

2022 年湖南省怀化市中考数学真题

一、选择题

1. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数的性质，互为相反数的两个数的和为 0 即可求解.

【详解】解：因为 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$,

所以 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查求一个数的相反数，掌握相反数的性质是解题关键.

2. 代数式 $\frac{2}{5}x$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{x^2+4}$, $x^2 - \frac{2}{3}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{x+2}$ 中，属于分式的有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含字母则不是，根据此依据逐个判断即可.

【详解】分母中含有字母的是 $\frac{2}{x^2+4}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{x+2}$,

$\therefore$ 分式有 3 个,

故选：B.

【点睛】本题考查分式的定义，能够准确判断代数式是否为分式是解题的关键.

3. 2022 年 3 月 11 日，新华社发文总结 2021 年中国取得的科技成就，其中包括“奋斗者”号载人潜水器最深下潜至 10909 米. 其中数据 10909 用科学记数法表示为 ()

- A. 10.909×10^2 B. 1.0909×10^3 C. 0.10909×10^4 D. 1.0909×10^4

【答案】D

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变

成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: $10909 = 1.0909 \times 10^4$.

故选: D.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 下列说法正确的是 ()

- A. 相等的角是对顶角
- B. 对角线相等的四边形是矩形
- C. 三角形的外心是它的三条角平分线的交点
- D. 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据对顶角的概念、矩形的判定、三角形外心的定义和垂直平分线的性质逐项判定即可得出结论.

【详解】解: A、根据对顶角的概念可知, 相等的角不一定是对顶角, 故该选项不符合题意;

B、根据矩形的判定“对角线相等的平行四边形是矩形”可知该选项不符合题意;

C、根据三角形外心的定义, 外心是三角形外接圆圆心, 是三角形三条边中垂线的交点, 故该选项不符合题意;

D、根据线段垂直平分线的性质可知该选项符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查基本几何概念、图形判定及性质, 涉及到对顶角的概念、矩形的判定、三角形外心的定义和垂直平分线的性质等知识点, 熟练掌握相关几何图形的定义、判定及性质是解决问题的关键.

5. 下列计算正确的是 ()

- A. $(2a^2)^3 = 6a^6$
- B. $a^8 \div a^2 = a^4$
- C. $\sqrt{(-2)^2} = 2$
- D. $(x-y)^2 = x^2 - y^2$

【答案】C

【解析】

【分析】依次对每个选项进行计算, 判断出正确的答案.

【详解】 $\because (2a^2)^3 = 2^3 a^6 = 8a^6$

$\therefore$ A 错误

$\because a^8 \div a^2 = a^{8-2} = a^6$

∴ B 错误

$$\because \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

∴ C 正确

$$\because (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

∴ D 错误

故选: C.

【点睛】 本题考查整式的运算, 解题的关键是熟练掌握运算法则.

6. 下列一元二次方程有实数解的是 ()

A. $2x^2 - x + 1 = 0$

B. $x^2 - 2x + 2 = 0$

C. $x^2 + 3x - 2 = 0$

D. $x^2 + 2 = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 判断一元二次方程实数根的情况用根的判别式进行判断.

【详解】 A 选项中, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$, 故方程无实数根;

B 选项中, $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, 故方程无实数根;

C 选项中, $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17 > 0$, 故方程有两个不相等的实数根;

D 选项中, $\Delta = -8 < 0$, 故方程无实数根;

故选 C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程实数根情况的判定方法是解题的关键.

7. 一个多边形的内角和为 900° , 则这个多边形是 ()

A. 七边形

B. 八边形

C. 九边形

D. 十边形

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据 n 边形的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 列出方程即可求解.

【详解】 解: 根据 n 边形的内角和公式, 得

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ,$$

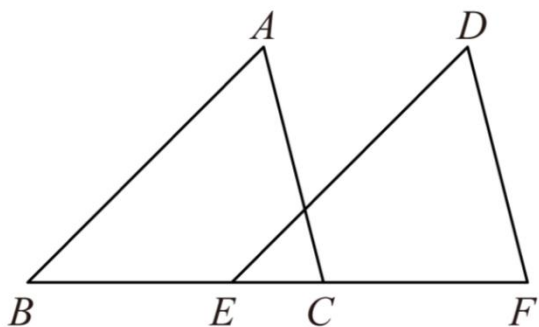
解得 $n=7$,

∴ 这个多边形的边数是 7,

故选: A.

