

2021 年湖南省永州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分，每个小题只有一个正确选项请将正确的选项填涂到答题卡上）

1. $-|-2021|$ 的相反数为（ ）

A. -2021

B. 2021

C. $-\frac{1}{2021}$

D. $\frac{1}{2021}$

2. 如图，在平面内将五角星绕其中心旋转 180° 后所得到的图案是（ ）



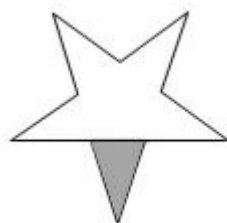
A.



B.



C.



D.



3. 据永州市 2020 年国民经济和社会发展统计公报，永州市全年全体居民人均可支配收入约为 24000 元，比上年增长 6.5%，将“人均可支配收入”用科学记数法表示为（ ）

A. 24×10^3

B. 2.4×10^4

C. 2.4×10^5

D. 0.24×10^5

4. 已知一组数据：27，12，12，5，7，12，5. 该组数据的众数是（ ）

A. 27

B. 12

C. 7

D. 5

5. 下列计算正确的是（ ）

A. $(\pi - 3)^0 = 1$

B. $\tan 30^\circ = \frac{1}{2}$

C. $\sqrt{4} = \pm 2$

D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

6. 在一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases}$ 的解集中，整数解的个数是（ ）

A. 4

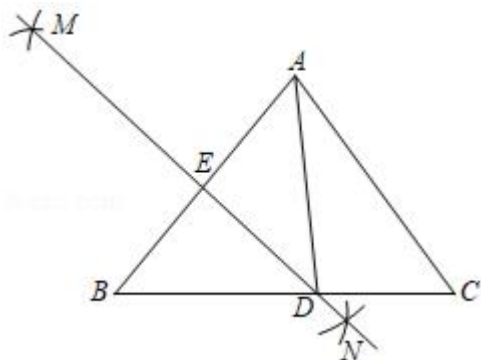
B. 5

C. 6

D. 7

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，分别以点 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两

弧相交于点 M 和点 N ，作直线 MN 分别交 BC 、 AB 于点 D 和点 E ，若 $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle CAD$ 的度数是（ ）



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

8. 中国传统数学重要著作《九章算术》中记载：今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数、物价各几何？据此设计一类似问题：今有人组团购一物，如果每人出 9 元，则多了 4 元；如果每人出 6 元，则少了 5 元，问组团人数和物价各是多少？若设 x 人参与组团，物价为 y 元，则以下列出的方程组正确的是（ ）

- A. $\begin{cases} 9x - y = 4 \\ y - 6x = 5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 9x - y = 4 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y - 9x = 4 \\ y - 6x = 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y - 9x = 4 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$

9. 小明计划到永州市体验民俗文化，想从“零陵渔鼓、瑶族长鼓舞、东安武术、舜帝祭典”四种民俗文化中任意选择两项，则小明选择体验“瑶族长鼓舞、舜帝祭典”的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

10. 定义：若 $10^x = N$ ，则 $x = \lg N$ ， x 称为以 10 为底的 N 的对数，简记为 $\lg N$ ，其满足运算法则： $\lg M + \lg N = \lg (M \cdot N)$ ($M > 0$, $N > 0$). 例如：因为 $10^2 = 100$ ，所以 $2 = \lg 100$ ，亦即 $\lg 100 = 2$ ； $\lg 4 + \lg 3 = \lg 12$. 根据上述定义和运算法则，计算 $(\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5$ 的结果为（ ）

- A. 5 B. 2 C. 1 D. 0

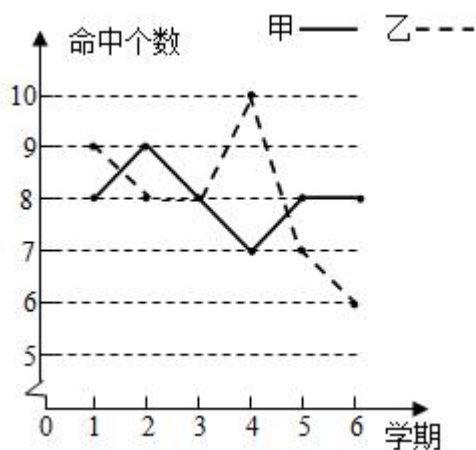
二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分，请将答案填在答题卡的答案栏内）

11. 在 0 , $\frac{22}{7}$, -0.101001 , π , $\sqrt[3]{8}$ 中无理数的个数是 _____ 个.

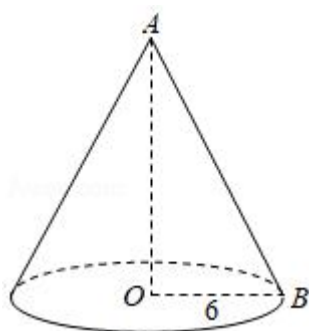
12. 已知二次根式 $\sqrt{x+3}$ 有意义，则 x 的取值范围是 _____.

13. 请写出一个图象在第二、四象限的反比例函数的表达式：_____.

