

2021 年湖南省株洲市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题有且只有一个正确答案，每小题 4 分，共 40 分）

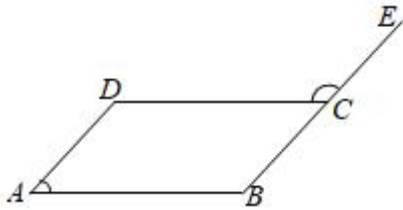
1. 若 a 的倒数为 2，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

2. 方程 $\frac{x}{2} - 1 = 2$ 的解是 ()

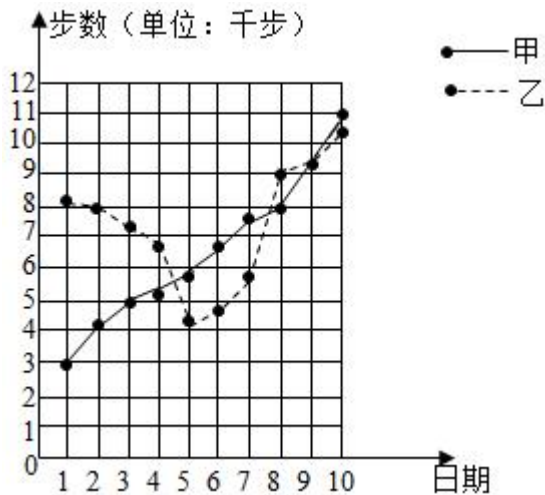
- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 5$ D. $x = 6$

3. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在线段 BC 的延长线上，若 $\angle DCE = 132^\circ$ ，则 $\angle A =$ ()



- A. 38° B. 48° C. 58° D. 66°

4. 某月 1 日 - 10 日，甲、乙两人的手机“微信运动”的步数统计图如图所示，则下列错误的结论是 ()



- A. 1 日 - 10 日，甲的步数逐天增加
B. 1 日 - 6 日，乙的步数逐天减少
C. 第 9 日，甲、乙两人的步数正好相等
D. 第 11 日，甲的步数不一定比乙的步数多

5. 计算: $-4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} =$ ()

- A. $-2\sqrt{2}$ B. -2 C. $-\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

6. 《九章算术》之“粟米篇”中记载了中国古代的“粟米之法”：“粟率五十，粳米三十…”

(粟指带壳的谷子，粳米指糙米)，其意为：“50 单位的粟，可换得 30 单位的粳米…”.

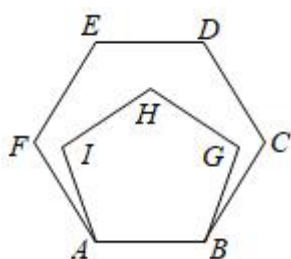
问题：有 3 斗的粟 (1 斗 = 10 升)，若按照此“粟米之法”，则可以换得的粳米为 ()

- A. 1.8 升 B. 16 升 C. 18 升 D. 50 升

7. 不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ -x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集为 ()

- A. $x < 1$ B. $x \leq 2$ C. $1 < x \leq 2$ D. 无解

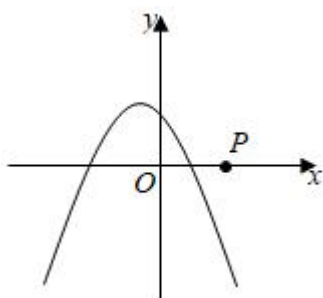
8. 如图所示，在正六边形 $ABCDEF$ 内，以 AB 为边作正五边形 $ABGHI$ ，则 $\angle FAI =$ ()



- A. 10° B. 12° C. 14° D. 15°

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，点 P 在 x 轴的正半轴上，且 $OP = 1$ ，

设 $M = ac(a+b+c)$ ，则 M 的取值范围为 ()



- A. $M < -1$ B. $-1 < M < 0$ C. $M < 0$ D. $M > 0$

10. 某限高曲臂道路闸口如图所示， AB 垂直地面 l_1 于点 A ， BE 与水平线 l_2 的夹角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)， $EF \parallel l_1 \parallel l_2$ ，若 $AB = 1.4$ 米， $BE = 2$ 米，车辆的高度为 h (单位：米)，

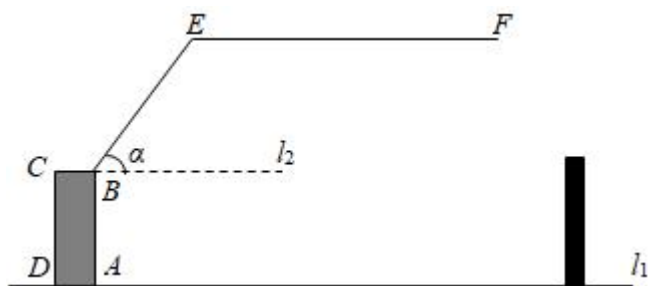
不考虑闸口与车辆的宽度：

①当 $\alpha = 90^\circ$ 时， h 小于 3.3 米的车辆均可以通过该闸口；

②当 $\alpha = 45^\circ$ 时， h 等于 2.9 米的车辆不可以通过该闸口；

③当 $\alpha = 60^\circ$ 时， h 等于 3.1 米的车辆不可以通过该闸口.

则上述说法正确的个数为 ()



- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

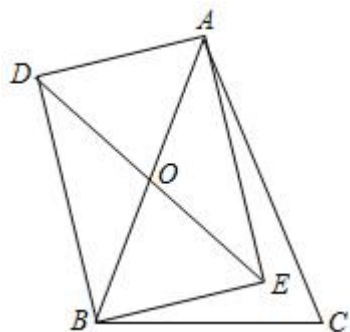
11. 计算： $(2a)^2 \cdot a^3 =$ _____.

12. 因式分解： $6x^2 - 4xy =$ _____.

13. 据报道，2021 年全国高考报名人数为 1078 万，将 1078 万用科学记数法表示为 1.078×10^n ，则 $n =$ _____.

14. 抛掷一枚质地均匀的硬币两次，则两次都是“正面朝上”的概率是 _____.