【点睛】 本题考查了多边形的内角和，解题的关键是熟记内角和公式并列方程.

8. 如图， $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移后的像为 $\triangle DEF$ ，已知 $BC=5$ ， $EC=2$ ，则平移的距离是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据题意判断 BE 的长就是平移的距离，利用已知条件求出 BE 即可.

【详解】 因为 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移，点 E 是点 B 移动后的对应点，
所以 BE 的长等于平移的距离，

由图可知，点 B 、 E 、 C 在同一直线上， $BC=5$ ， $EC=2$ ，

所以 $BE=BC-EC=5-2=3$ ，

故选 C.

【点睛】 本题考查了平移，正确找出平移对应点是求平移距离的关键.

9. 从下列一组数 -2 ， π ， $-\frac{1}{2}$ ， -0.12 ， 0 ， $-\sqrt{5}$ 中随机抽取一个数，这个数是负数的概率为 ()

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 找出题目给的数中的负数，用负数的个数除以总的个数，求出概率即可.

【详解】 $\because$ 数 -2 ， π ， $-\frac{1}{2}$ ， -0.12 ， 0 ， $-\sqrt{5}$ 中，一共有 6 个数，

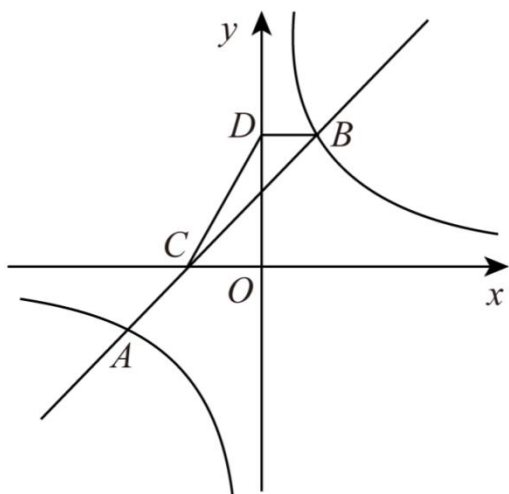
其中 -2 ， $-\frac{1}{2}$ ， -0.12 ， $-\sqrt{5}$ 为负数，有 4 个，

$\therefore$ 这个数是负数的概率为 $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

故答案选：B.

【点睛】 本题考查负数的认识，概率计算公式，正确找出负数的个数是解答本题的关键.

10. 如图, 直线 AB 交 x 轴于点 C , 交反比例函数 $y = \frac{a-1}{x}$ ($a > 1$) 的图像于 A 、 B 两点, 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴, 垂足为点 D , 若 $S_{\triangle BCD} = 5$, 则 a 的值为 ()



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

【答案】D

【解析】

【分析】设 $B\left(m, \frac{a-1}{m}\right)$, 由 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{a-1}{m}$ 即可求解.

【详解】解: 设 $B\left(m, \frac{a-1}{m}\right)$,

$\because BD \perp y$ 轴

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{a-1}{m} = 5,$$

解得: $a = 11$

故选: D.

【点睛】本题主要考查反比例函数的应用, 掌握反比例函数的相关知识是解题的关键.

二、填空题

11. 计算 $\frac{x+5}{x+2} - \frac{3}{x+2} =$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据同分母分式相加减, 分母不变, 把分子相加减计算即可.

【详解】解: $\frac{x+5}{x+2} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+5-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1$

故答案为：1.

【点睛】 本题考查分式的加减，解题关键是熟练掌握同分母分式相加减时分母不变，分子相加减，异分母相加减时，先通分变为同分母分式，再加减.

12. 因式分解： $x^2 - x^4 =$ _____.

【答案】 $x^2(1+x)(1-x)$

【解析】

【分析】 根据提公因式法和平方差公式进行分解即可.

