = AH = \frac{1}{2}AE ,$$

$$\therefore \cos 72^\circ = \frac{EH}{PE} = \frac{\frac{1}{2}AE}{PE} = \frac{1}{2} \times \frac{AE}{PE} = \frac{1}{2} \times \frac{DE}{PE} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} .$$



图③