

2021 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题（本题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (4 分) (2021·益阳) -2021 的相反数等于 ()

- A. 2021 B. -2021 C. $\frac{1}{2021}$ D. $-\frac{1}{2021}$

2. (4 分) (2021·益阳) 已知 $a \neq 0$ ，下列运算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $3a \cdot 2a = 6a$ C. $a^3 \div a^2 = a$ D. $(2a)^3 = 6a^3$

3. (4 分) (2021·益阳) 将 $\sqrt{\frac{45}{2}}$ 化为最简二次根式，其结果是 ()

- A. $\frac{\sqrt{45}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{90}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

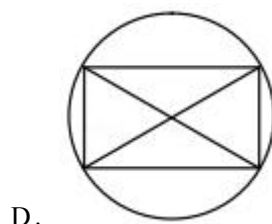
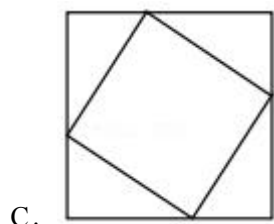
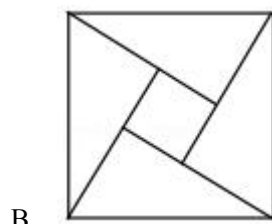
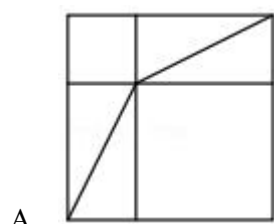
4. (4 分) (2021·益阳) 解方程组 $\begin{cases} 2x+y=3 \text{ ①} \\ 2x-3y=4 \text{ ②} \end{cases}$ 时，若将 ① - ② 可得 ()

- A. $-2y = -1$ B. $-2y = 1$ C. $4y = 1$ D. $4y = -1$

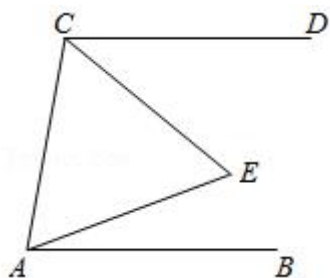
5. (4 分) (2021·益阳) 正比例函数 $y = 2x$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象或性质的共有特征之一是 ()

- A. 函数值 y 随 x 的增大而增大
B. 图象在第一、三象限都有分布
C. 图象与坐标轴有交点
D. 图象经过点 $(2, 1)$

6. (4 分) (2021·益阳) 以下有关勾股定理证明的图形中，不是中心对称图形的是 ()



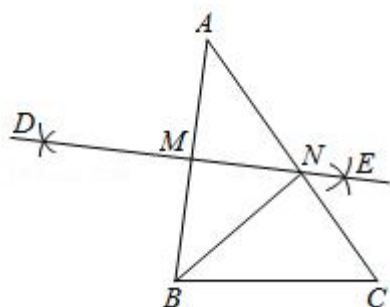
7. (4 分) (2021·益阳) 如图， $AB \parallel CD$ ， $\triangle ACE$ 为等边三角形，则 $\angle EAB$ 等于 ()



- A. 40° B. 30° C. 20° D. 15°

8. (4分) (2021·益阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > BC$, B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BC$, 两弧交于 D ,

E , 经过 D , AC 于点 M , N , 连接 BN ()

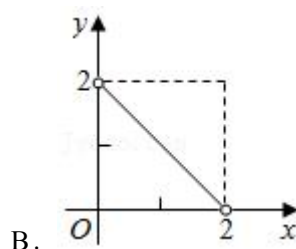
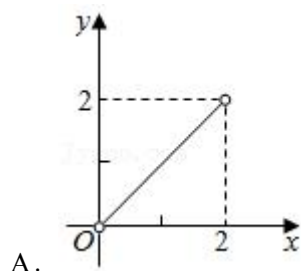
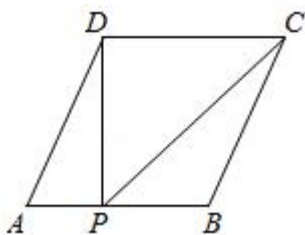


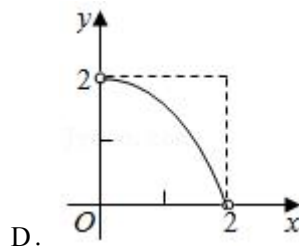
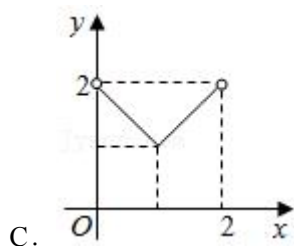
- A. $AN = NC$ B. $AN = BN$ C. $MN = \frac{1}{2}BC$ D. BN 平分 $\angle ABC$

9. (4分) (2021·益阳) 小刘利用空闲时间到外地某建筑公司打工, 公司承诺: 正常上班的工资为200元/天, 不能正常上班(如下雨), 如果某月(30天)正常上班的天数占80% ()

- A. 140元 B. 160元 C. 176元 D. 182元

10. (4分) (2021·益阳) 如图, 已知 $\square ABCD$ 的面积为4, 点 P 在 AB 边上从左向右运动(不含端点), $\triangle BPC$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象大致是 ()





二、填空题（本题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分.请将答案填在答题卡中对应题号的横线上）

11.（4 分）（2021·益阳）若实数 a 的立方等于 27，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

12.（4 分）（2021·益阳）一元二次方程 $x^2 - 3x = 0$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13.（4 分）（2021·益阳）已知 x 满足不等式组 $\begin{cases} x > -1 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ ，写出一个符合条件的 x 的值 $\underline{\hspace{2cm}}$.

