

## 二〇二四年齐齐哈尔市初中学业考试

### 数学试卷

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟
2. 全卷共三道大题，总分 120 分
3. 使用答题卡的考生，请将答案填写在答题卡的指定位置

一、选择题(每小题只有一个正确答案，每小题 3 分，满分 30 分)

1. 实数  $-5$  的相反数是 ( )

- A. 5                                  B.  $-5$                                   C.  $\frac{1}{5}$                                   D.  $-\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了相反数的判断，根据相反数的定义解答即可.

【详解】 $-5$  的相反数是 5.

故选：A.

2. 下列美术字中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )



【答案】D

【解析】

【分析】中心对称图形的定义：旋转  $180^\circ$  后能够与原图形完全重合即是中心对称图形，轴对称图形的定义：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，根据定义即可判断出答案.

【详解】解：选项 A 是轴对称图形，不是中心对称图形，故 A 不符合题意；

选项 B 是轴对称图形，不是中心对称图形，故 B 不符合题意；

选项 C 是轴对称图形，不是中心对称图形，故 C 不符合题意；

选项 D 是轴对称图形，也是中心对称图形，故 D 符合题意；

故选：D

【点睛】本题考查了轴对称图形，中心对称图形，熟记两种图形的特点并准确判断是解题的关键.

3. 下列计算正确的是 ( )

A.  $4a^2 + 2a^2 = 6a^4$

B.  $5a \cdot 2a = 10a$

C.  $a^6 \div a^2 = a^3$

D.  $(-a^2)^2 = a^4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方、合并同类项、同底数幂相乘、除，根据运算法则逐项分析，即可作答.

【详解】解：A、 $4a^2 + 2a^2 = 6a^2 \neq 6a^4$ ，故该选项不符合题意；

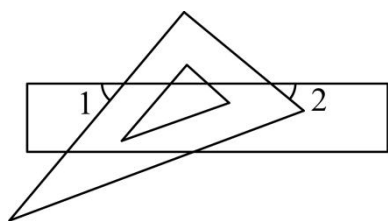
B、 $5a \cdot 2a = 10a^2 \neq 10a$ ，故该选项不符合题意；

C、 $a^6 \div a^2 = a^4 \neq a^3$ ，故该选项不符合题意；

D、 $(-a^2)^2 = a^4$ ，故该选项符合题意；

故选：D

4. 将一个含  $30^\circ$  角的三角尺和直尺如图放置，若  $\angle 1 = 50^\circ$ ，则  $\angle 2$  的度数是 ( )



A.  $30^\circ$

B.  $40^\circ$

C.  $50^\circ$

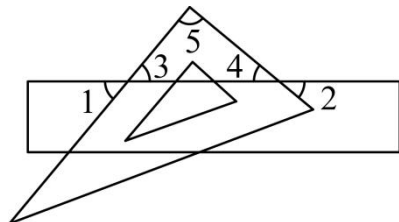
D.  $60^\circ$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了对顶角的性质，三角形内角和定理. 根据对顶角相等和三角形的内角和定理，即可求解.

【详解】解：如图所示，

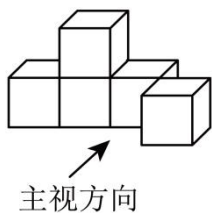


由题意得  $\angle 3 = \angle 1 = 50^\circ$ ， $\angle 5 = 90^\circ$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ，

故选：B.

5. 如图,若几何体是由 5 个棱长为 1 的小正方体组合而成的,则该几何体左视图与俯视图的面积和是 ( )

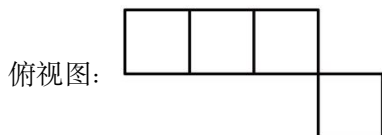
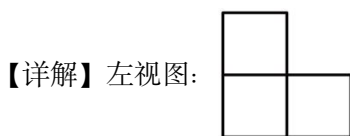


- A. 6                      B. 7                      C. 8                      D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查简单组合体的三视图, 根据从左面看得到的图形是左视图, 从上面看的到的视图是俯视图, 再根据面积的和, 可得答案.



$\therefore$  该几何体左视图与俯视图的面积和是:  $7 \times 1 \times 1 = 7$

故选: B

6. 如果关于  $x$  的分式方程  $\frac{1}{x} - \frac{m}{x+1} = 0$  的解是负数, 那么实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m < 1$  且  $m \neq 0$                       B.  $m < 1$                       C.  $m > 1$                       D.  $m < 1$  且  $m \neq -1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了根据分式方程的解的情况求参数, 解分式方程求出分式方程的解, 再根据分式方程的解是负数得到  $m - 1 < 0$ , 并结合分式方程的解满足最简公分母不为 0, 求出  $m$  的取值范围即可, 熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

【详解】解: 方程两边同时乘以  $x(x+1)$  得,  $x+1-mx=0$ ,

$$\text{解得 } x = \frac{1}{m-1},$$

$\therefore$  分式方程的解是负数,

$$\therefore m-1 < 0,$$

$$\therefore m < 1,$$

$$\text{又 } \because x(x+1) \neq 0,$$

$$\therefore x+1 \neq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{m-1} \neq -1,$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore m < 1 \text{ 且 } m \neq 0,$$

故选：A.

7. 六月份，在“阳光大课间”活动中，某校设计了“篮球、足球、排球、羽毛球”四种球类运动项目，且每名学生在一个大课间只能选择参加一种运动项目，则甲、乙两名学生在一个大课间参加同种球类运动项目的概率是（ ）

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{4}$

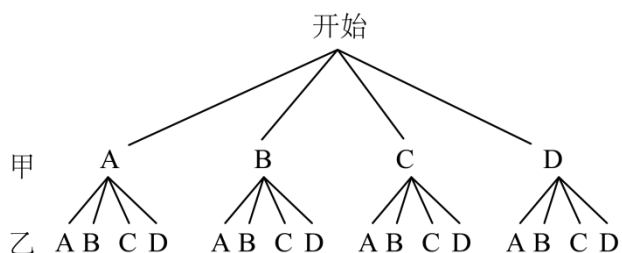
D.  $\frac{1}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了列表法或画树状图法求概率，分别用  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  表示篮球、足球、排球、羽毛球，根据题意画树状图求解即可.

【详解】解：分别用  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  表示篮球、足球、排球、羽毛球，  
列树状图如下：



由树状图可知，共有16种等可能情况，其中甲、乙两名学生在一个大课间参加同种球类运动项目的情况有4种，

即甲、乙两名学生在一个大课间参加同种球类运动项目的概率是  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ,

故选：C.

8. 校团委开展以“我爱读书”为主题的演讲比赛活动，为奖励表现突出的学生，计划拿出200元钱全部用于购买单价分别为8元和10元的两种笔记本(两种都要购买)作为奖品，则购买方案有（ ）

A. 5种

B. 4种

C. 3种

D. 2种

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程的应用，设单价分别为8元和10元的两种笔记本分别为  $x$ 、 $y$  个，根据题意列出方程，根据整数解的个数，即可求解.