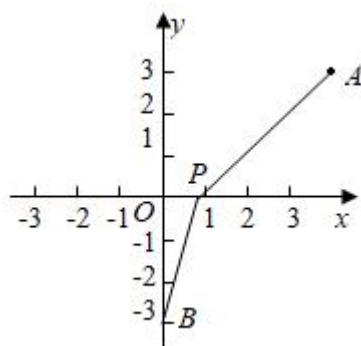
14. 某初级中学坚持开展阳光体育活动，七年级至九年级每学期均进行体育技能测试．其中 A 班甲、乙两位同学 6 个学期的投篮技能测试成绩（投篮命中个数）折线图如图所示．为参加学校举行的毕业篮球友谊赛，A 班需从甲、乙两位同学中选 1 人进入班球队，从两人成绩的稳定性考虑，请你决策 A 班应该选择的同学是 _____．



15. 某同学在数学实践活动中，制作了一个侧面积为 60π ，底面半径为 6 的圆锥模型（如图所示），则此圆锥的母线长为 _____．



16. 如图，A，B 两点的坐标分别为 $A(4, 3)$ ， $B(0, -3)$ ，在 x 轴上找一点 P，使线段 $PA+PB$ 的值最小，则点 P 的坐标是 _____．



17. 已知函数 $y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-2, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $y = 2$ ，则 $x =$ _____．

18. 若 x, y 均为实数, $43^x = 2021, 47^y = 2021$, 则:

(1) $43^{xy} \cdot 47^{xy} = (\quad)^{x+y}$;

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 78 分)

19. (8 分) 先化简, 再求值: $(x+1)^2 + (2+x)(2-x)$, 其中 $x = 1$.

20. (8 分) 若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, x_1

$\cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 现已知一元二次方程 $px^2 + 2x + q = 0$ 的两根分别为 m, n .

(1) 若 $m = 2, n = -4$, 求 p, q 的值;

(2) 若 $p = 3, q = -1$, 求 $m + mn + n$ 的值.

21. (8 分) 为庆祝中国共产党成立 100 周年, 某校组织全校学生进行了一场党史知识竞赛活动根据竞赛结果, 抽取了 200 名学生的成绩 (得分均为正整数, 满分为 100 分, 大于 80 分的为优秀) 进行统计, 绘制了如图所示尚不完整的统计图表.

200 名学生党史知识竞赛成绩的频数表

组别	频数	频率
A 组 (60.5 ~ 70.5)	a	0.3
B 组 (70.5 ~ 80.5)	30	0.15
C 组 (80.5 ~ 90.5)	50	b
D 组 (90.5 ~ 100.5)	60	0.3

请结合图表解决下列问题:

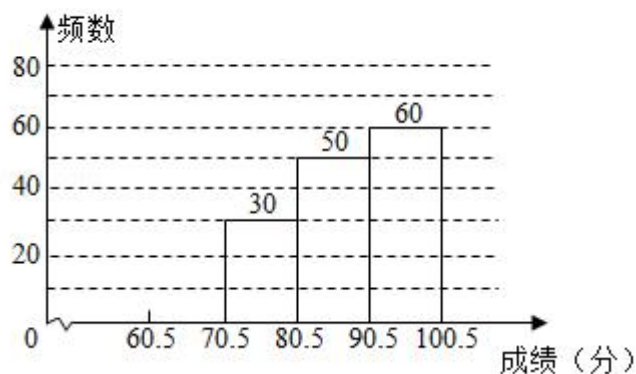
(1) 频数表中, $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 请将频数分布直方图补充完整;

(3) 抽取的 200 名学生中竞赛成绩的中位数落在的组别是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 组;

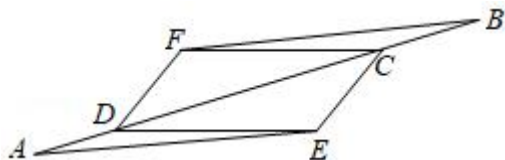
(4) 若该校共有 1000 名学生, 请估计本次党史知识竞赛成绩为“优秀”的学生人数.

200名学生党史知识竞赛成绩的频数直方图



22. (10分) 如图, 已知点 A, D, C, B 在同一条直线上, $AD = BC$, $AE = BF$, $AE \parallel BF$.

- (1) 求证: $\triangle AEC \cong \triangle BFD$.
- (2) 判断四边形 $DECF$ 的形状, 并证明.



23. (10分) 永州市某村经济合作社在乡村振兴工作队的指导下, 根据市场需求, 计划在 2022 年将 30 亩土地全部用于种植 A, B 两种经济作物. 预计 B 种经济作物亩产值比 A 种经济作物亩产值多 2 万元, 为实现 2022 年 A 种经济作物年总产值 20 万元, B 种经济作物年总产值 30 万元的目标, 问: 2022 年 A, B 两种经济作物应各种植多少亩?

24. (10分) 已知锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 边角总满足关系式:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

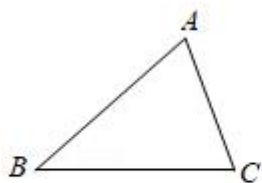


图1

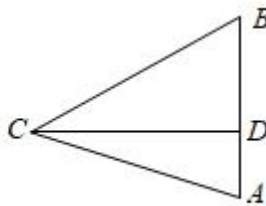


图2

- (1) 如图 1, 若 $a = 6$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, 求 b 的值;
- (2) 某公园准备在园内一个锐角三角形水池 ABC 中建一座小型景观桥 CD (如图 2 所示), 若 $CD \perp AB$, $AC = 14$ 米, $AB = 10$ 米, $\sin \angle ACB = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 求景观桥 CD 的长度.