【详解】 解： $x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) = x^2(1 + x)(1 - x)$,

故答案为： $x^2(1+x)(1-x)$

【点睛】 本题考查了提公因式法和平方差公式，熟练掌握提公因式法和平方差公式是解题的关键.

13. 已知点 $A(-2, b)$ 与点 $B(a, 3)$ 关于原点对称，则 $a - b =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据平面直角坐标系中，关于原点对称的点横、纵坐标都互为相反数，求出 a, b 的值即可.

【详解】 $\because$ 点 $A(-2, b)$ 与点 $B(a, 3)$ 关于原点对称，

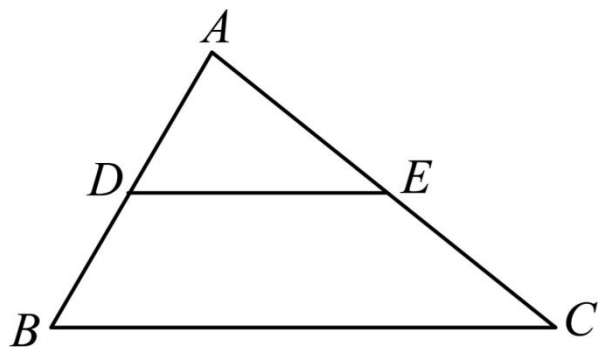
$$\therefore a = 2, \quad b = -3,$$

$$\therefore a - b = 2 - (-3) = 5$$

故答案为：5.

【点睛】 本题考查平面直角坐标系中，关于原点对称的点的坐标的特点，掌握特殊位置关系的点的坐标变化是解答本题的关键.

14. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是 AB, AC 的中点，若 $S_{\triangle ADE} = 2$ ，则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.



【答案】 8

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理求得 $DE \parallel BC$, $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$, 从而求得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 然后利用相似三角形的性质求解.

【详解】解: $\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点, 则 DE 为中位线,

$$\text{所以 } DE \parallel BC, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

所以 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

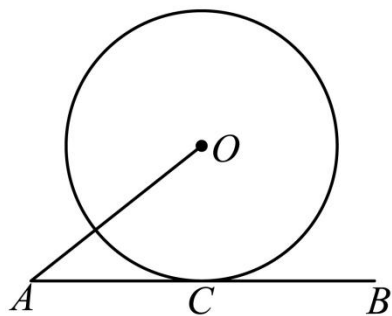
$$\therefore S_{\triangle ADE} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 8$$

故答案为: 8.

【点睛】本题考查中位线及平行线性质, 本题难度较低, 主要考查学生对三角形中位线及平行线性质等知识点的掌握.

15. 如图, AB 与 $\odot O$ 相切于点 C , $AO=3$, $\odot O$ 的半径为 2, 则 AC 的长为_____.

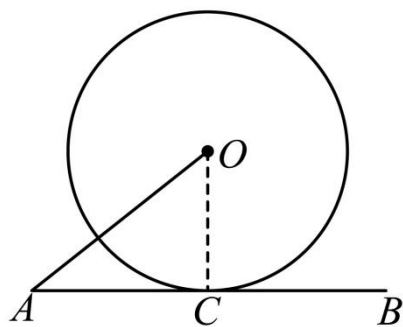


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据切线的性质得到 $\angle OCA=90^\circ$, 再利用勾股定理求解即可.

【详解】解: 连接 OC ,



$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp AB$, 即 $\angle OCA=90^\circ$,

在 $Rt\triangle OCA$ 中, $AO=3$, $OC=2$,

$$\therefore AC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了切线的性质, 勾股定理, 熟练掌握切线的性质是解题关键. 切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径.

16. 正偶数 2, 4, 6, 8, 10, …… , 按如下规律排列,

2

4 6

8 10 12

14 16 18 20

……

则第 27 行的第 21 个数是_____.

【答案】 744

【解析】

【分析】 由图可以看出, 每行数字的个数与行数是一致的, 即第一行有 1 个数, 第二行有 2 个数, 第三行有 3 个数……第 n 行有 n 个数, 则前 n 行共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数, 再根据偶数的特征确定第几行第几个数是几.