【详解】解：设单价分别为 8 元和 10 元的两种笔记本分别为  $x, y$  个，

依题意， $8x + 10y = 200$

$$\therefore x = -\frac{5y}{4} + 25$$

$\because x, y$  为正整数，

$\therefore$  当  $y = 4$  时， $x = 20$ ，

当  $y = 8$  时， $x = 15$

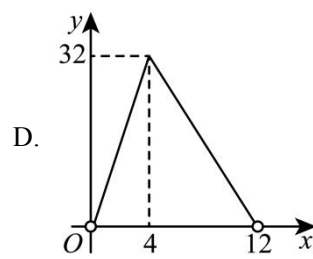
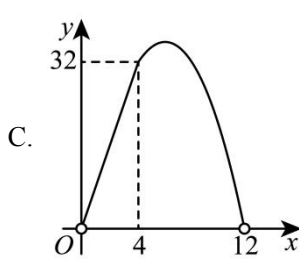
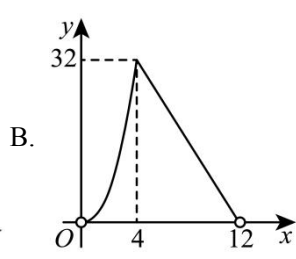
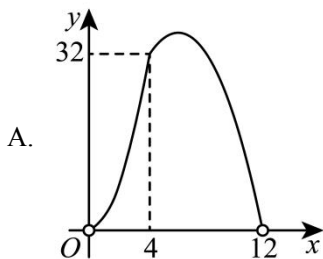
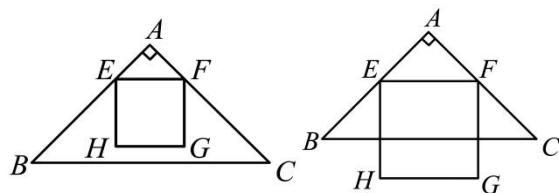
当  $y = 12$  时， $x = 10$

当  $y = 16$  时， $x = 5$

$\therefore$  购买方案有 4 种，

故选：B.

9. 如图，在等腰  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 12$ ，动点  $E, F$  同时从点  $A$  出发，分别沿射线  $AB$  和射线  $AC$  的方向匀速运动，且速度大小相同，当点  $E$  停止运动时，点  $F$  也随之停止运动，连接  $EF$ ，以  $EF$  为边向下做正方形  $EFGH$ ，设点  $E$  运动的路程为  $x$  ( $0 < x < 12$ )，正方形  $EFGH$  和等腰  $\text{Rt}\triangle ABC$  重合部分的面积为下列图像能反映  $y$  与  $x$  之间函数关系的是 ( )



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查动态问题与函数图象，能够明确  $y$  与  $x$  分别表示的意义，并找到几何图形与函数图象之间的关系，以及对应点是解题的关键，根据题意并结合选项分析当  $HG$  与  $BC$  重合时，及当  $x \leq 4$  时图象的走势，和当  $x > 4$  时图象的走势即可得到答案.

【详解】解：当  $HG$  与  $BC$  重合时，设  $AE = x$ ，由题可得：

$$\therefore EF = EH = \sqrt{2}x, \quad BE = 12 - x,$$

在  $\text{Rt}\triangle EHB$  中，由勾股定理可得：  $BE^2 = BH^2 + EH^2$ ,

$$\therefore (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{2}x)^2 = (12 - x)^2,$$

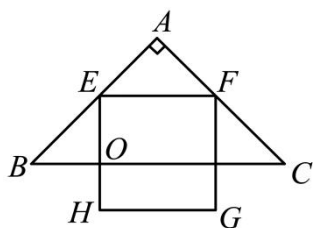
$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x \leq 4 \text{ 时, } y = (\sqrt{2}x)^2 = 2x^2,$$

$$\therefore 2 > 0,$$

$\therefore$  图象为开口向上的抛物线的一部分，

当  $HG$  在  $BC$  下方时，设  $AE = x$ ，由题可得：



$$\therefore EF = \sqrt{2}x, \quad BE = 12 - x,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle B = 45^\circ, \quad \angle A = \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle EOB,$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{EO}{EB},$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{EO}{12 - x},$$

$$\therefore EO = \frac{12 - x}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \text{当 } 4 < x < 12 \text{ 时, } y = (\sqrt{2}x) \cdot \frac{12 - x}{\sqrt{2}} = (12 - x)x = -x^2 + 12x,$$

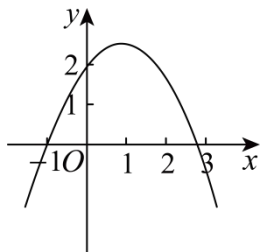
$$\therefore -1 < 0,$$

$\therefore$  图象为开口向下的抛物线的一部分，

综上所述：A 正确，

故选：A.

10. 如图，二次函数  $y = ax^2 + bx + 2$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴交于  $(-1, 0)$ ， $(x_1, 0)$ ，其中  $2 < x_1 < 3$ ．结合图象给出下列结论：



①  $ab > 0$ ; ②  $a - b = -2$ ;

③ 当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小;

④ 关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + 2 = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的另一个根是  $-\frac{2}{a}$ ;

⑤  $b$  的取值范围为  $1 < b < \frac{4}{3}$ . 其中正确结论的个数是 ( )

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据二次函数的图象与性质判断结论①②③正误; 由二次函数与一元二次方程的关系、一元二次方程的解判断结论④; 利用结论④及题中条件  $2 < x_1 < 3$  可求得  $a$  的取值范围, 再由结论②  $a - b = -2$  可得  $b$  取值范围, 判断⑤是否正确.

【详解】 解: 由图可得:  $a < 0$ , 对称轴  $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ,

$\therefore b > 0$ ,

$\therefore ab < 0$ , ①错误;

由图得, 图象经过点  $(-1, 0)$ , 将  $(-1, 0)$  代入  $y = ax^2 + bx + c$  可得  $a - b + 2 = 0$ ,

$\therefore a - b = -2$ , ②正确;

$\because$  该函数图象与  $x$  轴的另一个交点为  $(x_1, 0)$ , 且  $2 < x_1 < 3$ ,

$\therefore$  对称轴  $x = -\frac{b}{2a} < 1$ ,

$\because$  该图象中, 当  $x > -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而减小, 当  $x < -\frac{b}{2a}$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大,

$\therefore$  当  $x > 1$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而减小,

$\therefore$  ③正确;

$\because b = a + 2$ ,  $c = 2$ ,

$\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + (a + 2)x + 2 = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的根为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{(a + 2)^2 - 8a}}{2a} = \frac{-(a + 2) \pm |a - 2|}{2a},$$

$\therefore a < 0$ ,

$$\therefore x_1 = \frac{-(a+2)-(2-a)}{2a} = -\frac{2}{a}, \quad x_2 = \frac{-(a+2)+2-a}{2a} = -1,$$

$\therefore$  ④正确;

$$\therefore 2 < x_1 < 3, \text{ 即 } 2 < -\frac{2}{a} < 3,$$

$$\text{解得 } -1 < a < -\frac{2}{3},$$

$$\therefore a - b = -2 \text{ 即 } a = b - 2,$$

$$\therefore -1 < b - 2 < -\frac{2}{3},$$

$$\therefore 1 < b < \frac{4}{3},$$

$\therefore$  ⑤正确.