25. (12分) 如图 1, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 是 $\odot O$ 上一动点, 且不与 A, B 两点重合, $\angle EAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 C , 过点 C 作 $CD \perp AE$, 交 AE 的延长线于点 D .

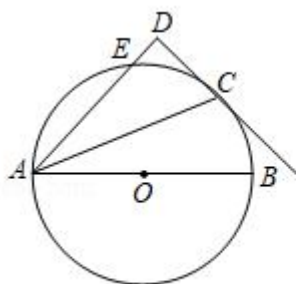


图 1

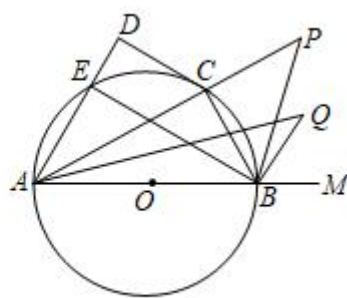


图 2

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求证: $AC^2 = 2AD \cdot AO$;

(3) 如图 2, 原有条件不变, 连接 BE , BC , 延长 AB 至点 M , $\angle EBM$ 的平分线交 AC 的延长线于点 P , $\angle CAB$ 的平分线交 $\angle CBM$ 的平分线于点 Q . 求证: 无论点 E 如何运动, 总有 $\angle P = \angle Q$.

26. (12 分) 已知关于 x 的二次函数 $y_1 = x^2 + bx + c$ (实数 b, c 为常数).

(1) 若二次函数的图象经过点 $(0, 4)$, 对称轴为 $x = 1$, 求此二次函数的表达式;

(2) 若 $b^2 - c = 0$, 当 $b - 3 \leq x \leq b$ 时, 二次函数的最小值为 21, 求 b 的值;

(3) 记关于 x 的二次函数 $y_2 = 2x^2 + x + m$, 若在 (1) 的条件下, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 总有 $y_2 \geq y_1$, 求实数 m 的最小值.

2021 年湖南省永州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分，每个小题只有一个正确选项请将正确的选项填涂到答题卡上）

1. $-|-2021|$ 的相反数为（ ）

- A. -2021 B. 2021 C. $-\frac{1}{2021}$ D. $\frac{1}{2021}$

【分析】根据绝对值的定义、相反数的定义解题即可.

【解答】解： $\because -|-2021| = -2021$,

$\therefore -2021$ 的相反数为 2021 .

故选：B.

2. 如图，在平面内将五角星绕其中心旋转 180° 后所得到的图案是（ ）



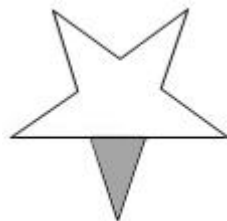
A.



B.



C.



D.



【分析】根据旋转的性质，旋转前后，各点的相对位置不变，得到的图形全等，找到关键点，分析选项可得答案.

【解答】解：根据旋转的性质，旋转前后，各点的相对位置不变，得到的图形全等，五角星图案绕中心旋转 180° 后，阴影部分的等腰三角形的顶点向下，得到的图案是 C.

故选：C.

3. 据永州市 2020 年国民经济和社会发展统计公报, 永州市全年全体居民人均可支配收入约为 24000 元, 比上年增长 6.5%, 将“人均可支配收入”用科学记数法表示为 ()

A. 24×10^3 B. 2.4×10^4 C. 2.4×10^5 D. 0.24×10^5

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: $24000 = 2.4 \times 10^4$.

故选: B.

4. 已知一列数据: 27, 12, 12, 5, 7, 12, 5. 该列数据的众数是 ()

A. 27 B. 12 C. 7 D. 5

【分析】根据众数的意义求解即可.

【解答】解: 这组数据中出现次数最多的是 12, 共出现 3 次, 因此众数是 12,

故选: B.

5. 下列计算正确的是 ()

A. $(\pi - 3)^0 = 1$ B. $\tan 30^\circ = \frac{1}{2}$ C. $\sqrt{4} = \pm 2$ D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

【分析】根据零次幂, 特殊锐角三角函数值, 平方根以及同底数幂乘法逐项进行计算即可.

【解答】解: A. 因为 $\pi - 3 \neq 0$, 所以 $(\pi - 3)^0 = 1$, 因此选项 A 符合题意;

B. $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此选项 B 不符合题意;

C. $\sqrt{4} = 2$, 因此选项 C 不符合题意;

D. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 因此选项 D 不符合题意;

故选: A.

6. 在一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases}$ 的解集中, 整数解的个数是 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【分析】先求出每个不等式的解集, 再求出不等式组的解集, 求出不等式组的整数解, 即可得出答案.