15. 如图所示，线段 BC 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边，矩形 $ADBE$ 的对角线 AB 与 DE 交于点 O ，若 $OD = 2$ ，则 $AC =$ _____.



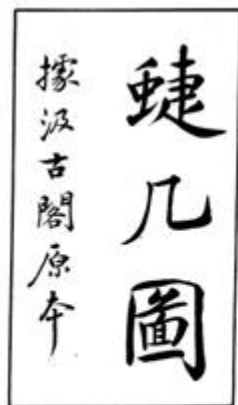
16. 中药是以我国传统医药理论为指导，经过采集、炮制、制剂而得到的药物．在一个时间段，某中药房的黄芪、焦山楂、当归三种中药的销售单价和销售额情况如表：

中药	黄芪	焦山楂	当归
销售单价（单位：元/千克）	80	60	90
销售额（单位：元）	120	120	360

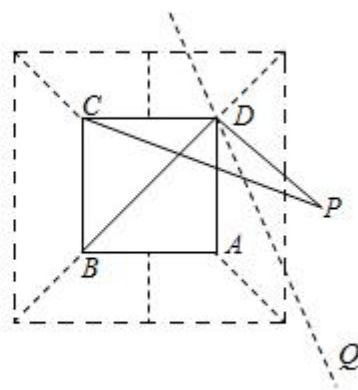
则在这个时间段，该中药房的这三种中药的平均销售量为 _____ 千克．

17. 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1+1, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点，满足：当 $x_1 > 0$ 时，均有 $y_1 < y_2$ ，则 k 的取值范围是 _____.

18. 《蝶几图》是明朝人戈汕所作的一部组合家具的设计图（“**捷**”为“蜚”，同“蝶”），它的基本组件为斜角形，包括长斜两只、右半斜两只、左半斜两只、围一只、小三斜四只、大三斜两只，共十三只（图①中的“樣”和“隻”为“样”和“只”）。图②为某蝶几设计图，其中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为“大三斜”组件（“一樣二隻”的大三斜组件为两个全等的等腰直角三角形），已知某人位于点 P 处，点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称，连接 CP 、 DP 。若 $\angle ADQ = 24^\circ$ ，则 $\angle DCP =$ _____度。



图①



图②

三、解答题（本大题共 8 小题，共 78 分）

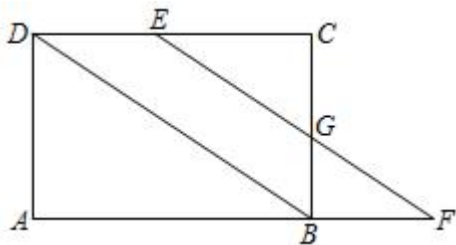
19. (6 分) 计算： $|-2| + \sqrt{3}\sin 60^\circ - 2^{-1}$.

20. (8 分) 先化简，再求值： $\frac{2x}{x^2-4} \cdot (1 - \frac{2}{x}) - \frac{3}{x+2}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 2$.

21. (8 分) 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在线段 CD 上，点 F 在线段 AB 的延长线上，连接 EF 交线段 BC 于点 G ，连接 BD ，若 $DE = BF = 2$.

(1) 求证：四边形 $BFED$ 是平行四边形；

(2) 若 $\tan \angle ABD = \frac{2}{3}$ ，求线段 BG 的长度.

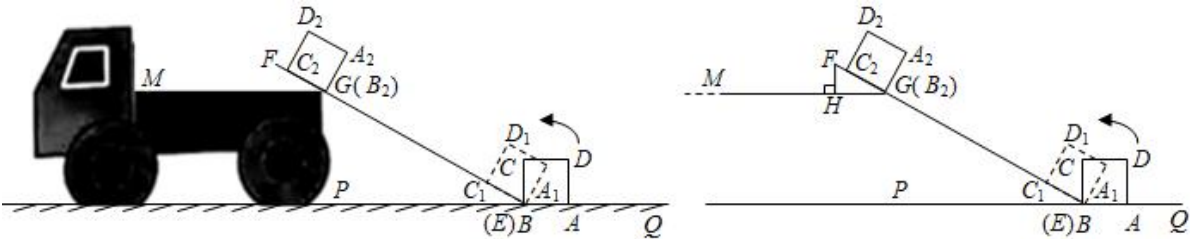


22. (10 分) 将一物体（视为边长为 $\frac{2}{\pi}$ 米的正方形 $ABCD$ ）从地面 PQ 上挪到货车车厢内. 如图

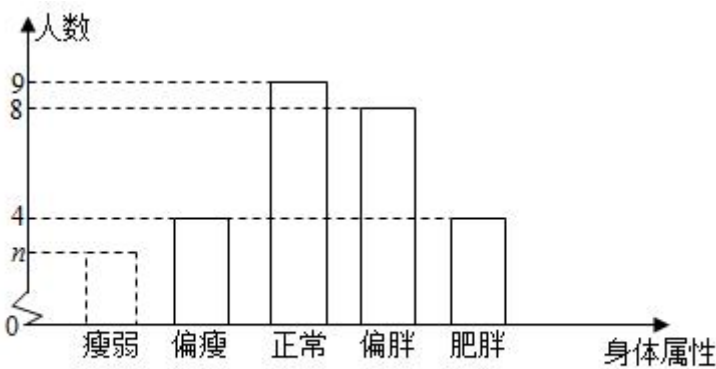
所示，刚开始点 B 与斜面 EF 上的点 E 重合，先将该物体绕点 B (E) 按逆时针方向旋转至正方形 $A_1BC_1D_1$ 的位置，再将其沿 EF 方向平移至正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置（此时点

B_2 与点 G 重合), 最后将物体移到车厢平台面 MG 上. 已知 $MG \parallel PQ$, $\angle FBP = 30^\circ$, 过点 F 作 $FH \perp MG$ 于点 H , $FH = \frac{1}{3}$ 米, $EF = 4$ 米.