综上, ②③④⑤正确, 共 4 个.

故选: C.

【点睛】本题考查的知识点是二次函数的图象与性质、二次函数与一元二次方程中抛物线与  $x$  轴的交点问题、一元二次方程的根与系数的关系、二次函数与不等式中根据交点确定不等式的解集, 解题关键是熟练掌握二次函数的图象与性质.

## 二、填空题(每小题 3 分, 满分 21 分)

11. 共青团中央发布数据显示: 截至 2023 年 12 月底, 全国共有共青团员 7416.7 万名. 将 7416.7 万用科学记数法表示为\_\_\_\_\_.

【答案】  $7.4167 \times 10^7$

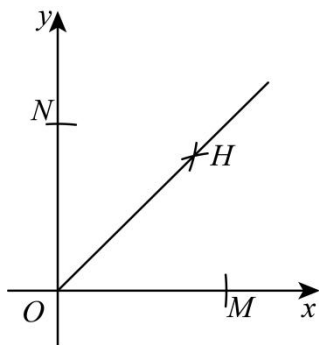
【解析】

【分析】本题考查了科学记数法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数. 确定  $n$  的值时, 要看把原数变成  $a$  时, 小数点移动了多少位,  $n$  的绝对值大于 1 与小数点移动的位数相同.

【详解】解:  $7416.7 \text{ 万} = 74167000 = 7.4167 \times 10^7$ ,

故答案为:  $7.4167 \times 10^7$

12. 如图, 在平面直角坐标系中, 以点  $O$  为圆心, 适当长为半径画弧, 交  $x$  轴正半轴于点  $M$ , 交  $y$  轴正半轴于点  $N$ , 再分别以点  $M, N$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2}MN$  的长为半径画弧, 两弧在第一象限交于点  $H$ , 画射线  $OH$ , 若  $H(2a-1, a+1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.



【答案】2

【解析】

【分析】此题主要考查了角平分线的尺规作图和性质，坐标与图形的性质，根据作图方法可得点  $H$  在第一象限的角平分线上，根据角平分线的性质和第一象限内点的坐标符号可得答案.

【详解】解：根据作图方法可得点  $H$  在第一象限角平分线上；点  $H$  横纵坐标相等且为正数；

$$\therefore 2a - 1 = a + 1,$$

解得：  $a = 2$ ,

故答案为：2.

13. 在函数  $y = \frac{1}{\sqrt{3+x}} + \frac{1}{x+2}$  中，自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x > -3$  且  $x \neq -2$

【解析】

【分析】本题考查了求自变量的取值范围，根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件列出不等式组解答即可求解，掌握二次根式有意义的条件和分式有意义的条件是解题的关键.

【详解】解：由题意可得， 
$$\begin{cases} 3+x > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases},$$

解得  $x > -3$  且  $x \neq -2$ ,

故答案为：  $x > -3$  且  $x \neq -2$ .

14. 若圆锥的底面半径是 1cm，它的侧面展开图的圆心角是直角，则该圆锥的高为\_\_\_\_\_cm.

【答案】  $\sqrt{15}$

【解析】

【分析】本题考查了圆锥的计算. 设圆锥的母线长为  $R$ ，根据圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到  $2\pi \cdot 1 = \frac{90\pi R}{180}$ ，然后解方程即可得母线长，然后利用勾股定理求得圆锥的高即可.

【详解】解：设圆锥的母线长为  $R$ ,

$$\text{根据题意得 } 2\pi \cdot 1 = \frac{90\pi R}{180},$$

解得:  $R = 4$ .

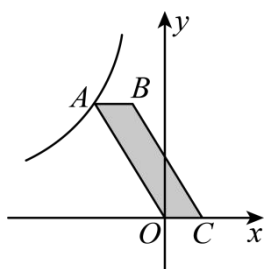
即圆锥的母线长为  $4\text{cm}$ ,

$$\therefore \text{圆锥的高} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \text{ cm},$$

故答案是:  $\sqrt{15}$ .

15. 如图, 反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x < 0)$  的图象经过平行四边形  $ABCO$  的顶点  $A$ ,  $OC$  在  $x$  轴上, 若点  $B(-1, 3)$ ,

$S_{\square ABCO} = 3$ , 则实数  $k$  的值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $-6$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数, 根据  $A, B$  的纵坐标相同以及点  $A$  在反比例函数上得到  $A$  的坐标, 进而用代数式表达  $AB$  的长度, 然后根据  $S_{\square ABCO} = 3$  列出一元一次方程求解即可.

【详解】  $\because ABCO$  是平行四边形

$\therefore A, B$  纵坐标相同

$\because B(-1, 3)$

$\therefore A$  的纵坐标是  $3$

$\because A$  在反比例函数图像上

$\therefore$  将  $y = 3$  代入函数中, 得到  $x = \frac{k}{3}$

$\therefore A\left(\frac{k}{3}, 3\right)$

$\therefore |AB| = -1 - \frac{k}{3}$

$\because S_{\square ABCO} = 3, B$  的纵坐标为  $3$

$$\therefore |AB| \times 3 = 3$$

$$\text{即: } \left(-1 - \frac{k}{3}\right) \times 3 = 3$$

$$\text{解得: } k = -6$$

故答案为:  $-6$ .

16. 已知矩形纸片  $ABCD$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 4$ , 点  $P$  在边  $BC$  上, 连接  $AP$ , 将  $\triangle ABP$  沿  $AP$  所在的直线折叠, 点  $B$  的对应点为  $B'$ , 把纸片展平, 连接  $BB'$ ,  $CB'$ , 当  $BCB'$  为直角三角形时, 线段  $CP$  的长为 \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{2}$  或  $2$

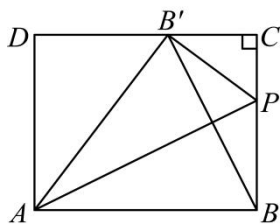
【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质, 折叠的性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定和性质, 分两种情况进行讨论: 当  $\angle BCB' = 90^\circ$  时, 当  $\angle BB'C = 90^\circ$ , 分别画出图形, 求出结果即可.