【解答】解: $\begin{cases} 2x+1 > 0 \text{ ①} \\ x-5 \leq 0 \text{ ②} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得: $x > -0.5$,

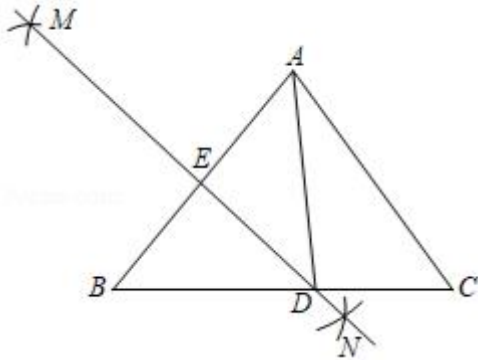
解不等式②得： $x \leq 5$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-0.5 < x \leq 5$ ，

$\therefore$ 不等式组的整数解为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 共 6 个，

故选：C.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，分别以点 A , B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 M 和点 N ，作直线 MN 分别交 BC 、 AB 于点 D 和点 E ，若 $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle CAD$ 的度数是 ()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【分析】 利用基本作图可判断 MN 垂直平分 AB ，则 $DA = DB$ ，所以 $\angle DAB = \angle B = 50^\circ$ ，再利用等腰三角形的性质和三角形内角和计算出 $\angle BAC$ ，然后计算 $\angle BAC - \angle DAB$ 即可.

【解答】 解：由作法得 MN 垂直平分 AB ，

$$\therefore DA = DB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B = 50^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle B = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAC - \angle DAB = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.$$

故选：A.

8. 中国传统数学重要著作《九章算术》中记载：今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数、物价各几何？据此设计一类似问题：今有人组团购一物，如果每人出 9 元，则多了 4 元；如果每人出 6 元，则少了 5 元，问组团人数和物价各是多少？若设 x 人参与组团，物价为 y 元，则以下列出的方程组正确的是 ()

A.
$$\begin{cases} 9x - y = 4 \\ y - 6x = 5 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 9x - y = 4 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} y-9x=4 \\ y-6x=5 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} y-9x=4 \\ 6x-y=5 \end{cases}$$

【分析】根据如果每人出 9 元，则多了 4 元；如果每人出 6 元，则少了 5 元，可以列出相应的方程组，从而可以解答本题.

【解答】解：由题意可得，

$$\begin{cases} 9x-y=4 \\ y-6x=5 \end{cases},$$

故选：A.

9. 小明计划到永州市体验民俗文化，想从“零陵渔鼓、瑶族长鼓舞、东安武术、舜帝祭典”四种民俗文化中任意选择两项，则小明选择体验“瑶族长鼓舞、舜帝祭典”的概率为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

【分析】画树状图，共有 12 种等可能的结果，小明选择体验“瑶族长鼓舞、舜帝祭典”的结果有 2 种，再由概率公式求解即可.

【解答】解：把“零陵渔鼓、瑶族长鼓舞、东安武术、舜帝祭典”四种民俗文化分别记为：A、B、C、D，

画树状图如图：



共有 12 种等可能的结果，小明选择体验“瑶族长鼓舞、舜帝祭典”的结果有 2 种，

∴ 小明选择体验“瑶族长鼓舞、舜帝祭典”的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

故选：D.

10. 定义：若 $10^x = N$ ，则 $x = \log_{10} N$ ， x 称为以 10 为底的 N 的对数，简记为 $\lg N$ ，其满足运算法则： $\lg M + \lg N = \lg (M \cdot N)$ ($M > 0$, $N > 0$). 例如：因为 $10^2 = 100$ ，所以 $2 = \lg 100$ ，亦即 $\lg 100 = 2$ ； $\lg 4 + \lg 3 = \lg 12$. 根据上述定义和运算法则，计算 $(\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5$ 的结果为 ()

A. 5

B. 2

C. 1

D. 0

【分析】根据题意，按照题目的运算法则计算即可.

【解答】解： $(\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5$

$$= \lg 2 (\lg 2 + \lg 5) + \lg 5$$

$$= \lg 2 + \lg 5$$

$$= \lg 10$$

$$= 1.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分，请将答案填在答题卡的答案栏内）

11. 在 0 , $\frac{22}{7}$, -0.101001 , π , $\sqrt[3]{8}$ 中无理数的个数是 1 个.

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数.

【解答】解： 0 , $\sqrt[3]{8}=2$ ，是整数，属于有理数；

$\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数；

-0.101001 是有限小数，属于有理数；

无理数有 π ，共 1 个.

故答案为：1.

12. 已知二次根式 $\sqrt{x+3}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $x \geq -3$.

【分析】二次根式有意义，被开方数为非负数，列不等式求解.

【解答】解：根据二次根式的意义，得 $x+3 \geq 0$,

解得 $x \geq -3$.

故答案为： $x \geq -3$.

13. 请写出一个图象在第二、四象限的反比例函数的表达式： $y = -\frac{3}{x}$.

【分析】根据反比例函数的性质可得 $k < 0$ ，写一个 $k < 0$ 的反比例函数即可.