【详解】 解: 由图可知,

第一行有 1 个数,

第二行有 2 个数,

第三行有 3 个数,

……

第 n 行有 n 个数.

$\therefore$ 前 n 行共有 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 个数.

$\therefore$ 前 26 行共有 351 个数,

$\therefore$ 第 27 行第 21 个数是所有数中的第 372 个数.

$\therefore$ 这些数都是正偶数,

$\therefore$ 第 372 个数为 $372 \times 2 = 744$.

故答案为: 744.

【点睛】 本题考查了数字类的规律问题，解决这类问题的关键是先根据题目的已知条件找出其中的规律，再结合其他已知条件求解.

三、解答题

17. 计算: $(3.14 - \pi)^0 + |\sqrt{2} - 1| + (\frac{1}{2})^{-1} - \sqrt{8}$.

【答案】 $2 - \sqrt{2}$

【解析】

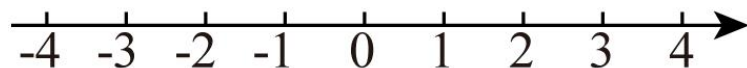
【分析】 分别根据二次根式的性质、负整数指数幂、零指数幂的计算法则计算出各数，再根据实数混合运算的法则进行计算即可.

【详解】 解: $(3.14 - \pi)^0 + |\sqrt{2} - 1| + (\frac{1}{2})^{-1} - \sqrt{8}$
 $= 1 + \sqrt{2} - 1 + 2 - 2\sqrt{2}$
 $= 2 - \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查的是实数的运算，熟知二次根式的性质、负整数指数幂、零指数幂的计算法则是解答此题的关键.

18. 解不等式组，并把解集在数轴上表示出来.

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1) \text{ ①} \\ 3x - 2 \leq 2x + 1 \text{ ②} \end{cases}$$



【答案】 $2 < x \leq 3$ ，数轴见解析

【解析】

【分析】 根据解一元一次不等式组的方法步骤求解，然后在数轴上把解集表示出来即可.

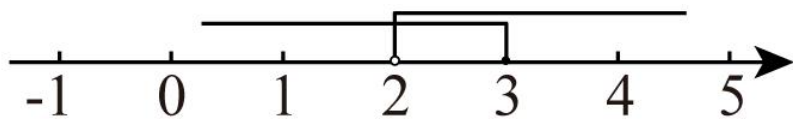
【详解】 解: $\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1) \text{ ①} \\ 3x - 2 \leq 2x + 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①得 $x > 2$,

由②得 $x \leq 3$,

该不等式组的解集为 $2 < x \leq 3$,

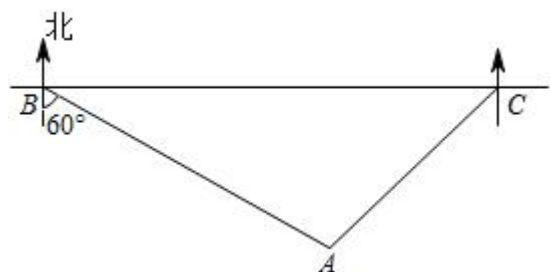
在数轴上表示该不等式组的解集为:



【点睛】 本题考查一元一次不等式组的解法步骤及用数轴表示不等式组的解集，熟练掌握相关解法步骤是

解决问题的关键.

19. 某地修建了一座以“讲好隆平故事，厚植种子情怀”为主题的半径为 800 米的圆形纪念园. 如图，纪念园中心点 A 位于 C 村西南方向和 B 村南偏东 60° 方向上， C 村在 B 村的正东方向且两村相距 2.4 千米. 有关部门计划在 B 、 C 两村之间修一条笔直的公路来连接两村. 问该公路是否穿过纪念园？试通过计算加以说明. （参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ）



【答案】不穿过，理由见解析

【解析】

【分析】先作 $AD \perp BC$ ，再根据题意可知 $\angle ACD = 45^\circ$ ， $\angle ABD = 30^\circ$ ，设 $CD = x$ ，可表示 AD 和 BD ，然后根据特殊角三角函数值列出方程，求出 AD ，与 800 米比较得出答案即可.