- (1) 求线段 FG 的长度;
- (2) 求在此过程中点 A 运动至点 A_2 所经过的路程.



23. (10 分) 目前, 国际上常用身体质量指数 “ BMI ” 作为衡量人体健康状况的一个指标, 其计算公式: $BMI = \frac{G}{h^2}$ (G 表示体重, 单位: 千克; h 表示身高, 单位: 米). 已知某区域成人的 BMI 数值标准为: $BMI < 16$ 为瘦弱 (不健康); $16 \leq BMI < 18.5$ 为偏瘦; $18.5 \leq BMI < 24$ 为正常; $24 \leq BMI < 28$ 为偏胖; $BMI \geq 28$ 为肥胖 (不健康).



(女性身体属性与人数统计图)

某研究人员从该区域的一体检中心随机抽取 55 名成人的体重、身高数据组成一个样本, 计算每名成人的 BMI 数值后统计:

(男性身体属性与人数统计表)

身体属性	人数
瘦弱	2
偏瘦	2
正常	1
偏胖	9

肥胖	m
----	-----

(1) 求这个样本中身体属性为“正常”的人数；

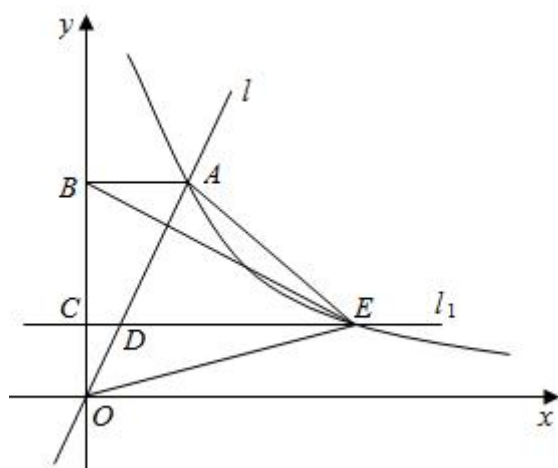
(2) 某女性的体重为 51.2 千克，身高为 1.6 米，求该女性的 BMI 数值；

(3) 当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ (m, n 为正整数) 时，求这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值.

24. (10 分) 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = 2x$ 的图象 l 与函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的图象 (记为 Γ) 交于点 A ，过点 A 作 $AB \perp y$ 轴于点 B ，且 $AB = 1$ ，点 C 在线段 OB 上 (不含端点)，且 $OC = t$ ，过点 C 作直线 $l_1 \parallel x$ 轴，交 l 于点 D ，交图象 Γ 于点 E .

(1) 求 k 的值，并且用含 t 的式子表示点 D 的横坐标；

(2) 连接 OE 、 BE 、 AE ，记 $\triangle OBE$ 、 $\triangle ADE$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 ，设 $U = S_1 - S_2$ ，求 U 的最大值.



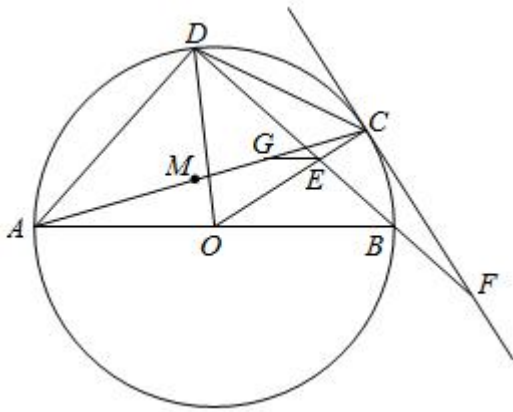
25. (13 分) 如图所示， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 、 D 是 $\odot O$ 上不同的两点，直线 BD 交线段 OC 于点 E 、交过点 C 的直线 CF 于点 F ，若 $OC = 3CE$ ，且 $9(EF^2 - CF^2) = OC^2$.

(1) 求证：直线 CF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 OD 、 AD 、 AC 、 DC ，若 $\angle COD = 2\angle BOC$.

① 求证： $\triangle ACD \sim \triangle OBE$ ；

② 过点 E 作 $EG \parallel AB$ ，交线段 AC 于点 G ，点 M 为线段 AC 的中点，若 $AD = 4$ ，求线段 MG 的长度.



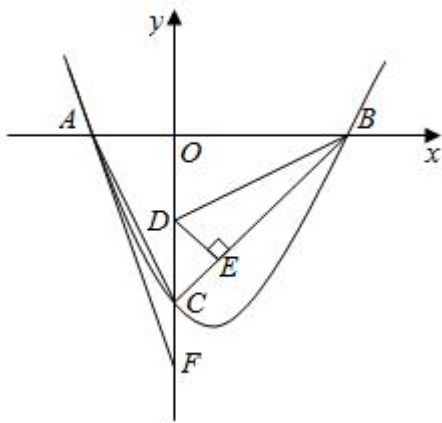
26. (13 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$).

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, $b = c = -2$, 求方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式的值;

(2) 如图所示, 该二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 与 y 轴的负半轴交于点 C , 点 D 在线段 OC 上, 连接 AC 、 BD , 满足 $\angle ACO = \angle ABD$, $-\frac{b}{a} + c = x_1$.

①求证: $\triangle AOC \cong \triangle DOB$;

②连接 BC , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 点 $F(0, x_1 - x_2)$ 在 y 轴的负半轴上, 连接 AF , 且 $\angle ACO = \angle CAF + \angle CBD$, 求 $\frac{c}{x_1}$ 的值.



2021 年湖南省株洲市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题有且只有一个正确答案，每小题 4 分，共 40 分）

1. 若 a 的倒数为 2，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

【分析】根据倒数的定义：乘积是 1 的两数互为倒数，即可得出答案.

【解答】解： $\because a$ 的倒数为 2，

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

2. 方程 $\frac{x}{2} - 1 = 2$ 的解是 ()

- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $x = 5$ D. $x = 6$

【分析】移项，合并同类项，系数化成 1 即可.