【详解】 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  为矩形,

$$\therefore \angle BCD = \angle ADC = \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ, \quad AB = CD = 5, \quad AD = BC = 4,$$

当  $\angle BCB' = 90^\circ$  时, 如图所示:



$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$  点  $B'$  在  $CD$  上,

根据折叠可知:  $AB' = AB = 5$ ,  $BP = B'P$ ,

设  $CP = x$ , 则  $BP = B'P = 4 - x$ ,

$$\therefore DB' = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$CB' = DC - DB' = 5 - 3 = 2,$$

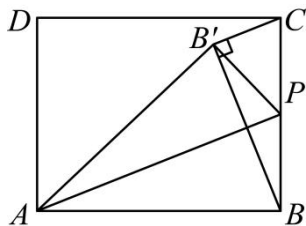
在  $\text{Rt}\triangle CB'P$  中, 根据勾股定理得:  $B'P^2 = B'C^2 + CP^2$ ,

$$\text{即 } (4 - x)^2 = 2^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2},$$

即  $CP = \frac{3}{2}$ ;

当  $\angle BB'C = 90^\circ$ ，如图所示：



根据折叠可知：  $BP = B'P$ ，

$$\therefore \angle PBB' = \angle PB'B,$$

$$\because \angle PBB' + \angle BCB' = 90^\circ, \quad \angle PB'B + \angle PB'C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCB' = \angle CB'P,$$

$$\therefore PC = PB',$$

$$\therefore PC = PB,$$

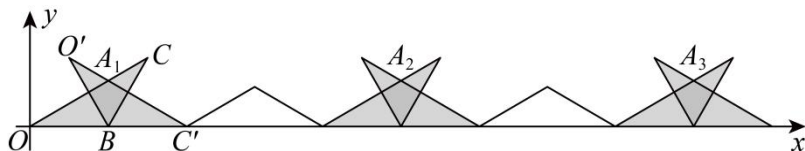
$$\because BC = BP + PC = 4,$$

$$\therefore CP = 2;$$

综上所述可知：  $CP = \frac{3}{2}$  或 2.

故答案为：  $\frac{3}{2}$  或 2,

17. 如图，数学活动小组在用几何画板绘制几何图形时，发现了如“花朵”形的美丽图案，他们将等腰三角形  $OBC$  置于平面直角坐标系中，点  $O$  的坐标为  $(0,0)$ ，点  $B$  的坐标为  $(1,0)$ ，点  $C$  在第一象限， $\angle OBC = 120^\circ$ 。将  $\triangle OBC$  沿  $x$  轴正方向作无滑动滚动，使它的三边依次与  $x$  轴重合，第一次滚动后，点  $O$  的对应点为  $O'$ ，点  $C$  的对应点为  $C'$ ， $OC$  与  $O'C'$  的交点为  $A_1$ ，称点  $A_1$  为第一个“花朵”的花心，点  $A_2$  为第二个“花朵”的花心；……；按此规律， $\triangle OBC$  滚动 2024 次后停止滚动，则最后一个“花朵”的花心的坐标为\_\_\_\_\_。



【答案】  $\left(1349 + 674\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】

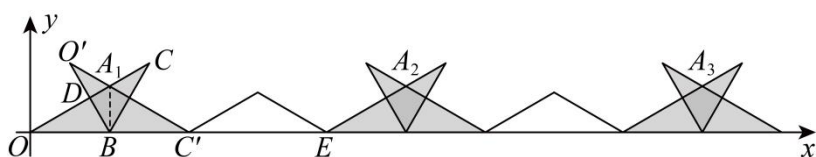
【分析】 本题考查了解直角三角形，等腰直角的性质，点的坐标规律探索. 连接  $A_1B$ ，求得  $A_1B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$OD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $OC = \sqrt{3}$ ，分别得到  $A_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ， $A_2\left(3 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ， $A_3\left(5 + 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，，推导得到

$A_n\left(1 + (n-1)(2 + \sqrt{3}), \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ， $\triangle OBC$  滚动一次得到  $A_1$ ， $\triangle OBC$  滚动四次得到  $A_2$ ， $\triangle OBC$  滚动七次得

到  $A_3$ ，由此得到  $\triangle OBC$  滚动 2024 次后停止滚动，则  $n = (2024 + 1) \div 3 = 675$ ，据此求解即可.

【详解】 解：连接  $A_1B$ ，



由题意得  $\angle BOC = \angle BCO = 30^\circ$ ， $\angle BO'C = \angle BC'O' = 30^\circ$ ， $OB = BC = O'B = BC' = 1$ ，

$\therefore A_1B \perp OC'$ ，

$\therefore A_1B = OB \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $BD = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}$ ， $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore OC = C'E = \sqrt{3}$ ，

$\therefore A_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

$A_2\left(3 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

同理  $A_3\left(5 + 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

，

$A_n\left(1 + (n-1)(2 + \sqrt{3}), \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

$\triangle OBC$  滚动一次得到  $A_1$ ， $\triangle OBC$  滚动四次得到  $A_2$ ， $\triangle OBC$  滚动七次得到  $A_3$ ，

$\therefore \triangle OBC$  滚动 2024 次后停止滚动，则  $n = (2024 + 1) \div 3 = 675$  时， $A_{675}\left(1349 + 674\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

故答案为：  $\left(1349+674\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

### 三、解答题(本题共 7 道大题，共 69 分)

18. (1) 计算：  $\sqrt{4} + |-4\cos 60^\circ| - (\pi - 5)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(2) 分解因式：  $2a^3 - 8ab^2$

**【答案】** (1) 7； (2)  $2a(a+2b)(a-2b)$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了实数的混合运算，因式分解；

(1) 根据算术平方根，特殊角的三角函数值，零指数幂，负整数指数幂，进行计算即可求解；

(2) 先提公因式  $2a$ ，进而根据平方差公式因式分解，即可求解.

**【详解】** (1) 解：原式  $= 2 + 4 \times \frac{1}{2} - 1 + 4$

$$= 2 + 2 - 1 + 4$$

$$= 7;$$

(2) 解：原式  $= 2a(a^2 - 4b^2)$

$$= 2a(a+2b)(a-2b)$$

19. 解方程：  $x^2 - 5x + 6 = 0$

**【答案】**  $x_1 = 2, x_2 = 3$

**【解析】**

**【分析】** 利用因式分解的方法解出方程即可.

**【详解】** 利用因式分解法求解可得.

解：  $\because x^2 - 5x + 6 = 0,$

$$\therefore (x-2)(x-3) = 0,$$

则  $x-2=0$  或  $x-3=0,$

解得  $x_1 = 2, x_2 = 3.$

**【点睛】** 本题考查解一元二次方程因式分解法,关键在于熟练掌握因式分解的方法步骤.

20. 为提高学生的环保意识，某校举行了“爱护环境，人人有责”环保知识竞赛，对收集到的数据进行了整理、描述和分析.