【详解】不穿过，理由如下：

过点 A 作 $AD \perp BC$ ，交 BC 于点 D ，根据题意可知 $\angle ACD = 45^\circ$ ， $\angle ABD = 30^\circ$.

设 $CD = x$ ，则 $BD = 2.4 - x$ ，

在 $Rt\triangle ACD$ 中， $\angle ACD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$ ，

$\therefore AD = CD = x$.

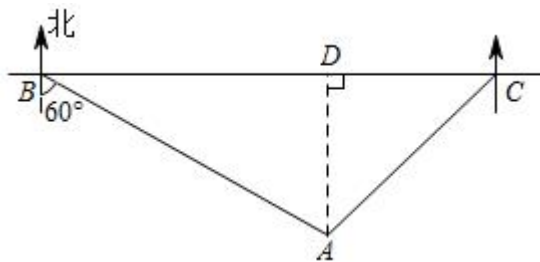
在 $Rt\triangle ABD$ 中， $\tan 30^\circ = \frac{AD}{BD}$ ，

$$\text{即 } \frac{x}{2.4 - x} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得 $x = 0.88$ ，

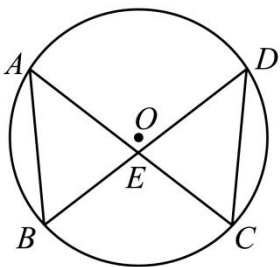
可知 $AD = 0.88$ 千米 = 880 米，

因为 880 米 $>$ 800 米，所以公路不穿过纪念园.



【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的应用，构造直角三角形是解题的关键.

20. 如图，点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. 求证:



(1) $AC = BD$;

(2) $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 两个等弧同时加上一段弧后两弧仍然相等；再通过同弧所对的弦相等证明即可；

(2) 根据同弧所对的圆周角相等，对顶角相等即可证明相似.

【小问 1 详解】

$$\because \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\therefore \widehat{AB} + \widehat{AD} = \widehat{CD} + \widehat{AD}$$

$$\therefore \widehat{BAD} = \widehat{ADC}$$

$$\therefore BD = AC$$

【小问 2 详解】

$$\because \angle B = \angle C; \angle AEB = \angle DEC$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE$$

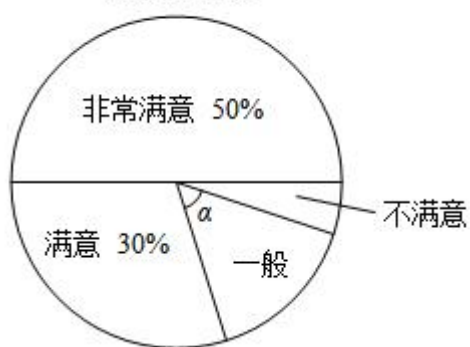
【点睛】 本题考查等弧所对弦相等、所对圆周角相等，掌握这些是本题关键.

21. 电视剧《一代洪商》在中央电视台第八套播出后，怀化市各旅游景点知名度得到显著提高. 为全面提高旅游服务质量，旅游管理部门随机抽取了 100 名游客进行满意度调查，并绘制成如下不完整的频数分布表和扇形统计图.

频数分布表

满意程度	频数 (人)	频率
非常满意	50	0.5
满意	30	0.3
一般	a	c
不满意	b	0.05
合计	100	1

扇形统计图



根据统计图表提供的信息，解答下列问题：

- (1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 求扇形统计图中表示“一般”的扇形圆心角 α 的度数；
- (3) 根据调查情况，请你对各景点的服务提一至两条合理建议.

【答案】 (1) 15; 5; 0.15

- (2) 54°
- (3) 有理即可；见详解

【解析】

【分析】 (1) 根据图表信息进行求解即可；

(2) 根据满意度“一般”所占圆的的比例乘 360° 即可得 α 的度数；

(3) 根据图表数据给出合理建议即可；

【小问 1 详解】

解： $b = 100 \times 0.05 = 5$ (人)；

$$a = 100 - 50 - 30 - 5 = 15 \text{ (人)};$$

$$c = 1 - 0.5 - 0.3 - 0.05 = 0.15$$

【小问 2 详解】

$$0.15 \times 360^\circ = 54^\circ$$

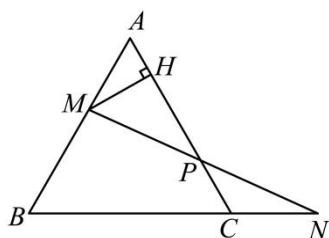
答：扇形统计图中表示“一般”的扇形圆心角 α 的度数为 54° .