【解答】解： $\frac{x}{2} - 1 = 2$,

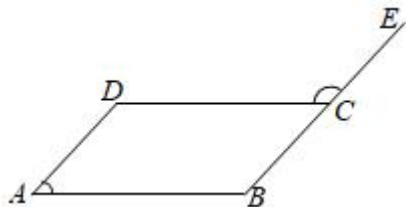
移项，得 $\frac{x}{2} = 2 + 1$,

合并同类项，得 $\frac{x}{2} = 3$,

系数化成 1，得 $x = 6$,

故选：D.

3. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在线段 BC 的延长线上，若 $\angle DCE = 132^\circ$ ，则 $\angle A =$ ()



- A. 38° B. 48° C. 58° D. 66°

【分析】根据平行四边形的外角的度数求得其相邻的内角的度数，然后求得其对角的度数即可.

【解答】解： $\because \angle DCE = 132^\circ$ ，

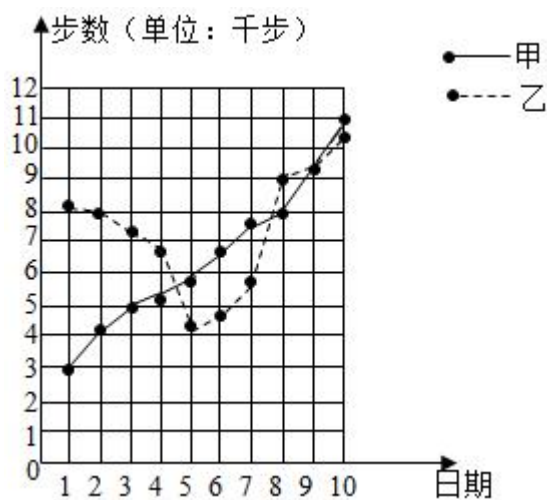
$$\therefore \angle DCB = 180^\circ - \angle DCE = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ，$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle A = \angle DCB = 48^\circ，$$

故选：B.

4. 某月 1 日 - 10 日，甲、乙两人的手机“微信运动”的步数统计图如图所示，则下列错误的结论是（ ）



- A. 1 日 - 10 日，甲的步数逐天增加
B. 1 日 - 6 日，乙的步数逐天减少
C. 第 9 日，甲、乙两人的步数正好相等
D. 第 11 日，甲的步数不一定比乙的步数多

【分析】根据图中给出的甲乙两人这 10 天的数据，依次判断 A, B, C, D 选项即可.

【解答】解：A. 1 日 - 10 日，甲的步数逐天增加；故 A 正确，不符合题意；B. 1 日 - 5

日，乙的步数逐天减少；6 日步数的比 5 日的步数多，故 B 错误，符合题意；

C. 第 9 日，甲、乙两人的步数正好相等；故 C 正确，不符合题意；

D. 第 11 日，甲的步数不一定比乙的步数多；故 D 正确，不符合题意；

故选：B.

5. 计算： $-4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} =$ ()

A. $-2\sqrt{2}$

B. -2

C. $-\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

【分析】直接利用二次根式的性质化简得出答案.

【解答】解： $-4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = -4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$

故选：A.

6. 《九章算术》之“粟米篇”中记载了中国古代的“粟米之法”：“粟率五十，粝米三十…”

(粟指带壳的谷子，粝米指糙米)，其意为：“50 单位的粟，可换得 30 单位的粝米…”.

问题：有 3 斗的粟 (1 斗 = 10 升)，若按照此“粟米之法”，则可以换得的粝米为 ()

- A. 1.8 升 B. 16 升 C. 18 升 D. 50 升

【分析】 先将单位换成升，根据：“50 单位的粟，可换得 30 单位的粝米…” 列式可得结论.

【解答】 解：根据题意得：3 斗 = 30 升，

设可以换得的粝米为 x 升，

$$\text{则 } \frac{50}{30} = \frac{30}{x},$$

$$\text{解得：} x = \frac{30 \times 3}{5} = 18 \text{ (升)},$$

答：有 3 斗的粟 (1 斗 = 10 升)，若按照此“粟米之法”，则可以换得的粝米为 18 升.

故选：C.

7. 不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ -x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集为 ()

- A. $x < 1$ B. $x \leq 2$ C. $1 < x \leq 2$ D. 无解

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

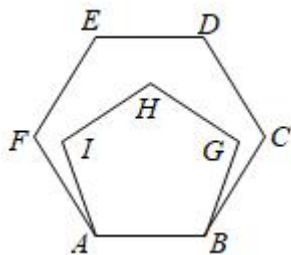
【解答】 解：解不等式 $x - 2 \leq 0$ ，得： $x \leq 2$ ，

解不等式 $-x + 1 > 0$ ，得： $x < 1$ ，

则不等式组的解集为 $x < 1$.

故选：A.

8. 如图所示，在正六边形 $ABCDEF$ 内，以 AB 为边作正五边形 $ABGHI$ ，则 $\angle FAI =$ ()



- A. 10° B. 12° C. 14° D. 15°

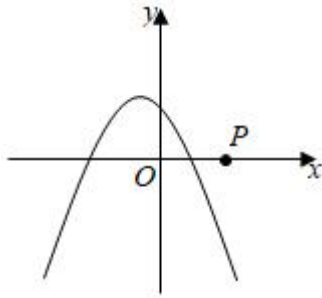
【分析】 分别求出正六边形，正五边形的内角可得结论.

【解答】解：在正六边形 $ABCDEF$ 内，正五边形 $ABGHI$ 中， $\angle FAB = 120^\circ$ ， $\angle IAB = 108^\circ$ ，

$$\therefore \angle FAI = \angle FAB - \angle IAB = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ,$$

故选：B.

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，点 P 在 x 轴的正半轴上，且 $OP = 1$ ，设 $M = ac(a+b+c)$ ，则 M 的取值范围为 ()



- A. $M < -1$ B. $-1 < M < 0$ C. $M < 0$ D. $M > 0$

【分析】由图象得 $x = 1$ 时， $y < 0$ 即 $a+b+c < 0$ ，当 $y = 0$ 时，得与 x 轴两个交点， $x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，即可判断 M 的范围.