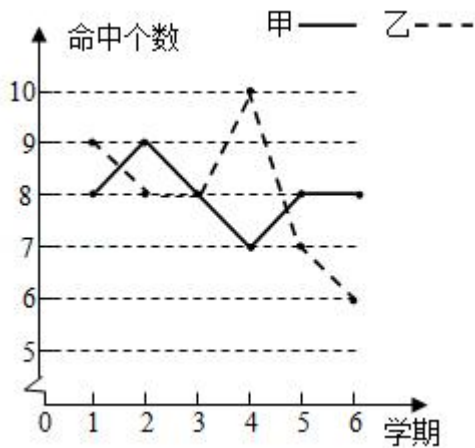
【解答】解： $\because$ 图象在第二、四象限，

$$\therefore y = -\frac{3}{x},$$

故答案为： $y = -\frac{3}{x}$.

14. 某初级中学坚持开展阳光体育活动，七年级至九年级每学期均进行体育技能测试. 其中 A 班甲、乙两位同学 6 个学期的投篮技能测试成绩（投篮命中个数）折线图如图所示. 为参加学校举行的毕业篮球友谊赛，A 班需从甲、乙两位同学中选 1 人进入班球队，从两

人成绩的稳定性考虑，请你决策 A 班应该选择的同学是 甲。



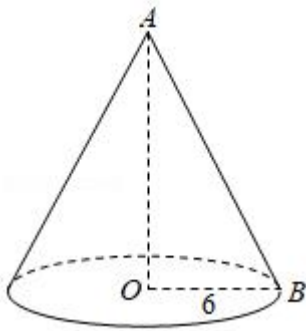
【分析】 根据折线统计图中甲、乙成绩的起伏情况判断即可得解。

【解答】 解：根据折线统计图可得，

甲的投篮技能测试成绩起伏小，比较平稳，乙的投篮技能测试成绩起伏大，不稳定，因此 A 班应该选择的同学是甲。

故答案为：甲。

15. 某同学在数学实践活动中，制作了一个侧面积为 60π ，底面半径为 6 的圆锥模型（如图所示），则此圆锥的母线长为 10。



【分析】 设此圆锥的母线长为 l ，利用扇形的面积公式得到 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 \times l = 60\pi$ ，然后解方程即可。

【解答】 解：设此圆锥的母线长为 l ，

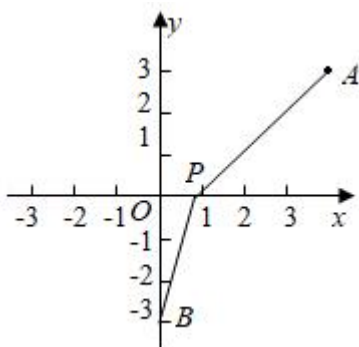
根据题意得 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 \times l = 60\pi$ ，解得 $l = 10$ ，

所以此圆锥的母线长为 10。

故答案为 10。

16. 如图， A ， B 两点的坐标分别为 $A(4, 3)$ ， $B(0, -3)$ ，在 x 轴上找一点 P ，使线段

$PA+PB$ 的值最小，则点 P 的坐标是 $(2, 0)$ 。



【分析】 连接 AB 交 x 轴于点 P' ，求出直线 AB 的解析式与 x 轴交点坐标即可。

【解答】 解：如图，连接 AB 交 x 轴于点 P' ，

根据两点之间，线段最短可知： P' 即为所求，

设直线 AB 的关系式为： $y = kx + b$ ，

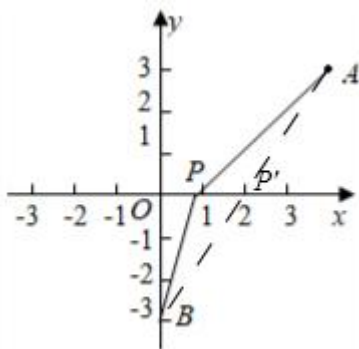
$$\begin{cases} 4k + b = 3 \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 3,$$

当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，

$$\therefore P'(2, 0),$$



故答案为： $(2, 0)$ 。

17. 已知函数 $y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-2, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $y = 2$ ，则 $x =$ 2。

【分析】 根据题意，进行分类解答，即可求值。

【解答】 解： $\because y = 2$ 。

$$\therefore \text{当 } x^2 = 2 \text{ 时, } x = \pm\sqrt{2}.$$

$$\because 0 \leq x < 1.$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{当 } 2x - 2 = 2 \text{ 时, } x = 2.$$

故答案为: 2.

18. 若 x, y 均为实数, $43^x = 2021$, $47^y = 2021$, 则:

$$(1) 43^{xy} \cdot 47^{xy} = (\underline{2021})^{x+y};$$

$$(2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \underline{1}.$$

【分析】(1) 将 $43^{xy} \cdot 47^{xy}$ 化成 $(43^x)^y \cdot (47^y)^x$ 代入数值即可计算;

(2) 由 (1) 知 $43^{xy} \cdot 47^{xy} = 2021^{(x+y)}$, $43^{xy} \cdot 47^{xy} = (43 \times 47)^{xy} = 2021^{xy}$, 得出 $xy = x+y$ 即可求.

【解答】解: (1) $43^{xy} \cdot 47^{xy} = (43^x)^y \cdot (47^y)^x = 2021^y \times 2021^x = 2021^{x+y}$,

故答案为: 2021;

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } 43^{xy} \cdot 47^{xy} = 2021^{(x+y)},$$

$$\because 43^{xy} \cdot 47^{xy} = (43 \times 47)^{xy} = 2021^{xy},$$

$$\therefore xy = x+y,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = 1,$$

故答案为: 1.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 78 分)

19. (8 分) 先化简, 再求值: $(x+1)^2 + (2+x)(2-x)$, 其中 $x = 1$.