【小问 3 详解】

根据图表可以看出绝大多数还是相当满意的，所以我觉得我们可以多一些对细节的规划，在环境一块更加注重，做到尽善尽美，推出一些具备特色的服务项目，给到游客不一样的体验.

【点睛】本题主要考查扇形统计图，圆心角的求解，解本题的关键在于需认真读题并正确计算出结果.

22. 如图，在等边三角形 ABC 中，点 M 为 AB 边上任意一点，延长 BC 至点 N ，使 $CN=AM$ ，连接 MN 交 AC 于点 P ， $MH \perp AC$ 于点 H .



(1) 求证: $MP=NP$;

(2) 若 $AB=a$ ，求线段 PH 的长 (结果用含 a 的代数式表示).

【答案】(1) 见详解;

(2) $0.5a$.

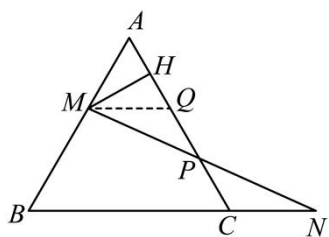
【解析】

【分析】(1) 过点 M 作 $MQ \parallel CN$ ，证明 $\triangle MQP \cong \triangle NCP$ 即可;

(2) 利用等边三角形的性质推出 $AH=HQ$ ，则 $PH=HQ+PQ=0.5 (AQ+CQ)$.

【小问 1 详解】

如下图所示，过点 M 作 $MQ \parallel CN$,



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $MQ \parallel CN$,

$$\therefore \frac{AM}{AQ} = \frac{AB}{AC} = 1,$$

则 $AM=AQ$, 且 $\angle A=60^\circ$,

$\therefore \triangle AMQ$ 为等边三角形, 则 $MQ=AM=CN$,

又 $\because MQ \parallel CN$,

$\therefore \angle QMP = \angle CNP$,

在 $\triangle MQP$ 与 $\triangle NCP$ 中,

$$\begin{cases} \angle MPQ = \angle NPC \\ \angle QMP = \angle CNP \\ QM = CN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MQP \cong \triangle NCP$,

则 $MP=NP$;

【小问 2 详解】

$\because \triangle AMQ$ 为等边三角形, 且 $MH \perp AC$,

$\therefore AH=HQ$,

又由 (1) 得, $\triangle MQP \cong \triangle NCP$,

则 $PQ=PC$,

$\therefore PH=HQ+PQ=0.5(AQ+CQ)=0.5AC=0.5a$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质与判定、三角形全等的判定, 正确作出辅助线是解题的关键.

23. 去年防洪期间, 某部门从超市购买了一批数量相等的雨衣 (单位: 件) 和雨鞋 (单位: 双), 其中购买雨衣用了 400 元, 购买雨鞋用了 350 元, 已知每件雨衣比每双雨鞋贵 5 元.

(1) 求每件雨衣和每双雨鞋各多少元?

(2) 为支持今年防洪工作, 该超市今年的雨衣和雨鞋单价在去年的基础上均下降了 20%, 并按套 (即一件雨衣和一双雨鞋为一套) 优惠销售. 优惠方案为: 若一次购买不超过 5 套, 则每套打九折; 若一次购买超过 5 套, 则前 5 套打九折, 超过部分每套打八折. 设今年该部门购买了 a 套, 购买费用为 W 元, 请写出 W 关于 a 的函数关系式.

(3) 在 (2) 的情况下, 今年该部门购买费用不超过 320 元时最多可购买多少套?