【解答】解： $\because OP = 1$ ， P 不在抛物线上，

$\therefore$ 当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，

$x = 1$ 时， $y = a+b+c < 0$ ，

当抛物线 $y = 0$ 时，得 $ax^2 + bx + c = 0$ ，

由图象知 $x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，

$$\therefore ac < 0,$$

$$\therefore ac(a+b+c) > 0,$$

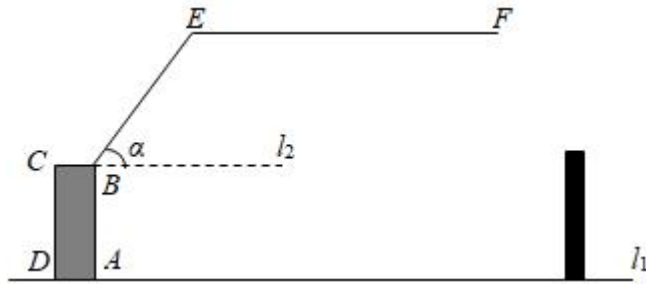
即 $M > 0$ ，

故选：D.

10. 某限高曲臂道路闸口如图所示， AB 垂直地面 l_1 于点 A ， BE 与水平线 l_2 的夹角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)， $EF \parallel l_1 \parallel l_2$ ，若 $AB = 1.4$ 米， $BE = 2$ 米，车辆的高度为 h (单位：米)，不考虑闸口与车辆的宽度：

- ① 当 $\alpha = 90^\circ$ 时， h 小于 3.3 米的车辆均可以通过该闸口；
- ② 当 $\alpha = 45^\circ$ 时， h 等于 2.9 米的车辆不可以通过该闸口；
- ③ 当 $\alpha = 60^\circ$ 时， h 等于 3.1 米的车辆不可以通过该闸口.

则上述说法正确的个数为 ()



- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【分析】根据题意列出 h 和角度之间的关系式即可判断.

【解答】解：由题知，

限高曲臂道路闸口高度为： $1.4+2 \times \sin \alpha$ ，

①当 $\alpha = 90^\circ$ 时， $h < (1.4+2)$ 米，即 $h < 3.4$ 米即可通过该闸口，

故①正确；

②当 $\alpha = 45^\circ$ 时， $h < (1.4+2 \times \frac{\sqrt{2}}{2})$ 米，即 $h < 2.814$ 米即可通过该闸口，

故②正确；

③当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $h < (1.4+2 \times \frac{\sqrt{3}}{2})$ 米，即 $h < 3.132$ 米即可通过该闸口，

故③不正确；

故选：C.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

11. 计算： $(2a)^2 \cdot a^3 = \underline{4a^5}$.

【分析】根据单项式与单项式相乘，把他们的系数分别相乘，相同字母的幂分别相加，其余字母连同他的指数不变，作为积的因式，计算即可.

【解答】解： $(2a)^2 \cdot a^3 = 4a^2 \cdot a^3 = (4 \times 1)(a^2 \cdot a^3) = 4a^5$.

故答案为 $4a^5$.

12. 因式分解： $6x^2 - 4xy = \underline{2x(3x - 2y)}$.

【分析】直接提取公因式 $2x$ ，即可分解因式得出答案.

【解答】解： $6x^2 - 4xy = 2x(3x - 2y)$.

故答案为： $2x(3x - 2y)$.

13. 据报道，2021 年全国高考报名人数为 1078 万，将 1078 万用科学记数法表示为 1.078×10^n ，则 $n = \underline{7}$.

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可．

【解答】解：1078 万 = 10780000 = 1.078×10^7 ，

则 $n = 7$ ．

故答案为：7．

14. 抛掷一枚质地均匀的硬币两次，则两次都是“正面朝上”的概率是 $-\frac{1}{4}-$ ．

【分析】画树状图展示所有 4 种等可能的结果数，再找出两次都是“正面朝上”的结果数，然后根据概率公式求解．

【解答】解：画树状图如下：

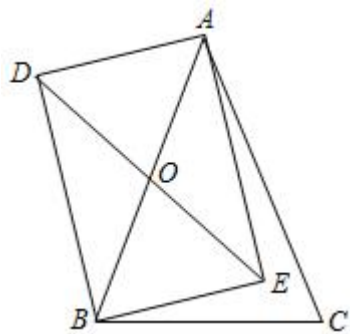


共有 4 种等可能的结果数，其中两次都是“正面朝上”的结果有 1 种，

$\therefore$ 两次都是“正面朝上”的概率 = $\frac{1}{4}$ ．

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

15. 如图所示，线段 BC 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边，矩形 $ADBE$ 的对角线 AB 与 DE 交于点 O ，若 $OD = 2$ ，则 $AC =$ 4 ．



【分析】由矩形的性质可得 $AB = 2OD = 4$ ，由等腰三角形的性质可求解．

【解答】解： $\because$ 四边形 $ADBE$ 是矩形，

$$\therefore AB = DE, AO = BO, DO = OE,$$

$$\therefore AB = DE = 2OD = 4,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AC = 4,$$

故答案为 4.