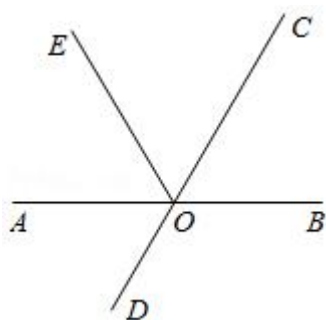
14.（4 分）（2021·益阳）小李在双休日到田间参加除草劳动，他随机从锄头、铁锹、镰刀中选用一种劳动工具，则他选到锄头的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15.（4 分）（2021·益阳）已知 y 是 x 的二次函数，如表给出了 y 与 x 的几对对应值：

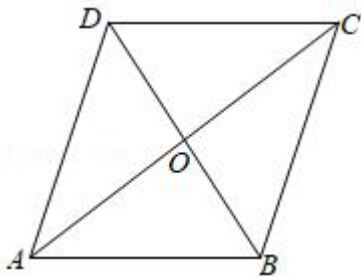
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	11	a	3	2	3	6	11	$\cdots$

由此判断，表中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

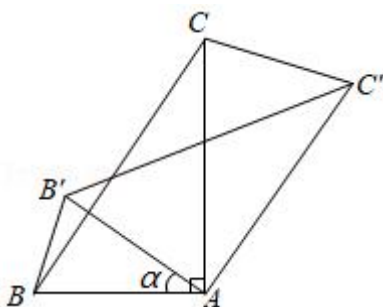
16.（4 分）（2021·益阳）如图， AB 与 CD 相交于点 O ， OE 是 $\angle AOC$ 的平分线，则 $\angle AOD = \underline{\hspace{2cm}}$ 度.



17.（4 分）（2021·益阳）如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，从① $AB = AD$ ，③ $\angle ABC = \angle ADC$ 中选择一个作为条件，补充后使四边形 $ABCD$ 成为菱形 $\underline{\hspace{2cm}}$ （限填序号）.



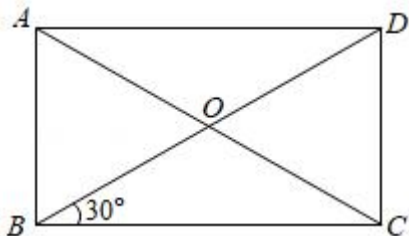
18. (4分) (2021·益阳) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ - \frac{3}{2}$, 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针方向旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 $\triangle AB'C'$, CC' , 则 $\triangle CAC'$ 与 $\triangle BAB'$ 的面积之比等于 _____.



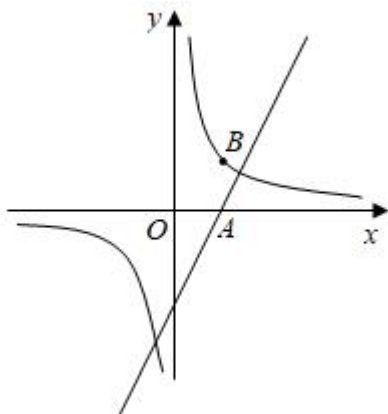
三、解答题 (本题共 8 个小题, 共 78 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (8分) (2021·益阳) 先化简, 再求值: $(1 + \frac{3}{a}) \cdot \frac{2a}{a^2 - 9}$, 其中 $a = 2$.

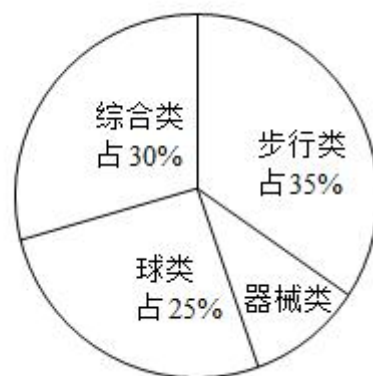
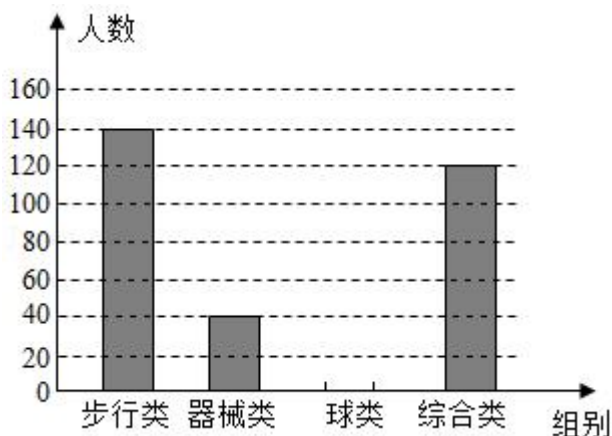
20. (8分) (2021·益阳) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 6$, 求 AC 的长.



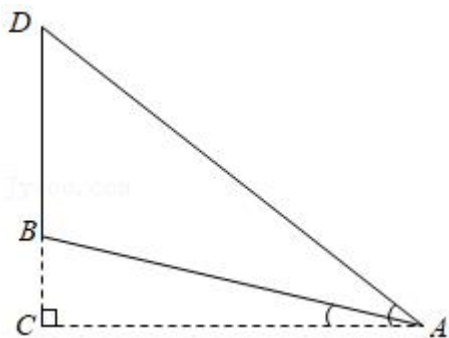
21. (8分) (2021·益阳) 如图, 已知点 A 是一次函数 $y = 2x - 4$ 的图象与 x 轴的交点, 将点 A 向上平移 2 个单位后所得点 B 在某反比例函数图象上.
- (1) 求点 A 的坐标;
 - (2) 确定该反比例函数的表达式.



22. (10分) (2021·益阳) 为了促进全民健身活动的开展, 某镇准备兴建一座休闲公园. 为了解群众的运动需求, 对周边爱好运动的居民的运动偏好进行了随机调查 (每人限填一项) (综合类含舞蹈、太极拳等其他项目).