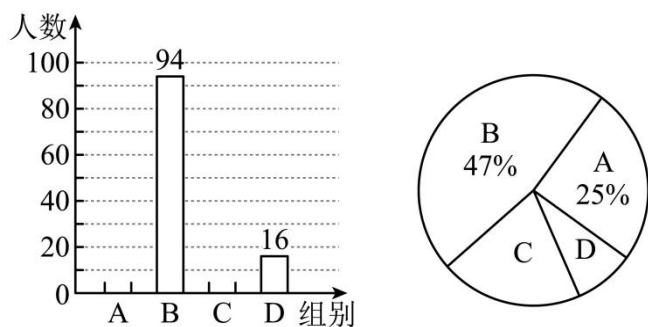
**【收集数据】** 随机抽取部分学生的竞赛成绩组成一个样本.

【整理数据】将学生竞赛成绩的样本数据分成  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  四组进行整理.

(满分 100 分, 所有竞赛成绩均不低于 60 分)如下表:

| 组别          | $A$              | $B$              | $C$              | $D$                  |
|-------------|------------------|------------------|------------------|----------------------|
| 成绩( $x$ /分) | $60 \leq x < 70$ | $70 \leq x < 80$ | $80 \leq x < 90$ | $90 \leq x \leq 100$ |
| 人数(人)       | $m$              | 94               | $n$              | 16                   |

【描述数据】根据竞赛成绩绘制了如下两幅不完整的统计图.



【分析数据】根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 填空:  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 扇形统计图中,  $C$  组对应的圆心角的度数是  $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ;
- (4) 若竞赛成绩 80 分以上(含 80 分)为优秀, 请你估计该校参加竞赛的 2000 名学生中成绩为优秀的人数.

【答案】(1) 50, 40;

(2) 补图见解析; (3) 72;

(4) 560.

【解析】

【分析】(1) 根据  $B$  组人数及其百分比求出抽取的学生人数, 进而可求出  $m$ 、 $n$  的值;

(2) 根据 (1) 中  $m$ 、 $n$  的值补图即可;

(3) 用  $360^\circ$  乘以  $C$  组人数的占比即可求解;

(4) 用 2000 乘以 80 分以上(含 80 分)的人数占比即可求解;

本题考查了条形统计图和扇形统计图, 统计表, 样本估计总体, 看懂统计图是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 抽取的学生人数为  $94 \div 47\% = 200$  人,

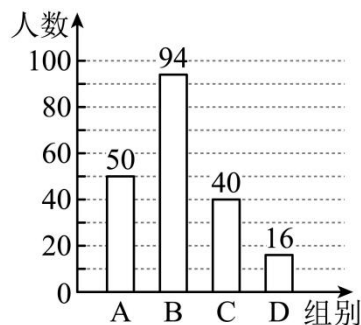
$\therefore m = 200 \times 25\% = 50$ ,

$$\therefore n = 200 - 50 - 94 - 16 = 40,$$

故答案为：50，40；

【小问2详解】

解：补全条形统计图如下：



【小问3详解】

$$\text{解： } 360^\circ \times \frac{40}{200} = 72^\circ,$$

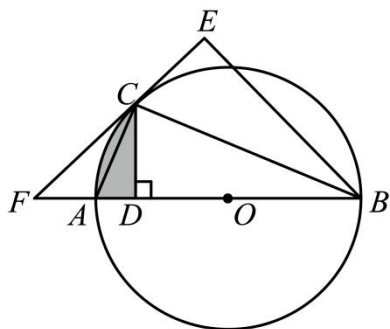
故答案为：72；

【小问4详解】

$$\text{解： } 2000 \times \frac{40+16}{200} = 560,$$

答：估计该校参加竞赛的2000名学生中成绩为优秀的人数大约是560人。

21. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $CD \perp AB$ 于点 $D$ ，将 $\triangle CDB$ 沿 $BC$ 所在的直线翻折，得到 $\triangle CEB$ ，点 $D$ 的对应点为 $E$ ，延长 $EC$ 交 $BA$ 的延长线于点 $F$ 。



(1) 求证： $CF$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\sin \angle CFB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $AB = 8$ ，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) 见解析 (2)  $2\pi - 4$

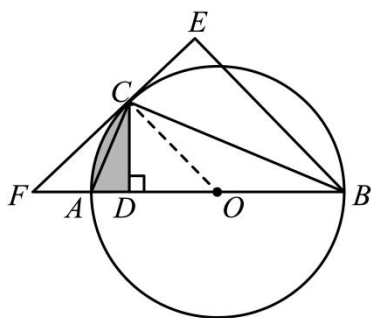
【解析】

【分析】(1) 连接 $OC$ ，由折叠的性质得 $\angle DBC = \angle EBC$ ， $\angle BEC = \angle CDB = 90^\circ$ ，再证明 $OC \parallel BE$ ，推出 $FC \perp OC$ ，据此即可证明 $CF$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 先求得 $\angle CFB = 45^\circ$ ，在 $Rt\triangle COD$ 中，求得 $CD = OD = 2\sqrt{2}$ ，再利用扇形面积公式求解即可。

## 【小问 1 详解】

证明：连接  $OC$ ，



$\because CD \perp AB$  ,  
 $\therefore \angle CDB = 90^\circ$  ,  
 $\because \triangle CDB$  沿直线  $BC$  翻折得到  $\triangle CEB$  ,  
 $\therefore \angle DBC = \angle EBC$  ,  $\angle BEC = \angle CDB = 90^\circ$  ,  
 $\because OB, OC$  是  $\odot O$  的半径,  
 $\therefore OB = OC$  ,  
 $\therefore \angle OCB = \angle OBC$  ,  
 $\therefore \angle EBC = \angle OCB$  ,  
 $\therefore OC \parallel BE$  ,  
 $\therefore \angle FCO = \angle BEC = 90^\circ$  ,  
 $\therefore FC \perp OC$  于点  $C$  ,  
 又  $\because OC$  为  $\odot O$  的半径,  
 $\therefore CF$  是  $\odot O$  的切线;

## 【小问 2 详解】

解:  $\because \sin \angle CFB = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  
 $\therefore \angle CFB = 45^\circ$  ,  
 由 (1) 得  $\angle FCO = 90^\circ$  ,  
 $\therefore \angle FOC = 90^\circ - \angle CFB = 45^\circ$  ,  
 $\because CD \perp AB$  ,  
 $\therefore \angle CDO = 90^\circ$  ,  
 $\therefore AB = 8$  ,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

在  $\text{Rt}\triangle COD$  中,  $\angle AOC = 45^\circ$ ,

$$\therefore CD = OD = OC \sin \angle AOC = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

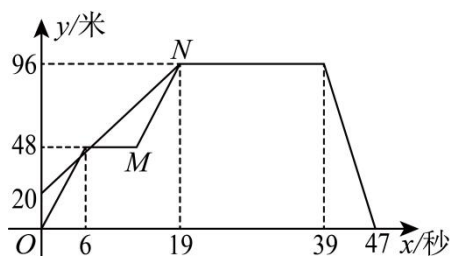
$$\therefore S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}OD \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4,$$

$$\therefore S_{\text{扇形}AOC} = \frac{45}{360} \times \pi \times 4^2 = 2\pi,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}AOC} - S_{\triangle COD} = 2\pi - 4.$$

【点睛】本题考查了切线的判定与扇形面积公式, 折叠的性质, 解直角三角形. 充分运用圆的性质, 综合三角函数相关概念, 求得线段长度是解题的关键.