16. 中药是以我国传统医药理论为指导，经过采集、炮制、制剂而得到的药物．在一个时间段，某中药房的黄芪、焦山楂、当归三种中药的销售单价和销售额情况如表：

中药	黄芪	焦山楂	当归
销售单价（单位：元/千克）	80	60	90
销售额（单位：元）	120	120	360

则在这个时间段，该中药房的这三种中药的平均销售量为 2.5 千克．

【分析】利用销售数量 = 销售额 ÷ 销售单价，可分别求出黄芪、焦山楂、当归三种中药的销售数量，再求出三者的算术平均数即可得出结论．

【解答】解：黄芪的销售量为 $120 \div 80 = 1.5$ （千克），

焦山楂的销售量为 $120 \div 60 = 2$ （千克），

当归的销售量为 $360 \div 90 = 4$ （千克）．

该中药房的这三种中药的平均销售量为 $\frac{1.5+2+4}{3} = 2.5$ （千克）．

故答案为：2.5．

17. 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1+1, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点，满足：当 $x_1 > 0$ 时，

均有 $y_1 < y_2$ ，则 k 的取值范围是 $k < 0$ ．

【分析】根据反比例函数的性质，即可解决问题．

【解答】解：∵ 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1+1, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点，

又 $\because 0 < x_1 < x_1+1$ 时， $y_1 < y_2$ ，

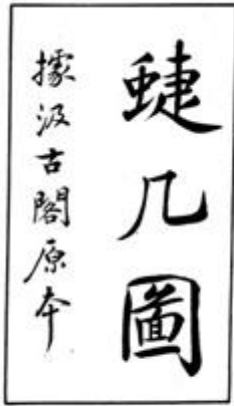
$\therefore$ 函数图象在二四象限，

$\therefore k < 0$ ，

故答案为 $k < 0$ ．

18. 《蝶几图》是明朝人戈汕所作的一部组合家具的设计图（“**捷**”为“蜚”，同“蝶”），它的基本组件为斜角形，包括长斜两只、右半斜两只、左半斜两只、闰一只、小三斜四只、大三斜两只，共十三只（图①中的“样”和“隻”为“样”和“只”）．图②为某蝶几设计图，其中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为“大三斜”组件（“一样二隻”的大三斜组件为两个

全等的等腰直角三角形), 已知某人位于点 P 处, 点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称, 连接 CP 、 DP . 若 $\angle ADQ = 24^\circ$, 则 $\angle DCP =$ 21 度.



图①



图②

【分析】由点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称求出 $\angle PDQ$, 再由 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 求出 $\angle DDB$ 和 $\angle ADB$, 进而计算出 $\angle CDP$, 最后利用三角形内角和即可求解.

【解答】解: $\because$ 点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称, $\angle ADQ = 24^\circ$,

$$\therefore \angle PDQ = \angle ADQ = 24^\circ, AD = DP,$$

$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为两个全等的等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DDB = \angle ADB = 45^\circ, CD = AD,$$

$$\therefore \angle CDP = \angle DDB + \angle ADB + \angle PDQ + \angle ADQ = 138^\circ,$$

$$\because AD = DP, CD = AD,$$

$\therefore CD = DP$, 即 $\triangle DCP$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle DCP = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CDP) = 21^\circ.$$

故答案为: 21.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 78 分)

19. (6 分) 计算: $|-2| + \sqrt{3} \sin 60^\circ - 2^{-1}$.

【分析】直接利用绝对值的性质以及特殊角的三角函数值、负整数指数幂的性质分别化简得出答案.

$$\text{【解答】解: 原式} = 2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 3.$$

20. (8分) 先化简, 再求值: $\frac{2x}{x^2-4} \cdot (1-\frac{2}{x}) - \frac{3}{x+2}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 2$.

【分析】直接将括号里面通分运算, 再利用分式的混合运算法则化简得出答案.

$$\begin{aligned}\text{【解答】解: 原式} &= \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x} - \frac{3}{x+2} \\ &= \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2},\end{aligned}$$

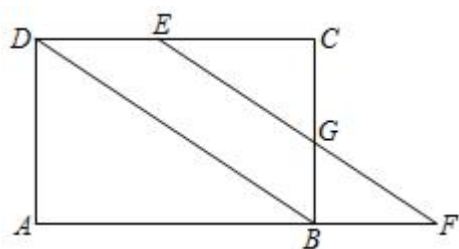
当 $x = \sqrt{2} - 2$ 时,

$$\text{原式} = -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}-2+2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21. (8分) 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在线段 CD 上, 点 F 在线段 AB 的延长线上, 连接 EF 交线段 BC 于点 G , 连接 BD , 若 $DE = BF = 2$.

(1) 求证: 四边形 $BFED$ 是平行四边形;

(2) 若 $\tan \angle ABD = \frac{2}{3}$, 求线段 BG 的长度.



【分析】(1) 由矩形的性质可得 $DC \parallel AB$, 可得结论;

(2) 由平行四边形的性质可得 $DB \parallel EF$, 可证 $\angle ABD = \angle F$, 由锐角三角函数可求解.

【解答】证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\text{又} \because DE = BF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFB$ 是平行四边形;

(2) $\because$ 四边形 $DEFB$ 是平行四边形,

$$\therefore DB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle F,$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \tan F = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BG}{BF} = \frac{2}{3},$$

$$\text{又} \because BF = 2,$$

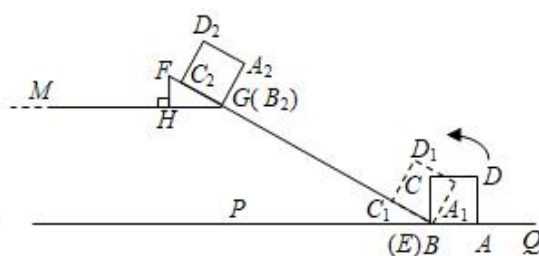
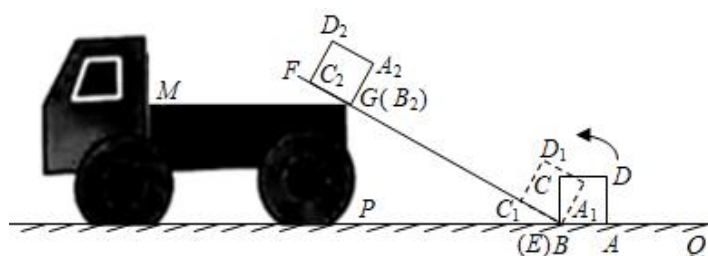
$$\therefore BG = \frac{4}{3}.$$

22. (10分) 将一物体(视为边长为 $\frac{2}{\pi}$ 米的正方形 $ABCD$)从地面 PQ 上挪到货车车厢内. 如图

所示, 刚开始点 B 与斜面 EF 上的点 E 重合, 先将该物体绕点 $B(E)$ 按逆时针方向旋转至正方形 $A_1BC_1D_1$ 的位置, 再将其沿 EF 方向平移至正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置(此时点 B_2 与点 G 重合), 最后将物体移到车厢平台面 MG 上. 已知 $MG \parallel PQ$, $\angle FBP = 30^\circ$, 过点 F 作 $FH \perp MG$ 于点 H , $FH = \frac{1}{3}$ 米, $EF = 4$ 米.