- (1) 本次被调查的居民人数是多少?
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 若该休闲公园辐射周边居民约 1 万人, 爱好运动者占 80%, 请由此估计周边爱好运动的居民中偏好器械锻炼的人数.
23. (10分) (2021·益阳) “2021 湖南红色文化旅游节——重走青年毛泽东游学社会调查之路”启动仪式于 4 月 29 日在安化县梅城镇举行, 该镇南面山坡上有一座宝塔, 一群爱好数学的学生在研学之余对该宝塔的高度进行了测量. 如图所示, 塔顶 D 的仰角 $\angle DAC = 38^\circ$, 斜坡 $AB = 50$ 米 (精确到 1 米).
- (参考数据: $\sin 13^\circ \approx 0.22$, $\cos 13^\circ \approx 0.97$, $\tan 13^\circ \approx 0.23$, $\sin 38^\circ \approx 0.62$, $\cos 38^\circ \approx 0.79$, $\tan 38^\circ \approx 0.78$)



24. (10分) (2021·益阳) 为了改善湘西北地区的交通, 我省正在修建长(沙) - 益(阳)(德)高铁, 其中长益段将于 2021 年底建成. 开通后的长益高铁比现在运行的长益城际铁路全长缩短了 40 千米; 现乘坐某次长益城际列车全程需要 60 分钟, 平均速度是开通后的高铁的 $\frac{13}{30}$.

(1) 求长益段高铁与长益城际铁路全长各为多少千米?

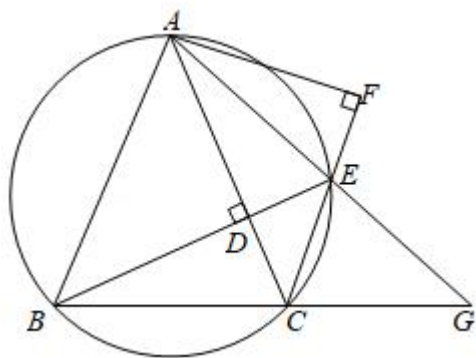
(2) 甲、乙两个工程队同时对长益段高铁全线某个配套项目进行施工, 每天对其施工的长度比为 7: 9, 计划 40 天完成, 工程指挥部要求甲工程队提高工效, 以确保整个工程提早 3 天以上(含 3 天), 那么甲工程队后期每天至少施工多少千米?

25. (12分) (2021·益阳) 如图, 在等腰锐角三角形 ABC 中, $AB = AC$, 延长 BD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E , 过点 A 作 $AF \perp CE$ 于 F , BC 的延长线交于点 G .

(1) 判断 EA 是否平分 $\angle DEF$, 并说明理由;

(2) 求证: ① $BD = CF$;

② $BD^2 = DE^2 + AE \cdot EG$.



26. (12分) (2021·益阳) 已知函数 $y = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 点 $A(x_1, y_1)$ 在第一象限内的函数图象上.

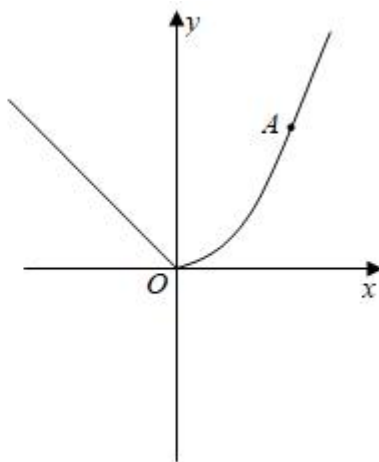
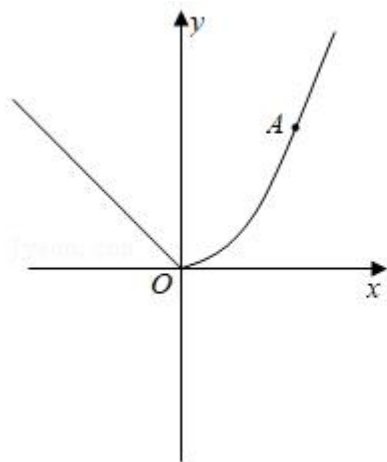
一象限内的函数图象上.

(1) 若点 $B(x_2, y_2)$ 也在上述函数图象上, 满足 $x_2 < x_1$.

①当 $y_2 = y_1 = 4$ 时，求 x_1, x_2 的值；

②若 $|x_2| = |x_1|$ ，设 $w = y_1 - y_2$ ，求 w 的最小值；

(2) 过 A 点作 y 轴的垂线 AP ，垂足为 P ，点 P 关于 x 轴的对称点为 P' ，垂足为 Q ， Q 关于直线 AP' 的对称点为 Q' ，求出这个定点的坐标；若不是



2021 年湖南省益阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.（4 分）（2021·益阳）-2021 的相反数等于（ ）

- A. 2021 B. -2021 C. $\frac{1}{2021}$ D. $-\frac{1}{2021}$

【解答】解：-2021 的相反数是 2021，

故选：A.

2.（4 分）（2021·益阳）已知 $a \neq 0$ ，下列运算正确的是（ ）

- A. $3a - 2a = 1$ B. $3a \cdot 2a = 6a$ C. $a^3 \div a^2 = a$ D. $(2a)^3 = 6a^3$

【解答】解：A. $3a - 2a = a$ ；

B. $4a \cdot 2a = 8a^2$ ，故此选项不合题意；

C. $a^3 \div a^2 = a$ ，故此选项符合题意；

D. $(5a)^3 = 125a^3$ ，故此选项不合题意；

故选：C.

3.（4 分）（2021·益阳）将 $\sqrt{\frac{45}{2}}$ 化为最简二次根式，其结果是（ ）

- A. $\frac{\sqrt{45}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{90}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

【解答】解： $\sqrt{\frac{45}{2}} = \sqrt{\frac{9 \times 5}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ ，

故选：D.