22. 领航无人机表演团队进行无人机表演训练, 甲无人机以  $a$  米/秒的速度从地面起飞, 乙无人机从距离地面 20 米高的楼顶起飞, 甲、乙两架无人机同时匀速上升, 6 秒时甲无人机到达训练计划指定的高度停止上升开始表演, 完成表演动作后, 按原速继续飞行上升, 当甲、乙无人机按照训练计划准时到达距离地面的高度为 96 米时, 进行了时长为  $t$  秒的联合表演, 表演完成后以相同的速度大小同时返回地面. 甲、乙两架无人机所在的位置距离地面的高度  $y$ (米)与无人机飞行的时间  $x$ (秒)之间的函数关系如图所示. 请结合图象解答下列问题:



- (1)  $a =$  \_\_\_\_\_ 米/秒,  $t =$  \_\_\_\_\_ 秒;
- (2) 求线段  $MN$  所在直线的函数解析式;
- (3) 两架无人机表演训练到多少秒时, 它们距离地面的高度差为 12 米? (直接写出答案即可)

【答案】(1) 8, 20

(2)  $y = 8x - 56$ ;

(3) 2 秒或 10 秒或 16 秒.

【解析】

【分析】本题主要考查求一次函数的应用, 熟练掌握待定系数法求一次函数的解析式是解题的关键.

- (1) 根据图形计算即可求解;

(2) 先求得甲无人机单独表演所用时间为  $19 - 12 = 7$  秒, 得到  $M(13, 48)$ , 利用待定系数法即可求解;

(3) 利用待定系数法分别求得线段  $OB$ 、线段  $AN$ 、线段  $BM$  所在直线的函数解析式, 再分三种情况讨论, 列式计算即可求解

### 【小问 1 详解】

解: 由题意得甲无人机的速度为  $a = 48 \div 6 = 8$  米/秒,

$$t = 39 - 19 = 20,$$

故答案为: 8, 20;

### 【小问 2 详解】

解: 由图象知,  $N(19, 96)$ ,

$\therefore$  甲无人机的速度为 8 米/秒,

甲无人机匀速从 0 米到 96 米所用时间为  $96 \div 8 = 12$  秒,

甲无人机单独表演所用时间为  $19 - 12 = 7$  秒,

$$\therefore 6 + 7 = 13 \text{ 秒},$$

$$\therefore M(13, 48),$$

设线段  $MN$  所在直线的函数解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\text{将 } M(13, 48), N(19, 96) \text{ 代入得 } \begin{cases} 48 = 13k + b \\ 96 = 19k + b \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 8 \\ b = -56 \end{cases},$$

$\therefore$  线段  $MN$  所在直线的函数解析式为  $y = 8x - 56$ ;

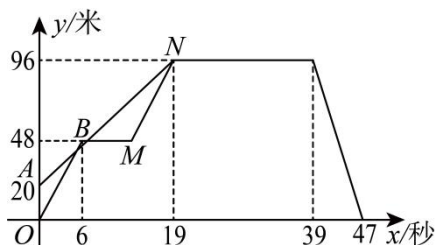
### 【小问 3 详解】

解: 由题意  $A(0, 20)$ ,  $B(6, 48)$ ,

同理线段  $OB$  所在直线的函数解析式为  $y = 8x$ ,

线段  $AN$  所在直线的函数解析式为  $y = 4x + 20$ ,

线段  $BM$  所在直线的函数解析式为  $y = 48$ ,



当  $0 \leq t \leq 6$  时，由题意得  $|4x + 20 - 8x| = 12$ ，

解得  $x = 2$  或  $x = 8$ （舍去），

当  $6 < t \leq 13$  时，由题意得  $|4x + 20 - 48| = 12$ ，

解得  $x = 10$  或  $x = 4$ （舍去），

当  $13 < t \leq 19$  时，由题意得  $|8x - 56 - 4x - 20| = 12$ ，

解得  $x = 16$  或  $x = 22$ （舍去），

综上，两架无人机表演训练到 2 秒或 10 秒或 16 秒时，它们距离地面的高度差为 12 米。

23. 综合与实践：如图 1，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”，受这幅图的启发，数学兴趣小组建立了“一线三直角模型”。如图 2，在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ，将线段  $BC$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $BD$ ，作  $DE \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $E$ 。

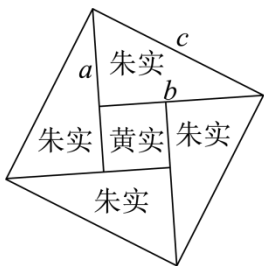


图1

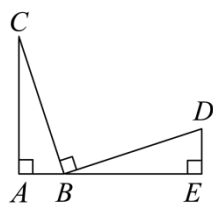


图2

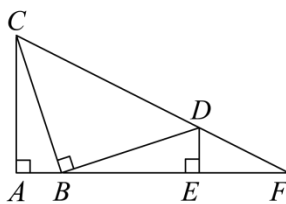


图3

- (1) 【观察感知】如图 2，通过观察，线段  $AB$  与  $DE$  的数量关系是\_\_\_\_\_；
- (2) 【问题解决】如图 3，连接  $CD$  并延长交  $AB$  的延长线于点  $F$ ，若  $AB = 2$ ， $AC = 6$ ，求  $\triangle BDF$  的面积；
- (3) 【类比迁移】在(2)的条件下，连接  $CE$  交  $BD$  于点  $N$ ，则  $\frac{BN}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (4) 【拓展延伸】在(2)的条件下，在直线  $AB$  上找点  $P$ ，使  $\tan \angle BCP = \frac{2}{3}$ ，请直接写出线段  $AP$  的长度。

【答案】(1)  $AB = DE$

(2) 10 (3)  $\frac{9}{13}$

(4)  $\frac{54}{7}$  或  $\frac{18}{11}$

【解析】

【分析】(1) 根据旋转的性质可得  $\angle CBD = 90^\circ$ ,  $CB = BD$ , 进而证明  $\triangle ABC \cong \triangle EDB$  (AAS), 即可求解;

(2) 根据 (1) 的方法证明  $\triangle ABC \cong \triangle EDB$  (AAS), 进而证明  $\triangle DEF \sim \triangle CAF$ , 求得  $EF = 4$ , 则  $BF = 10$ , 然后根据三角形的面积公式, 即可求解.