(1) 求线段 FG 的长度;

(2) 求在此过程中点 A 运动至点 A_2 所经过的路程.



【分析】(1) 在 $Rt\triangle FGH$ 中, 由 $FG = 2FH$, 可得结论.

(2) 求出 GE , 利用弧长公式求解即可.

【解答】解: (1) $\because GM \parallel PA$,

$$\therefore \angle FGH = \angle FBP = 30^\circ,$$

$$\because FH \perp GM,$$

$$\therefore \angle FHG = 90^\circ,$$

$$\therefore FG = 2FH = \frac{2}{3} \text{ (米)}.$$

$$(2) \because EF = 4 \text{ 米}, FG = \frac{2}{3} \text{ 米}.$$

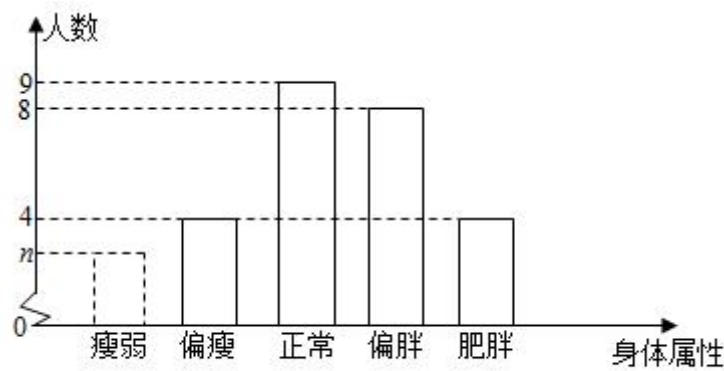
$$\therefore EG = EF - FG = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ (米)},$$

$$\because \angle ABA_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, BA = \frac{2}{\pi} \text{ 米},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 运动至点 } A_2 \text{ 所经过的路程} = \frac{60 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\pi}}{180} + \frac{10}{3} = 4 \text{ (米)}.$$

23. (10分) 目前, 国际上常用身体质量指数“ BMI ”作为衡量人体健康状况的一个指标,

其计算公式： $BMI = \frac{G}{h^2}$ （ G 表示体重，单位：千克； h 表示身高，单位：米）。已知某区域成人的 BMI 数值标准为： $BMI < 16$ 为瘦弱（不健康）； $16 \leq BMI < 18.5$ 为偏瘦； $18.5 \leq BMI < 24$ 为正常； $24 \leq BMI < 28$ 为偏胖； $BMI \geq 28$ 为肥胖（不健康）。



（女性身体属性与人数统计图）

康）。

某研究人员从该区域的一体检中心随机抽取 55 名成人的体重、身高数据组成一个样本，计算每名成人的 BMI 数值后统计：

（男性身体属性与人数统计表）

身体属性	人数
瘦弱	2
偏瘦	2
正常	1
偏胖	9
肥胖	m

- （1）求这个样本中身体属性为“正常”的人数；
- （2）某女性的体重为 51.2 千克，身高为 1.6 米，求该女性的 BMI 数值；
- （3）当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ （ m 、 n 为正整数）时，求这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值。

【分析】（1）样本中身体属性为“正常”的女性人数加上样本中身体属性为“正常”的男性人数即可；

（2）根据计算公式求出该女性的 BMI 数值即可；

（3）当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ （ m 、 n 为正整数）时，根据抽取人数为 55 计算出 m 的值，即可求解。

【解答】解：（1） $9+1=10$ （人），

答：这个样本中身体属性为“正常”的人数是10；

$$(2) BMI = \frac{G}{h^2} = \frac{51.2}{1.6^2} = 20,$$

答：该女性的 BMI 数值为 20；

（3）当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ （ m 、 n 为正整数）时，

这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数： ≥ 17 ，

这个样本中身体属性为“不健康”的女性人数： $n+4+9+8+4 \geq 27$ ，

$$\therefore 2+2+1+9+m+n+4+9+8+4 = 55,$$

$$\therefore m+n = 16,$$

由条形统计图得 $n < 4$ ，

$m = 13$ 时， $n = 3$ ，这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值为 $\frac{13+2}{3+4} = \frac{15}{7}$ ；

$m = 14$ 时， $n = 2$ ，这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值为 $\frac{14+2}{2+4} = \frac{8}{3}$ 。

答：这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值为 $\frac{15}{7}$ 或 $\frac{8}{3}$ 。

24.（10 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = 2x$ 的图象 l 与函数 $y = \frac{k}{x}$ （ k

> 0 ， $x > 0$ ）的图象（记为 Γ ）交于点 A ，过点 A 作 $AB \perp y$ 轴于点 B ，且 $AB = 1$ ，点 C 在线段 OB 上（不含端点），且 $OC = t$ ，过点 C 作直线 $l_1 \parallel x$ 轴，交 l 于点 D ，交图象 Γ 于点 E 。

（1）求 k 的值，并且用含 t 的式子表示点 D 的横坐标；

（2）连接 OE 、 BE 、 AE ，记 $\triangle OBE$ 、 $\triangle ADE$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 ，设 $U = S_1 - S_2$ ，求 U 的最大值。

∴点 D 的横坐标为 $\frac{1}{2}t$;

(2) 由 (1) 知, $k=2$,

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$,

由 (1) 知, $CE\parallel x$ 轴,

∴ $C(0, t)$,

∴点 E 的纵坐标为 t ,

∵点 E 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,

$$\therefore x = \frac{2}{t},$$

$$\therefore E\left(\frac{2}{t}, t\right),$$

$$\therefore CE = \frac{2}{t},$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\therefore OB = 2.$$

$$\therefore S_1 = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2}OB \cdot CE = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{t} = \frac{2}{t}$$