【分析】先根据完全平方公式和平方差公式进行计算, 再合并同类项, 最后代入求出答案即可.

$$\text{【解答】解: } (x+1)^2 + (2+x)(2-x)$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 4 - x^2$$

$$= 2x + 5,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 原式} = 2 + 5 = 7.$$

20. (8 分) 若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, x_1

$$\cdot x_2 = \frac{c}{a}. \text{ 现已知一元二次方程 } px^2 + 2x + q = 0 \text{ 的两根分别为 } m, n.$$

(1) 若 $m = 2, n = -4$, 求 p, q 的值;

(2) 若 $p=3$, $q=-1$, 求 $m+mn+n$ 的值.

【分析】(1) 利用根与系数的关系得到 $2-4=-\frac{2}{p}$, $2\times(-4)=\frac{q}{p}$, 然后分别解方程求出 p 与 q 的值;

(2) 利用根与系数的关系得到 $m+n=-\frac{2}{3}$, $mn=-\frac{1}{3}$, 然后利用整体代入的方法计算.

【解答】解:(1) 根据题意得 $2-4=-\frac{2}{p}$, $2\times(-4)=\frac{q}{p}$,

所以 $p=1$, $q=-8$;

(2) 根据 $m+n=-\frac{2}{p}=-\frac{2}{3}$, $mn=-\frac{1}{3}$,

所以 $m+mn+n=m+n+mn=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$.

21. (8分) 为庆祝中国共产党成立 100 周年, 某校组织全校学生进行了一场党史知识竞赛活动根据竞赛结果, 抽取了 200 名学生的成绩 (得分均为正整数, 满分为 100 分, 大于 80 分的为优秀) 进行统计, 绘制了如图所示尚不完整的统计图表.

200 名学生党史知识竞赛成绩的频数表

组别	频数	频率
A 组 (60.5 ~ 70.5)	a	0.3
B 组 (70.5 ~ 80.5)	30	0.15
C 组 (80.5 ~ 90.5)	50	b
D 组 (90.5 ~ 100.5)	60	0.3

请结合图表解决下列问题:

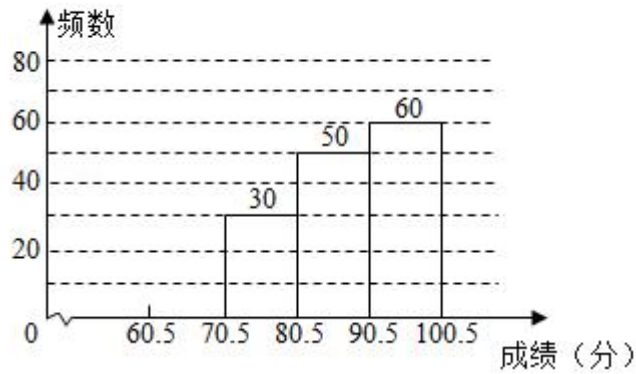
(1) 频数表中, $a=$ 60 , $b=$ 0.25 ;

(2) 请将频数分布直方图补充完整;

(3) 抽取的 200 名学生中竞赛成绩的中位数落在的组别是 C 组;

(4) 若该校共有 1000 名学生, 请估计本次党史知识竞赛成绩为“优秀”的学生人数.

200名学生党史知识竞赛成绩的频数直方图



- 【分析】(1) 根据频数分布表中的数据，可以计算出 a 、 b 、 c 的值；
- (2) 根据 (1) 中 a 、 b 的值，可以将频数分布直方图补充完整；
- (3) 根据频数分布表中的数据，可以计算出本次党史知识竞赛成绩超过 80 分的学生人数.

【解答】解：(1) $\because 30 \div 0.15 = 200$,

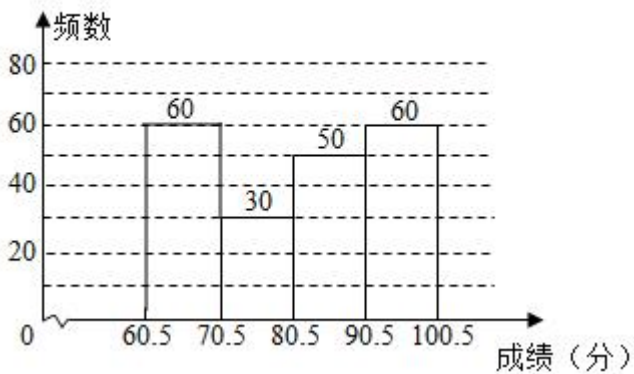
$$\therefore a = 200 \times 0.3 = 60,$$

$$b = 50 \div 200 = 0.25,$$

故答案为：60，0.25；

(2) 由 (1) 知， $a = 60$,

200名学生党史知识竞赛成绩的频数直方图



如图，即为补全的频数分布直方图；

(3) 抽取的 200 名学生中竞赛成绩的中位数落在的组别是 C 组；

故答案为：C；

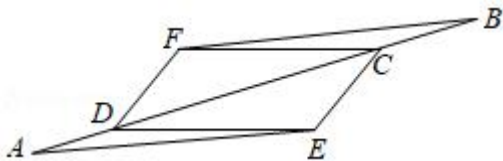
$$(4) 1000 \times (0.25 + 0.3) = 1000 \times 0.55 = 550 \text{ (人)},$$

即本次党史知识竞赛成绩为“优秀”的学生人数有 550 人.