【答案】 (1) 每件雨衣 40 元, 每双雨鞋 35 元

$$(2) W = \begin{cases} a \times 60 \times 0.9 = 54a & 0 \leq a < 5 \\ 270 + (a-5) \times 60 \times 0.8 = 48a + 30 & a \geq 5 \end{cases}$$

(3) 最多可购买6套

【解析】

【分析】(1) 根据题意，设每件雨衣 $(x+5)$ 元，每双雨鞋 x 元，列分式方程求解即可；

(2) 根据题意，按套装降价20%后得到每套60元，根据费用=单价×套数即可得出结论；

(3) 根据题意，结合(2)中所求，得出不等式 $48a+30 \leq 320$ ，求解后根据实际意义取值即可.

【小问1详解】

解：设每件雨衣 $(x+5)$ 元，每双雨鞋 x 元，则

$$\frac{400}{x+5} = \frac{350}{x}, \text{ 解得 } x = 35,$$

经检验， $x = 35$ 是原分式方程的根，

$$\therefore x+5 = 40,$$

答：每件雨衣40元，每双雨鞋35元；

【小问2详解】

解：根据题意，一套原价为 $35+40=75$ 元，下降20%后的现价为 $75 \times (1-20\%) = 60$ 元，则

$$W = \begin{cases} a \times 60 \times 0.9 = 54a, & 0 \leq a < 5 \\ 270 + (a-5) \times 60 \times 0.8 = 48a + 30, & a \geq 5 \end{cases}$$

【小问3详解】

解： $\because 320 > 270$,

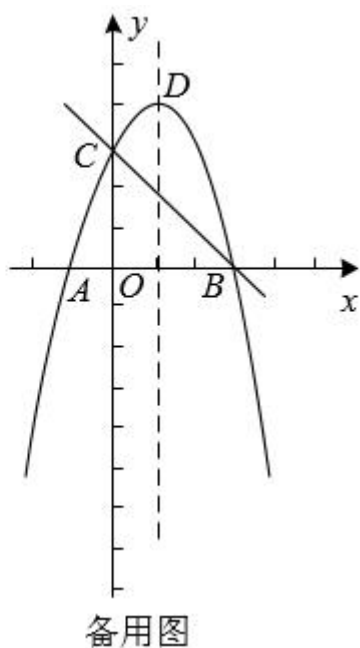
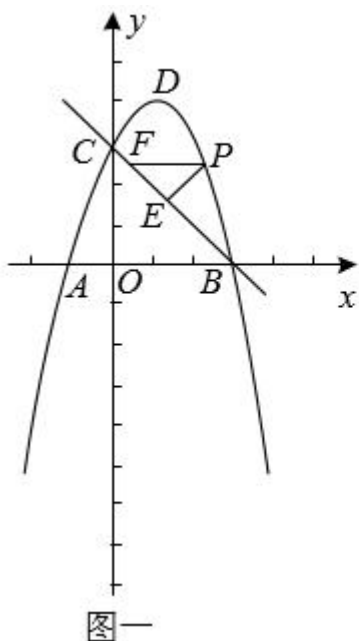
$\therefore$ 购买的套数在 $a \geq 5$ 范围内，

$$\text{即 } 48a + 30 \leq 320, \text{ 解得 } a \leq \frac{145}{24} \approx 6.042,$$

答：在(2)的情况下，今年该部门购买费用不超过320元时最多可购买6套.

【点睛】本题考查实际应用题，涉及分式方程的实际应用、一次分段函数的实际应用和不等式解实际应用题等知识，熟练掌握实际应用题的求解步骤“设、列、解、答”，根据题意得出相应关系式是解决问题的关键.

24. 如图一所示，在平面直角坐标中，抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，顶点为点 D . 在线段 CB 上方的抛物线上有一动点 P ，过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E ，作 $PF \parallel AB$ 交 BC 于点 F .