由 (1) 知, $A(1, 2)$, $D\left(\frac{1}{2}t, t\right)$,

$$\therefore DE = \frac{2}{t} - \frac{1}{2}t,$$

∵ $CE\parallel x$ 轴,

$$\therefore S_2 = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}DE(y_A - y_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2}t\right)(2 - t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{2}{t} - 1,$$

$$\therefore U = S_1 - S_2 = \frac{2}{t} - \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{2}{t} - 1\right) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 = -\frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{5}{4},$$

∵点 C 在线段 OB 上 (不含端点),

$$\therefore 0 < t < 2,$$

$$\therefore \text{当 } t=1 \text{ 时, } U \text{ 最大} = \frac{5}{4}.$$

25. (13 分) 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 、 D 是 $\odot O$ 上不同的两点, 直线 BD 交线段

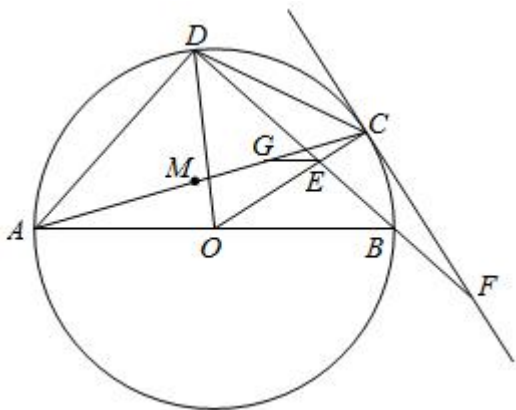
OC 于点 E 、交过点 C 的直线 CF 于点 F , 若 $OC=3CE$, 且 $9(EF^2 - CF^2) = OC^2$.

(1) 求证: 直线 CF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 OD 、 AD 、 AC 、 DC , 若 $\angle COD = 2\angle BOC$.

①求证： $\triangle ACD \sim \triangle OBE$ ；

②过点 E 作 $EG \parallel AB$ ，交线段 AC 于点 G ，点 M 为线段 AC 的中点，若 $AD = 4$ ，求线段 MG 的长度．



【分析】（1）利用勾股定理的逆定理证明 $\angle ECF = 90^\circ$ ，可得结论．

（2）①证明 $\angle DAC = \angle EOB$ ， $\angle DCA = \angle EBO$ ，可得结论．

②利用相似三角形的性质求出 AC ，再求出 CM ， CG ，可得结论．

【解答】（1）证明： $\because 9(EF^2 - CF^2) = OC^2$ ， $OC = 3OE$ ，

$$\therefore 9(EF^2 - CF^2) = 9EC^2,$$

$$\therefore EF^2 = EC^2 + CF^2,$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CF,$$

$\therefore$ 直线 CF 是 $\odot O$ 的切线．

（2）①证明： $\because \angle COD = 2\angle DAC$ ， $\angle COD = 2\angle BOC$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle EOB,$$

$$\because \angle DCA = \angle EBO,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle OBE.$$

②解： $\because OB = OC$ ， $OC = 3EC$ ，

$$\therefore OB : OE = 3 : 2,$$

$$\because \triangle ACD \sim \triangle OBE,$$

$$\therefore \frac{AC}{OB} = \frac{AD}{OE},$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{OB}{OE} = \frac{3}{2},$$

$$\because AD = 4,$$

$$\therefore AC = 6,$$

$\because M$ 是 AC 的中点,

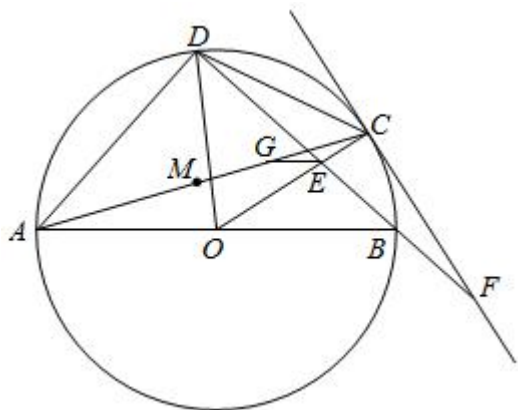
$$\therefore CM = MA = 3,$$

$$\because EG \parallel OA,$$

$$\therefore \frac{CG}{CA} = \frac{CE}{CO} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CG = 2,$$

$$\therefore MG = CM - CG = 3 - 2 = 1.$$



26. (13 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$).

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, $b = c = -2$, 求方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式的值;

(2) 如图所示, 该二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 与 y 轴的负半轴交于点 C , 点 D 在线段 OC 上, 连接 AC 、 BD , 满足 $\angle ACO = \angle ABD$,

$$-\frac{b}{a} + c = x_1.$$

①求证: $\triangle AOC \cong \triangle DOB$;

②连接 BC , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 点 $F(0, x_1 - x_2)$ 在 y 轴的负半轴上, 连接 AF ,

且 $\angle ACO = \angle CAF + \angle CBD$, 求 $\frac{c}{x_1}$ 的值.

$$\text{则 } DE = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) = CE,$$

$$\text{则 } BE = BC - CE = \sqrt{2}OB - CE = -\sqrt{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-c + \frac{1}{a}\right),$$

$$\text{则 } \tan \angle CBD = \frac{DE}{BE} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a} - c\right)} = \frac{c + \frac{1}{a}}{c - \frac{1}{a}},$$

$$\text{而 } \tan \angle AFO = \frac{AO}{FO} = \frac{-x_1}{-(x_1 - x_2)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - c} = \tan \angle CBD = \frac{c + \frac{1}{a}}{c - \frac{1}{a}},$$

$$\text{解得 } ca = -2,$$

$$\text{而 } \frac{c}{x_1} = \frac{c}{-\frac{1}{a}} = -ac = 2,$$

$$\text{故 } \frac{c}{x_1} \text{ 的值为 } 2.$$