22. (10 分) 如图，已知点 A ， D ， C ， B 在同一条直线上， $AD = BC$ ， $AE = BF$ ， $AE \parallel BF$.

(1) 求证: $\triangle AEC \cong \triangle BFD$.

(2) 判断四边形 $DECF$ 的形状, 并证明.



【分析】(1) 根据已知条件得到 $AC = BD$, 根据平行线的判定定理得到 $\angle A = \angle B$, 由全等三角形的判定定理即可得到结论;

(2) 根据全等三角形的性质得到 $\angle ACE = \angle BDF$, $CE = DF$, 由平行线的判定定理得到 $CE \parallel DF$, 根据平行四边形的判定定理即可得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because AD = BC$,

$$\therefore AD + DC = BC + DC,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\because AE \parallel BF,$$

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BFD$ 中,

$$\begin{cases} AC = BD \\ \angle A = \angle B, \\ AE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BFD \text{ (SAS)}.$$

(2) 四边形 $DECF$ 是平行四边形,

证明: $\because \triangle AEC \cong \triangle BFD$,

$$\therefore \angle ACE = \angle BDF, CE = DF,$$

$$\therefore CE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形.

23. (10分)永州市某村经济合作社在乡村振兴工作队的指导下,根据市场需求,计划在2022年将30亩土地全部用于种植A、B两种经济作物.预计B种经济作物亩产值比A种经济作物亩产值多2万元,为实现2022年A种经济作物年总产值20万元,B种经济作物年总产值30万元的目标,问:2022年A、B两种经济作物应各种植多少亩?

【分析】设2022年A种经济作物应种植 x 亩,则B种经济作物应种植 $(30 - x)$ 亩,根据“预计B种经济作物亩产值比A种经济作物亩产值多2万元”列出方程并解答.

【解答】解:设2022年A种经济作物应种植 x 亩,则B种经济作物应种植 $(30 - x)$ 亩,

根据题意，得 $\frac{20}{x} + 2 = \frac{30}{30-x}$.

解得 $x = 20$ 或 $x = -15$ (舍去).

经检验 $x = 20$ 是原方程的解，且符合题意.

所以 $30 - x = 10$.

答：2022 年 A 种经济作物应种植 20 亩，则 B 种经济作物应种植 10 亩.

24. (10 分) 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，边角总满足关系式：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

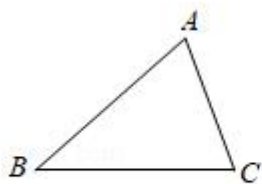


图1

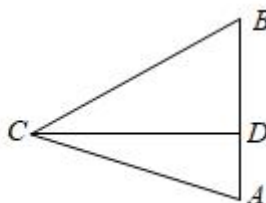


图2

(1) 如图 1，若 $a = 6$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ ，求 b 的值；

(2) 某公园准备在园内一个锐角三角形水池 ABC 中建一座小型景观桥 CD (如图 2 所示)，

若 $CD \perp AB$ ， $AC = 14$ 米， $AB = 10$ 米， $\sin \angle ACB = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，求景观桥 CD 的长度.

【分析】 (1) 由边角关系式可求解；

(2) 由边角关系式可求 $\angle B = 60^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，利用勾股定理可求 CD 的长.

【解答】 解： $\because \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{6};$$

$$(2) \because \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{10}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{14}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan B &= \frac{CD}{BD} = \sqrt{3}, \\ \therefore BD &= \frac{\sqrt{3}}{3}CD, \\ \therefore AC^2 &= CD^2 + AD^2, \\ \therefore 196 &= CD^2 + \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{3}CD\right)^2, \\ \therefore CD &= 8\sqrt{3}, \quad CD = -3\sqrt{3} \text{ (舍去)}, \\ \therefore CD \text{ 的长度为 } 8\sqrt{3} \text{ 米}.\end{aligned}$$

25. (12分) 如图1, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 是 $\odot O$ 上一动点, 且不与 A, B 两点重合, $\angle EAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 C , 过点 C 作 $CD \perp AE$, 交 AE 的延长线于点 D .

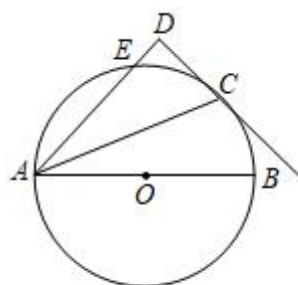


图 1

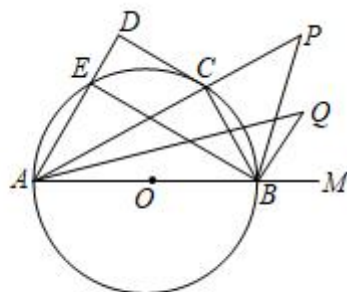


图 2

- (1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 求证: $AC^2 = 2AD \cdot AO$;
- (3) 如图 2, 原有条件不变, 连接 BE, BC , 延长 AB 至点 M , $\angle EBM$ 的平分线交 AC 的延长线于点 P , $\angle CAB$ 的平分线交 $\angle CBM$ 的平分线于点 Q . 求证: 无论点 E 如何运动, 总有 $\angle P = \angle Q$.