(3) 过点  $N$  作  $NM \perp AF$  于点  $M$ , 证明  $\triangle ABC \sim \triangle MNB$  得出  $MN = \frac{1}{3}BM$ , 证明  $\triangle EMN \sim \triangle ECA$ , 设  $BM = x$ , 则  $ME = BE - BM = 6 - x$ , 代入比例式, 得出  $x = \frac{54}{13}$ , 进而即可求解;

(4) 当  $P$  在  $B$  点的左侧时, 过点  $P$  作  $PQ \perp BC$  于点  $Q$ , 当  $P$  在  $B$  点的右侧时, 过点  $P$  作  $PT \perp BC$  交  $CB$  的延长线于点  $T$ , 分别解直角三角形, 即可求解.

### 【小问 1 详解】

解:  $\because$  将线段  $BC$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $BD$ , 作  $DE \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $E$ .

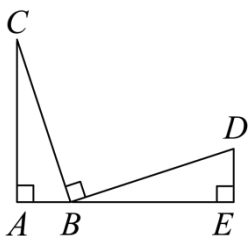


图2

$$\because \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ACB,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle DEB = 90^\circ \text{ 且 } CB = BD$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DE = AB;$$

### 【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ACB,$$

又 $\because \angle A = \angle DEB = 90^\circ$  且  $CB = BD$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDB$  (AAS),

$\therefore DE = AB$ ,  $BE = AC$

$\because AB = 2$ ,  $AC = 6$

$\therefore DE = 2$ ,  $BE = 6$

$\therefore AE = AB + BE = 2 + 6 = 8$ ,

$\because \angle DEB + \angle A = 180^\circ$

$\therefore DE \parallel AC$ ,

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CAF$ ,

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{FA}$$

$$\therefore \frac{2}{6} = \frac{EF}{EF + 8}$$

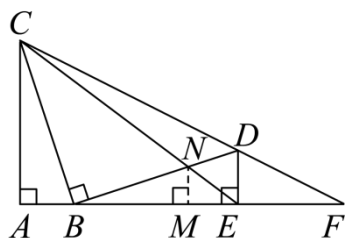
$\therefore EF = 4$ ,

$\therefore BF = BE + EF = 6 + 4 = 10$ ,

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10;$$

【小问3详解】

解：如图所示，过点  $N$  作  $NM \perp AF$  于点  $M$ ，



$\because \angle A = \angle BMN = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = \angle NBM$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle MNB$

$$\therefore \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AC} = \frac{MN}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{6} = \frac{MN}{2}, \text{ 即 } MN = \frac{1}{3}BM,$$

又 $\because MN \parallel AC$

$\therefore \triangle EMN \sim \triangle ECA$

$$\therefore \frac{ME}{AE} = \frac{MN}{AC},$$

设  $BM = x$ , 则  $ME = BE - BM = 6 - x$ ,

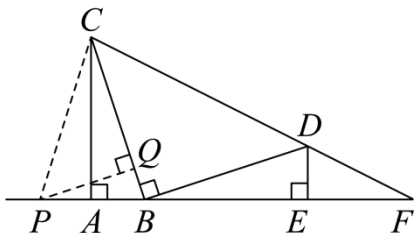
$$\frac{6-x}{8} = \frac{\frac{1}{3}x}{6}$$

$$\text{解得: } x = \frac{54}{13}$$

$$\therefore \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AC} = \frac{\frac{54}{13}}{6} = \frac{9}{13};$$

【小问4 详解】

解：如图所示，当  $P$  在  $B$  点的左侧时，过点  $P$  作  $PQ \perp BC$  于点  $Q$



$$\therefore \tan \angle BCP = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan \angle BCP = \frac{PQ}{CQ} = \frac{2}{3}, \text{ 设 } PQ = 2a, \text{ 则 } CQ = 3a,$$

$$\text{又} \because AC = 6, AB = 2, \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{2} = 3, \quad BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \tan \angle PBQ = \frac{PQ}{BQ} = 3$$

$$\therefore BQ = \frac{1}{3}PQ = \frac{2}{3}a$$

$$\therefore BC = CQ + BQ = \frac{2}{3}a + 3a = \frac{11}{3}a$$

$$\therefore \frac{11}{3}a = 2\sqrt{10},$$

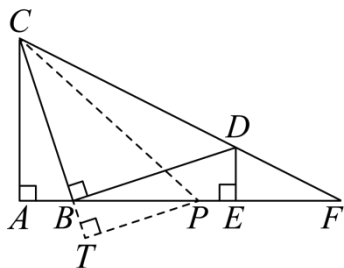
$$\text{解得: } a = \frac{6\sqrt{10}}{11}$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBQ \text{ 中, } PQ = 2a, BQ = \frac{2}{3}a$$

$$\therefore PB = \sqrt{PQ^2 + BQ^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}a = \frac{2\sqrt{10}}{3} \times \frac{6\sqrt{10}}{11} = \frac{40}{11}$$

$$\therefore AP = PB - AB = \frac{40}{11} - 2 = \frac{18}{11}$$

如图所示，当  $P$  在  $B$  点的右侧时，过点  $P$  作  $PT \perp BC$  交  $CB$  的延长线于点  $T$ ，



$$\because \angle ABC = \angle PBT, \angle A = \angle T = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BPT = \angle ACB$$

$$\because \tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \angle BPT = \frac{BT}{PT} = \tan \angle ACB = \frac{1}{3}$$

设  $BT = b$ ，则  $PT = 3b$ ， $BP = \sqrt{10}b$ ，

$$\because \tan \angle BCP = \frac{PT}{CT} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{3b}{b + 2\sqrt{10}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{解得： } b = \frac{4\sqrt{10}}{7}$$

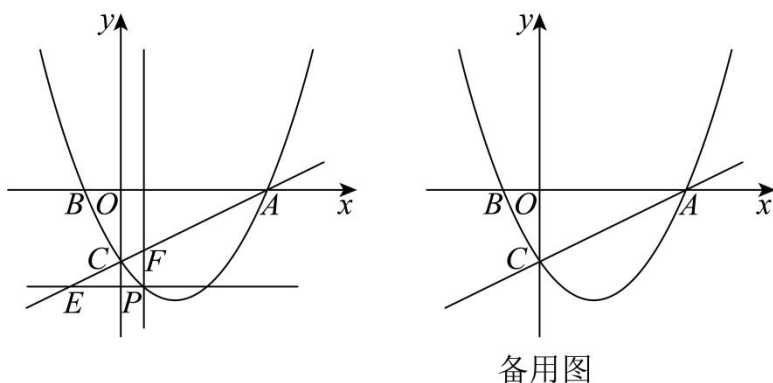
$$\therefore BP = \sqrt{10}b = \frac{40}{7}$$

$$\therefore AP = AB + BP = 2 + \frac{40}{7} = \frac{54}{7}$$

综上所述， $AP = \frac{54}{7}$  或  $\frac{18}{11}$ 。

**【点睛】** 本题考查了全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，解直角三角形，旋转的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键。