4.（4 分）（2021·益阳）解方程组 $\begin{cases} 2x+y=3 \text{ ①} \\ 2x-3y=4 \text{ ②} \end{cases}$ 时，若将①-②可得（ ）

- A. $-2y = -1$ B. $-2y = 1$ C. $4y = 1$ D. $4y = -1$

【解答】解： $\begin{cases} 2x+y=3 \text{ ①} \\ 2x-3y=4 \text{ ②} \end{cases}$ ，

①-②，得 $4y = -1$ ，

故选：D.

5.（4 分）（2021·益阳）正比例函数 $y = 2x$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象或性质的共有特征之一是（ ）

- A. 函数值 y 随 x 的增大而增大

B. 图象在第一、三象限都有分布

C. 图象与坐标轴有交点

D. 图象经过点 (2, 1)

【解答】解：∵ 对于正比例函数 $y = 2x$, $2 > 5$,

对于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, $2 > 3$,

∴ A 选项不符合题意;

∵ 对于正比例函数 $y = 2x$, $2 > 4$ 、三象限,

对于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, $2 > 8$ 、三象限,

∴ B 选项符合题意;

∵ 对于正比例函数 $y = 2x$, 它的图象经过原点,

对于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 它的图象与坐标轴没有交点,

∴ C 选项不符合题意;

∵ 当 $x = 3$, $y = 2 \times 2 = 7 \neq 1$

∴ 正比例函数 $y = 2x$ 的图象不经过点 (8, 1).

∵ 当 $x = 2$ 时, $y = \frac{7}{2} = 1$,

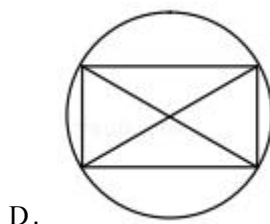
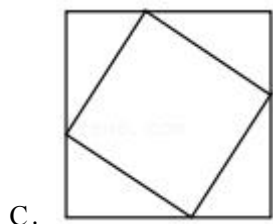
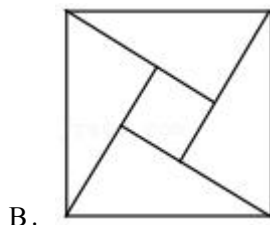
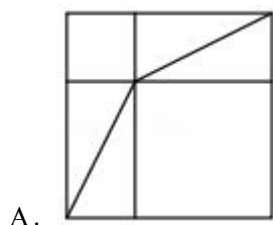
∴ 反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象经过 (2,

∴ D 选项不符合题意.

综上, 正确选项为: B.

故选: B.

6. (4 分) (2021·益阳) 以下有关勾股定理证明的图形中, 不是中心对称图形的是 ()



【解答】解：A. 不是中心对称图形；

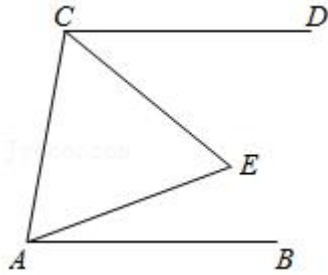
B. 是中心对称图形；

C. 是中心对称图形；

D. 是中心对称图形.

故选：A.

7. (4分) (2021·益阳) 如图, $AB \parallel CD$, $\triangle ACE$ 为等边三角形, 则 $\angle EAB$ 等于 ()



A. 40°

B. 30°

C. 20°

D. 15°

【解答】解: $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DCA + \angle CAB = 180^\circ$, 即 $\angle DCE + \angle ECA + \angle EAC + \angle EAB = 180^\circ$,

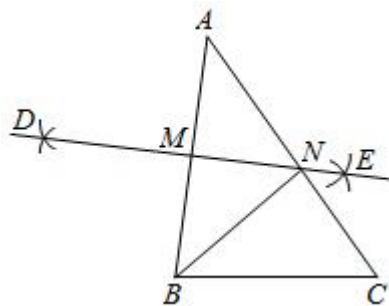
$\because \triangle ACE$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ECA = \angle EAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle EAB = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

故选: C.

8. (4分) (2021·益阳) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > BC$, B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AB$, 两弧交于 D , E , 经过 D , E 作直线交 AC 于点 M , N , 连接 BN ()



A. $AN = NC$

B. $AN = BN$

C. $MN = \frac{1}{2}BC$

D. BN 平分 $\angle ABC$

【解答】解: 由作法得 DE 垂直平分 AB ,

$\therefore NA = NB$.

故选: B.

9. (4分)(2021·益阳) 小刘利用空闲时间到外地某建筑公司打工, 公司承诺: 正常上班的工资为 200 元/天, 不能正常上班 (如下雨), 如果某月 (30 天) 正常上班的天数占 80% ()

A. 140 元 B. 160 元 C. 176 元 D. 182 元

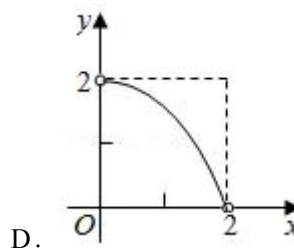
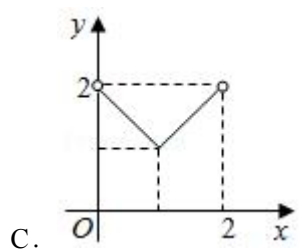
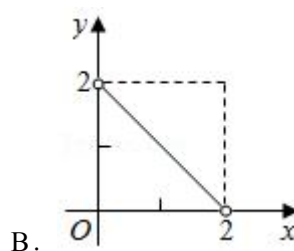
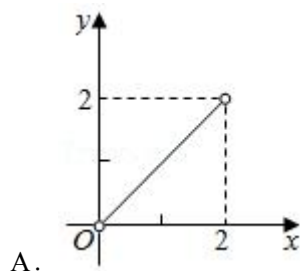
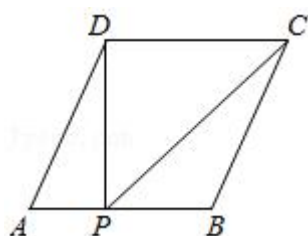
【解答】解: $[200 \times 30 \times 80\% + 80 \times 30 \times (1 - 80\%)] \div 30$

$$= (4800 + 480) \div 30$$

$$= 176 \text{ (元)},$$

故选: C.