【分析】(1) 连接 OC , 由角平分线的定义、等腰三角形性质、三角形外角性质和切线的定义证明;

(2) 由 $\triangle CDA \sim \triangle BCA$, 得证 $AC^2 = 2AD \cdot AO$;

(3) 由外角性质、直径所对的圆周角是直角和角平分线定义证明.

【解答】证明: (1) 连接 OC ,

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle OAC,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\angle OAC,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BOC,$$

$$\therefore CO \parallel AD,$$

$$\because \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCO = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CD,$$

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

$$(2) \because AC \text{ 平分 } \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\because \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore AC^2 = AB \cdot AD,$$

$$\because AB = 2AO,$$

$$\therefore AC^2 = 2AD \cdot AO.$$

$$(3) \because \angle CAB、\angle CBM \text{ 的角平分线交于点 } Q,$$

$$\therefore \angle QAM = \frac{1}{2} \angle CAB, \quad \angle QBM = \frac{1}{2} \angle CBM,$$

$\because \angle Q$ 是 $\triangle QAB$ 的一个外角, $\angle CBM$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角,

$$\therefore \angle Q = \angle QBM - \angle QAM = \frac{1}{2} (\angle CBM - \angle CAM), \quad \angle ACB = \angle CBM - \angle CAM,$$

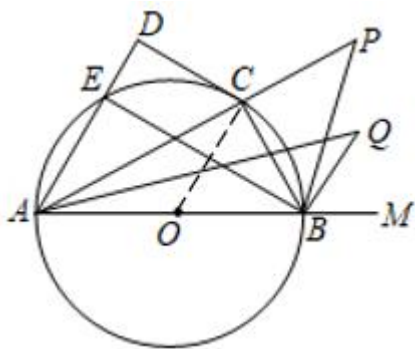
$$\therefore \angle Q = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle Q = 45^\circ,$$

同理可证: $\angle P = 45^\circ,$

$$\therefore \angle P = \angle Q.$$



26. (12分) 已知关于 x 的二次函数 $y_1 = x^2 + bx + c$ (实数 b, c 为常数).

(1) 若二次函数的图象经过点 $(0, 4)$, 对称轴为 $x = 1$, 求此二次函数的表达式;

(2) 若 $b^2 - c = 0$, 当 $b - 3 \leq x \leq b$ 时, 二次函数的最小值为 21, 求 b 的值;

(3) 记关于 x 的二次函数 $y_2 = 2x^2 + x + m$, 若在 (1) 的条件下, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 总有 $y_2 \geq y_1$, 求实数 m 的最小值.

【分析】 (1) 由待定系数法, 及对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 可求出二次函数的表达式;

(2) 需要分三种情况: ① $b < -\frac{b}{2}$; ② $b - 3 > -\frac{b}{2}$; ③ $b - 3 \leq -\frac{b}{2} \leq b$ 分别进行讨论;

(3) 根据二次函数图象的增减性可得结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 二次函数的图象经过点 $(0, 4)$,

$$\therefore c = 4;$$

$$\because \text{对称轴为直线: } x = -\frac{b}{2} = 1,$$

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore \text{此二次函数的表达式为: } y_1 = x^2 - 2x + 4.$$

(2) 当 $b^2 - c = 0$ 时, $b^2 = c$, 此时函数的表达式为: $y_1 = x^2 + bx + b^2$,

根据题意可知, 需要分三种情况:

① 当 $b < -\frac{b}{2}$, 即 $b < 0$ 时, 二次函数的最小值在 $x = b$ 处取到;

$$\therefore b^2 + b^2 + b^2 = 21, \text{ 解得 } b = \sqrt{7}, b = -\sqrt{7} \text{ 舍去};$$

② $b - 3 > -\frac{b}{2}$, 即 $b > 2$ 时, 二次函数的最小值在 $x = b - 3$ 处取到;

$$\therefore (b - 3)^2 + b(b - 3) + b^2 = 21, \text{ 解得 } b = 4, b = -1 \text{ (舍去)};$$

③ $b - 3 \leq -\frac{b}{2} \leq b$, 即 $0 \leq b \leq 2$ 时, 二次函数的最小值在 $x = -\frac{b}{2}$ 处取到;

$$\therefore \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + b^2 = 21, \text{ 解得 } b = \pm 2\sqrt{7} \text{ (舍去)}.$$

综上, b 的取值为 $\sqrt{7}$ 或 4.

(3) 由 (1) 知, 二次函数的表达式为: $y_1 = x^2 - 2x + 4$,

对称轴为直线: $x = 1$,

$\because 1 > 0$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 且最大值为 4;

$\because$ 二次函数 $y_2 = 2x^2 + x + m$ 的对称轴为直线: $x = -\frac{1}{4}$, 且 $2 > 0$,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 且最小值为 m ,

$\because$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 总有 $y_2 \geq y_1$,

$\therefore m \geq 4$, 即 m 的最小值为 4.