- (1) 求抛物线和直线 BC 的函数表达式,
- (2) 当 $\triangle PEF$ 的周长为最大值时, 求点 P 的坐标和 $\triangle PEF$ 的周长.
- (3) 若点 G 是抛物线上的一个动点, 点 M 是抛物线对称轴上的一个动点, 是否存在以 C 、 B 、 G 、 M 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求出点 G 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 抛物线函数表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3$, 直线 BC 的函数表达式为 $y = -x + 3$

(2) 点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$, $\triangle PEF$ 的周长为 $\frac{9}{4}(\sqrt{2} + 1)$

(3) 存在, $(2, 3)$ 或 $(-2, -5)$ 或 $(4, -5)$

【解析】

【分析】(1) 由点 A 、 B 的坐标, 利用待定系数即可求解析式;

(2) 利用直线和抛物线的位置关系相切时对应的等腰直角三角形 PEF 周长最大, 二次函数与一次函数联立方程, 根的判别式 $\Delta = 0$, 从而找出对应点 P 坐标, 进而求出周长;

(3) 根据平行四边形对角线性质和中点公式, 把 BC 是否为对角线分情况进行分析, 设出点 G 的横坐标, 利用中点公式列方程计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + 2x + c$, 得:

$$\begin{cases} 0 = a - 2 + c \\ 0 = 9a + 6 + c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases},$$

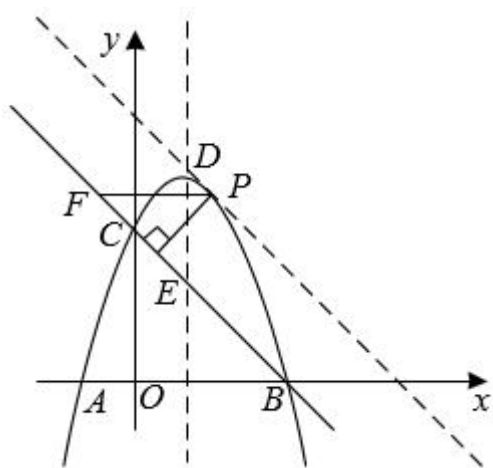
所以抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$, $C(0, 3)$

设直线 BC 的函数表达式 $y = kx + b$ ，将 $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0 = 3k + b \\ 3 = b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

所以直线 BC 的函数表达式为 $y = -x + 3$

【小问 2 详解】



解: 如图, 设将直线 BC 平移到与抛物线相切时的解析式为 $y = -x + p$, 与抛物线联立得:

$$\begin{cases} y = -x + p \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \text{整理得 } x^2 - 3x + p - 3 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(p - 3) = 0, \text{解得 } p = \frac{21}{4},$$

$$\text{将 } p = \frac{21}{4} \text{ 代入 } x^2 - 3x + p - 3 = 0, \text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\text{将 } x = \frac{3}{2} \text{ 代入 } y = -x^2 + 2x + 3 \text{ 得 } y = \frac{15}{4},$$

$$\text{即 } \triangle PEF \text{ 的周长为最大值时, 点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

$$\text{将 } x = \frac{3}{2} \text{ 代入 } y = -x + 3 \text{ 得 } y = \frac{3}{2},$$

$$\text{则此时 } PF = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4},$$

$$\text{因为 } \triangle PEF \text{ 为等腰直角三角形, } PE = FE = \frac{9}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{则 } \triangle PEF \text{ 的周长最大为 } \frac{9}{4}(\sqrt{2} + 1)$$

【小问 3 详解】

答: 存在.

已知 $B(3, 0)$, $C(0, 3)$, 设点 $G(m, -m^2 + 2m + 3)$, $N(1, n)$,

当 BC 为平行四边形对角线时, 根据中点公式得: $m+1=3$, $m=2$, 则 G 点坐标为 $(2, 3)$;

当 BC 为平行四边形对角线时, 同样利用中点坐标公式得: $m+3=1$ 或 $m-3=1$, 解得 $m=-2$ 或 $m=4$
则 G 点坐标为 $(-2, -5)$ 或 $(4, -5)$

故点 G 坐标为 $(2, 3)$ 或 $(-2, -5)$ 或 $(4, -5)$

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数图像上点的坐标特征、待定系数法求一次函数解析式、直线与抛物线的位置关系、根的判别式, 等腰直角三角形性质, 平行四边形的性质, 解题的关键 (1) 根据点的坐标利用待定系数求解析式; (2) 利用直线和抛物线的位置关系, 巧妙利用判别式; (3) 熟悉平行四边形对角线性质, 结合中点公式分情况展开讨论.