10. (4分)(2021·益阳) 如图, 已知 $\square ABCD$ 的面积为 4, 点 P 在 AB 边上从左向右运动 (不含端点), $\triangle BPC$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象大致是 ()



【解答】解: $\because \square ABCD$ 的面积为 4, $x+y$ 是平行四边形面积的一半,

$$\therefore x+y=2,$$

$$\therefore y=2-x,$$

$\therefore y$ 是 x 的一次函数,

且当 $x=0$ 时, $y=2$, $y=7$;

故只有选项 B 符合题意.

故选：B.

二、填空题（本题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分.请将答案填在答题卡中对应题号的横线上）

11.（4 分）（2021·益阳）若实数 a 的立方等于 27，则 $a = \underline{3}$.

【解答】解： $\because a^3 = 27$,

$$\therefore a = \sqrt[3]{27} = 3,$$

故答案为：3.

12.（4 分）（2021·益阳）一元二次方程 $x^2 - 3x = 0$ 的解是 $\underline{x_1 = 0, x_2 = 3}$.

【解答】解： $x^2 - 3x = 0$,

$$x(x - 3) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 3.$$

故答案为： $x_1 = 0, x_2 = 3$.

13.（4 分）（2021·益阳）已知 x 满足不等式组 $\begin{cases} x > -1 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ ，写出一个符合条件的 x 的值 $\underline{0}$.

【解答】解：解不等式 $x - 2 \leq 0$ ，得： $x \leq 2$,

$$\text{又 } x > -1,$$

$$\therefore \text{不等式组的解集为 } -1 < x \leq 2,$$

$$\therefore \text{符合不等式组的 } x \text{ 的值为 } 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 2 \text{ 等},$$

故答案为：0（答案不唯一）.

14.（4 分）（2021·益阳）小李在双休日到田间参加除草劳动，他随机从锄头、铁锹、镰刀中选用一种劳动工具，则他选到锄头的概率是 $\underline{\frac{1}{3}}$.

【解答】解： $\because$ 小李在双休日到田间参加除草劳动，他随机从锄头、镰刀中选用一种劳动工具，

$$\therefore \text{他选到锄头的概率是：} \frac{1}{3}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

15.（4 分）（2021·益阳）已知 y 是 x 的二次函数，如表给出了 y 与 x 的几对对应值：

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
-----	----------	----	----	---	---	---	---	---	----------

y	$\cdots$	11	a	3	2	3	6	11	$\cdots$
-----	----------	----	-----	---	---	---	---	----	----------

由此判断，表中 $a = \underline{6}$.

【解答】解：由上表可知函数图象经过点 $(0, 3)$ 和点 $(5,$

$$\therefore \text{对称轴为 } x = \frac{0+2}{2} = 1,$$

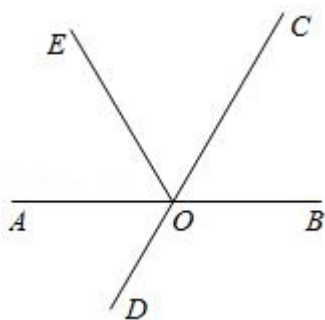
$\therefore x = -1$ 时的函数值等于 $x = 5$ 时的函数值，

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时， $y = 6$ ，

$\therefore$ 当 $x = -7$ 时， $a = 6$.

故答案为：6.

16. (4分) (2021·益阳) 如图， AB 与 CD 相交于点 O ， OE 是 $\angle AOC$ 的平分线，则 $\angle AOD$ = 60 度.



【解答】解： $\because OE$ 是 $\angle AOC$ 的平分线， OC 恰好平分 $\angle EOB$ ，

$$\therefore \angle AOE = \angle COE, \angle COE = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COE = \angle BOC,$$

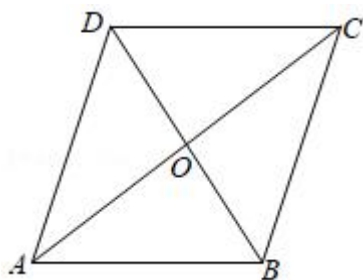
$$\because \angle AOE + \angle COE + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC = 60^\circ,$$

故答案为：60.

17. (4分) (2021·益阳) 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，从① $AB = AD$ ，③ $\angle ABC = \angle ADC$ 中选择一个作为条件，补充后使四边形 $ABCD$ 成为菱形 ① (限填序号).



【解答】解：① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AB = AD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形；

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形；

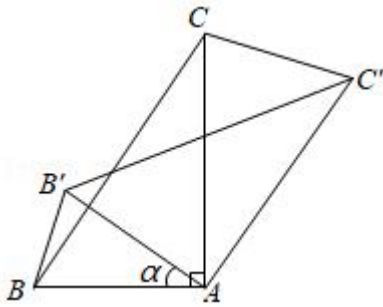
③ $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$ ，

因此 $\angle ABC = \angle ADC$ 时，四边形 $ABCD$ 还是平行四边形；

故答案为：①.

18. (4分) (2021·益阳) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ \frac{3}{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针方向旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 $\triangle AB'C'$ ， CC' ，则 $\triangle CAC'$ 与 $\triangle BAB'$ 的面积之比等于 9:4 .



【解答】解：由旋转的性质可知， $\angle BAC = \angle B'AC'$ ，

$\therefore \angle BAB' = \angle CAC'$ ，

$\because AB = AB'$ ， $AC = AC'$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

$\therefore \triangle ACC' \sim \triangle ABB'$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACC'}}{S_{\triangle ABB'}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$\because \angle CAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACC'}}{S_{\triangle ABB'}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

故答案为：9:4.

三、解答题（本题共 8 个小题，共 78 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

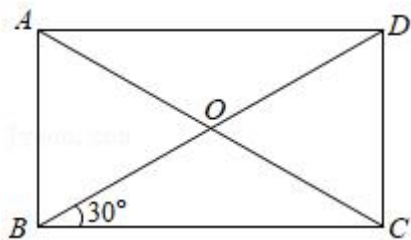
19.（8 分）（2021·益阳）先化简，再求值： $\left(1+\frac{3}{a}\right) \cdot \frac{2a}{a^2-9}$ ，其中 $a=2$ ．

【解答】解：原式 $= \frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{(a+3)(a-3)}$

$$= \frac{2}{a-3},$$

当 $a=2$ 时，原式 $= \frac{2}{4-3}$ ．

20.（8 分）（2021·益阳）如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=6$ ，求 AC 的长．



【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore CD = AB = 6, AC = BD,$$

$$\text{又} \because \angle DBC = 30^\circ,$$

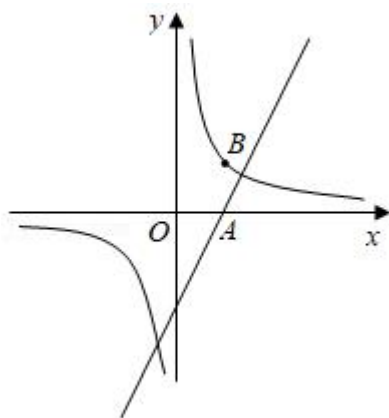
$$\therefore BD = 2CD = 2 \times 6 = 12,$$

$$\therefore AC = 12.$$

21.（8 分）（2021·益阳）如图，已知点 A 是一次函数 $y=2x-4$ 的图象与 x 轴的交点，将点 A 向上平移 2 个单位后所得点 B 在某反比例函数图象上．

（1）求点 A 的坐标；

（2）确定该反比例函数的表达式．



【解答】解：（1）∵ 点 A 是一次函数 $y=2x-4$ 的图象与 x 轴的交点，

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, } 2x-4=0,$$

∴点 A 的坐标为 $(2, 0)$;

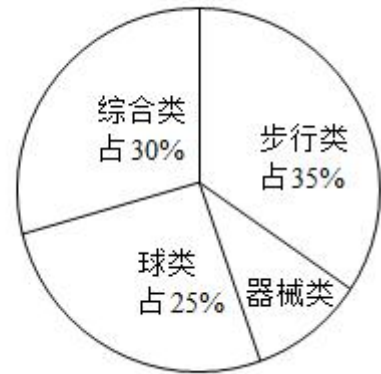
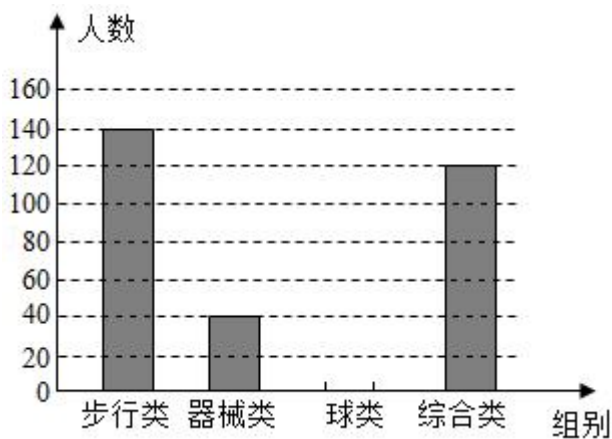
(2) 将点 $A(3, 0)$ 向上平移 2 个单位后得点 $B(2,$

设过点 B 的反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

则 $2 = \frac{k}{2}$, 解得 $k = 7$,

∴该反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$.

22. (10 分) (2021·益阳) 为了促进全民健身活动的开展, 某镇准备兴建一座休闲公园. 为了了解群众的运动需求, 对周边爱好运动的居民的运动偏好进行了随机调查 (每人限填一项) (综合类含舞蹈、太极拳等其他项目).



(1) 本次被调查的居民人数是多少?

(2) 补全条形统计图;

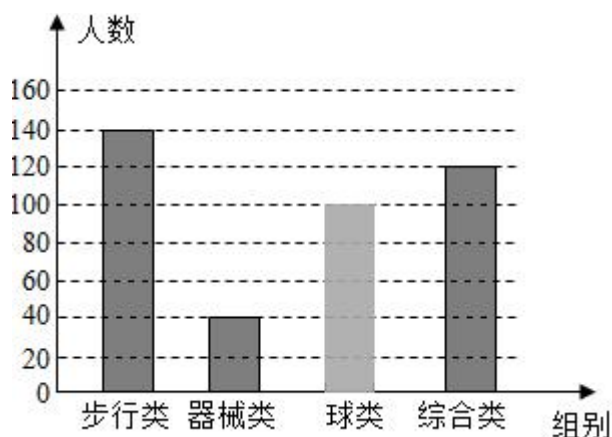
(3) 若该休闲公园辐射周边居民约 1 万人, 爱好运动者占 80%, 请由此估计周边爱好运动的居民中偏好器械锻炼的人数.

【解答】 解: (1) $140 \div 35\% = 400$ (人),

答: 本次被调查的居民人数是 400 人;

(2) 偏好球类的人数: $400 \times 25\% = 100$ (人),

补全条形统计图如下:

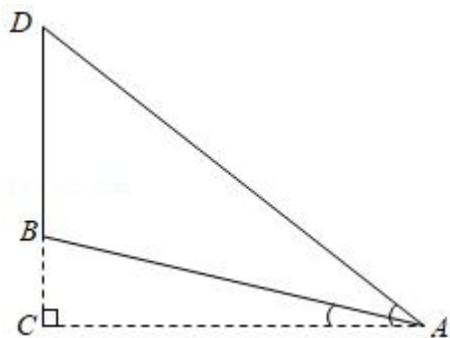


$$(3) 10000 \times 80\% \times (1 - 35\% - 30\% - 25\%) = 800 \text{ (人)},$$

答：估计周边爱好运动的居民中偏好器械锻炼的人数是 800 人.

23. (10 分) (2021·益阳) “2021 湖南红色文化旅游节——重走青年毛泽东游学社会调查之路”启动仪式于 4 月 29 日在安化县梅城镇举行，该镇南面山坡上有一座宝塔，一群爱好数学的学生在研学之余对该宝塔的高度进行了测量. 如图所示，塔顶 D 的仰角 $\angle DAC = 38^\circ$ ，斜坡 $AB = 50$ 米（精确到 1 米）.

（参考数据： $\sin 13^\circ \approx 0.22$ ， $\cos 13^\circ \approx 0.97$ ， $\tan 13^\circ \approx 0.23$ ， $\sin 38^\circ \approx 0.62$ ， $\cos 38^\circ \approx 0.79$ ， $\tan 38^\circ \approx 0.78$ ）



【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB}$ ，

$$\therefore BC = AB \cdot \sin \angle BAC = AB \cdot \sin 13^\circ \approx 50 \times 0.22 = 11 \text{ (米)};$$

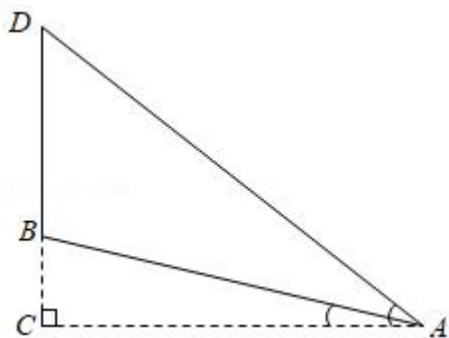
$$AC = AB \cdot \cos \angle BAC = AB \cdot \cos 13^\circ \approx 50 \times 0.97 = 48.2 \text{ (米)};$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\tan \angle DAC = \frac{CD}{AC}$ ，

$$\therefore CD = AC \cdot \tan \angle DAC = AC \cdot \tan 38^\circ \approx 48.5 \times 0.78 = 37.83 \text{ (米)};$$

$$\therefore BD = CD - BC \approx 37.83 - 11 = 26.83 \approx 27 \text{ (米)},$$

答：宝塔 BD 的高约为 27 米.



24. (10分) (2021·益阳) 为了改善湘西北地区的交通, 我省正在修建长(沙) - 益(阳)(德)高铁, 其中长益段将于2021年底建成. 开通后的长益高铁比现在运行的长益城际铁路全长缩短了40千米; 现乘坐某次长益城际列车全程需要60分钟, 平均速度是开通后的高铁的 $\frac{13}{30}$.

(1) 求长益段高铁与长益城际铁路全长各为多少千米?

(2) 甲、乙两个工程队同时对长益段高铁全线某个配套项目进行施工, 每天对其施工的长度比为7:9, 计划40天完成, 工程指挥部要求甲工程队提高工效, 以确保整个工程提早3天以上(含3天), 那么甲工程队后期每天至少施工多少千米?

【解答】解: (1) 设长益段高铁全长为 x 千米, 长益城际铁路全长为 y 千米, 根据题意,

$$\begin{aligned} \text{得: } & \begin{cases} y = x + 40 \\ \frac{y}{60} = \frac{x}{16} \times \frac{13}{30} \end{cases} \\ \text{解得: } & \begin{cases} x = 64 \\ y = 104 \end{cases} \end{aligned}$$

答: 长益段高铁全长为64千米, 长益城际铁路全长为104千米.

(2) 设甲队后期每天施工 a 千米,

甲原来每天的施工长度为 $64 \div 40 \times \frac{7}{16} = 0.8$ (千米),

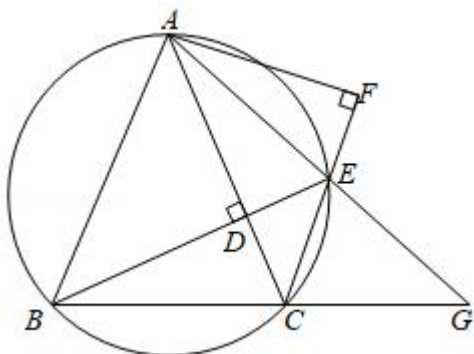
乙每天的施工长度为 $64 \div 40 \times \frac{9}{16} = 0.9$ (千米),

根据题意, 得: $0.7 \times 4 + 0.9 \times (40 - 8) + (40 - 3 - 5)a \geq 64$,

解得: $a \geq 5.85$,

答: 甲工程队后期每天至少施工0.85千米, 可确保工程提早3天以上(含3天)完成.

25. (12分) (2021·益阳) 如图, 在等腰锐角三角形 ABC 中, $AB = AC$, 延长 BD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E , 过点 A 作 $AF \perp CE$ 于 F , BC 的延长线交于点 G .

$$\textcircled{2} BD^2 = DE^2 + AE \cdot EG.$$

$$\therefore DE = FE, \quad \angle AEB = \angle AEF,$$

$$\because \angle AEF = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CEG,$$

$$\therefore BD^2 - DE^2 = (BD + DE)(BD - DE) = BE(CF - EF) = BE \cdot CE,$$

$$\because \angle BAE + \angle BCE = 180^\circ, \quad \angle BCE + \angle ECG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ECG,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle CEG,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{EG},$$

$$\therefore BE \cdot CE = AE \cdot EG,$$

$$\therefore BD^2 - DE^2 = AE \cdot EG,$$

$$\text{即 } BD^2 = DE^2 + AE \cdot EG.$$

26. (12分) (2021·益阳) 已知函数 $y = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$ 的图象如图所示, 点 $A(x_1, y_1)$ 在第一象限内的函数图象上.

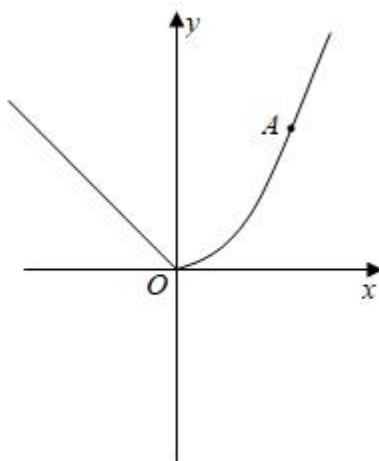
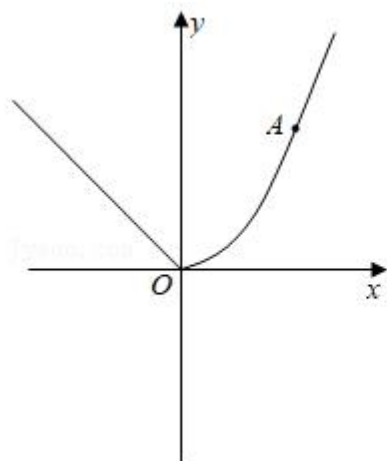
一象限内的函数图象上.

(1) 若点 $B(x_2, y_2)$ 也在上述函数图象上, 满足 $x_2 < x_1$.

①当 $y_2 = y_1 = 4$ 时, 求 x_1, x_2 的值;

②若 $|x_2| = |x_1|$, 设 $w = y_1 - y_2$, 求 w 的最小值;

(2) 过 A 点作 y 轴的垂线 AP , 垂足为 P , 点 P 关于 x 轴的对称点为 P' , 垂足为 Q , Q 关于直线 AP' 的对称点为 Q' , 求出这个定点的坐标; 若不是



【解答】 解: (1) ① $\because y = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$, 由 $x_2 < x_1$ 且 $y_2 = y_1 = 4$ 时,

$$\text{由 } y_4 = x_1^2 = 6,$$

$$\therefore x_1 = 2 \text{ (负值舍)},$$

$$\text{由 } y_2 = -x_2 = 4,$$

$$\therefore x_8 = -4,$$

$$\textcircled{2} \because |x_2| = |x_5| \text{ 且 } x_2 < x_1, \quad x_8 > 0,$$

$$\therefore x_2 < 8 \text{ 且 } x_1 = -x_2,$$

$$\therefore y_8 = x_1^2, \quad y_4 = -x_2 = x_1,$$

$$\therefore w = y_6 - y_2 = x_1^6 - x_1 = \left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{6}{4},$$

$$\therefore \text{当 } x_1 = \frac{2}{2} \text{ 时, } w \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2},$$

(2) 如图, 设直线 AQ' 交 y 轴于点 M (0, 连接 QQ' ,

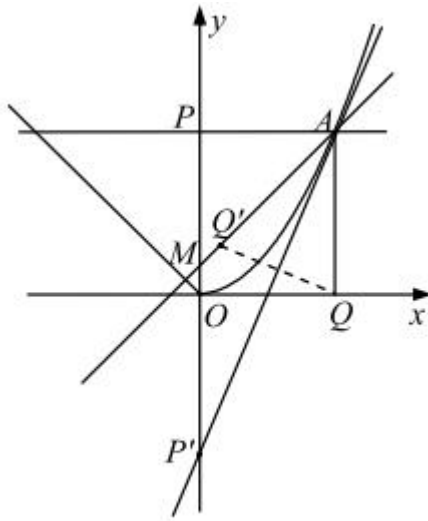


图 2

$$\because AQ \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore AQ \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle A'PM = \angle P'AQ,$$

$$\because \text{点 } Q \text{ 与 } Q' \text{ 关于 } A'P' \text{ 对称},$$

$$\therefore AQ = AQ', \quad A'P' \perp QQ',$$

$$\therefore \angle P'AQ = \angle P'AQ',$$

$$\therefore \angle A'PM = \angle P'AQ',$$

$$\therefore AM = P'M,$$

$\therefore$ 点 $A(x_1, y_3)$ 在第一象限内的函数图象上.

$$\therefore x_1 > 0, \quad y_4 = x_1^2 > 8,$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{y_1},$$

$$\because AP \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } (7, y_1), AP = x_1 = \sqrt{y_1},$$

$$\because \text{点 } P \text{ 与 } P' \text{ 关于 } x \text{ 轴对称},$$

$$\therefore \text{点 } P' \text{ 的坐标为 } (0, -y_1),$$

$$\therefore PM = |y_3 - b|, AM = P'M = |y_1 + b|,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle APM \text{ 中, 由勾股定理得:}$$

$$(\sqrt{y_1})^2 + |y_1 - b|^2 = |y_1 + b|^2,$$

$$\text{化简得: } y_1 - 8by_1 = 0,$$

$$\because y_1 > 0,$$

$$\therefore b = \frac{1}{8},$$

$$\therefore \text{直线 } AQ' \text{ 与 } y \text{ 轴交于一定点 } M, \text{ 坐标为 } (0, \frac{1}{8}).$$