24. 综合与探究：如图，在平面直角坐标系中，已知直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，过  $A$ ， $C$  两点的抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴的另一个交点为点  $B(-1, 0)$ ，点  $P$  是抛物线位于第四象限图象上的动点，过点  $P$  分别作  $x$  轴和  $y$  轴的平行线，分别交直线  $AC$  于点  $E$ ，点  $F$ 。



- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 点  $D$  是  $x$  轴上的任意一点, 若  $\triangle ACD$  是以  $AC$  为腰的等腰三角形, 请直接写出点  $D$  的坐标;
- (3) 当  $EF = AC$  时, 求点  $P$  的坐标;
- (4) 在(3)的条件下, 若点  $N$  是  $y$  轴上的一个动点, 过点  $N$  作抛物线对称轴的垂线, 垂足为  $M$ , 连接  $NA$ ,  $MP$ , 则  $NA + MP$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【答案】(1)  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

(2)  $D_1(-4, 0), D_2(4 + 2\sqrt{5}, 0), D_3(4 - 2\sqrt{5}, 0)$

(3)  $P(2, -3)$

(4)  $\frac{3\sqrt{13}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数解析式、二次函数与几何的综合等知识点, 掌握数形结合思想成为解题的关键.

- (1) 先根据题意确定点  $A$ 、 $C$  的坐标, 然后运用待定系数法求解即可;
- (2) 分三种情况分别画出图形, 然后根据等腰三角形的定义以及坐标与图形即可解答;
- (3) 先证明  $\triangle AOC \cong \triangle EPF$  (ASA) 可得  $PF = OC = 2$ , 设  $P\left(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2\right)$  ( $0 < m < 4$ ), 则  $F\left(m, \frac{1}{2}m - 2\right)$ , 可得  $PF = -\frac{1}{2}m^2 + 2m$ , 即  $-\frac{1}{2}m^2 + 2m = 2$ , 求得可得  $m$  的值, 进而求得点  $P$  的坐标;
- (4) 如图: 将线段  $NA$  向右平移  $\frac{3}{2}$  单位得到  $MG$ , 即四边形  $MNAG$  是平行四边形, 可得  $NA = MG, AG = MN = \frac{3}{2}$ , 即  $G\left(\frac{11}{2}, 0\right)$ , 作  $P(2, -3)$  关于对称轴  $x = \frac{3}{2}$  的点  $P_1(1, -3)$ , 则  $MP = MP_1$ , 由两

点间的距离公式可得  $PG = \frac{3\sqrt{13}}{2}$ ，再根据三角形的三边关系可得  $NA + MP = MG + MP_1 \geq P_1G = \frac{3\sqrt{13}}{2}$  即可解答.

### 【小问 1 详解】

解：∵ 直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，

∴ 当  $y = 0$  时， $x = 4$ ，即  $A(4, 0)$ ；当  $x = 0$  时， $y = -2$ ，即  $C(0, -2)$ ；

∴  $B(-1, 0)$ ，

∴ 设抛物线的解析式为  $y = a(x+1)(x-4) (a \neq 0)$ ，

把  $C(0, -2)$  代入可得：  $-2 = a(0+1)(0-4)$ ，解得：  $a = \frac{1}{2}$ ，

∴  $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-4) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ ，

∴ 抛物线的解析式为：  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ 。

### 【小问 2 详解】

解：∵  $A(4, 0)$ ， $C(0, -2)$ ，

∴  $OC = 2, OA = 4$ ，

∴  $AC = \sqrt{OC^2 + AB^2} = 2\sqrt{5}$ ，

如图：当  $CD_1 = AC = 2\sqrt{5}$ ， $OC \perp AD_1$ ，

∴  $OD_1 = OA = 4$ ，即  $D_1(-4, 0)$ ；

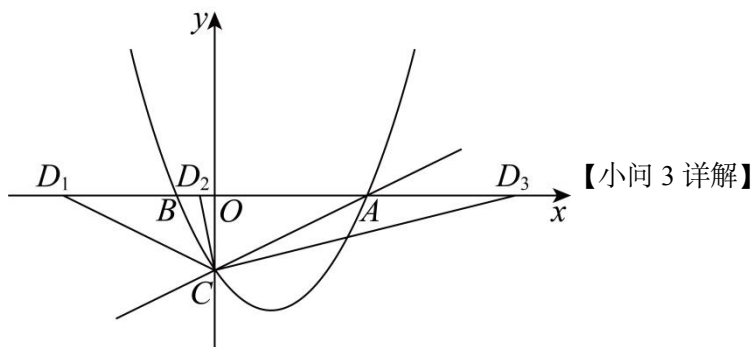
如图：当  $AD_2 = AC = 2\sqrt{5}$ ，

∴  $OD_2 = AD_2 - AC = 2\sqrt{5} - 4$ ，即  $D_2(4 - 2\sqrt{5}, 0)$ ；

如图：当  $AD_3 = AC = 2\sqrt{5}$ ，

∴  $OD_3 = AD_3 + AC = 2\sqrt{5} + 4$ ，即  $D_3(4 + 2\sqrt{5}, 0)$ ；

综上，点  $D$  的坐标为  $D_1(-4, 0)$ ， $D_2(4 - 2\sqrt{5}, 0)$ ， $D_3(4 + 2\sqrt{5}, 0)$ 。



解：如图： $\because PE \parallel x$  轴，

$$\therefore \angle PEA = \angle OAC,$$

$\because PF \parallel y$  轴，

$$\therefore \angle PFE = \angle OCA,$$

$$\because EF = AC,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle EPF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PF = OC = 2,$$

$$\because \text{设 } P\left(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2\right) (0 < m < 4), \text{ 则 } F\left(m, \frac{1}{2}m - 2\right),$$

$$\therefore PF = \frac{1}{2}m - 2 - \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2\right) = -\frac{1}{2}m^2 + 2m,$$

$$\therefore -\frac{1}{2}m^2 + 2m = 2, \text{ 解得: } m = 2 \text{ (负值舍去)},$$

$$\text{当 } m = 2 \text{ 时, } \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{3}{2} \times 2 - 2 = -3,$$

$$\therefore P(2, -3).$$

**【小问 4 详解】**

$$\text{解: } \because \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为: 直线 } x = \frac{3}{2},$$

如图：将线段  $NA$  向右平移  $\frac{3}{2}$  单位得到  $MG$ ，

$\therefore$  四边形  $MNAG$  是平行四边形，

$$\therefore NA = MG, AG = MN = \frac{3}{2}, \text{ 即 } G\left(\frac{11}{2}, 0\right),$$

作  $P(2, -3)$  关于对称轴  $x = \frac{3}{2}$  的点  $P_1(1, -3)$ , 则  $MP = MP_1$

$$\therefore P_1G = \sqrt{\left(1 - \frac{11}{2}\right)^2 + (-3 - 0)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore NA + MP = MG + MP_1 \geq P_1G = \frac{3\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore NA + MP \text{ 的最小值为 } \frac{3\sqrt{13}}{2}.$$

故答案为  $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ .

