

二〇二四年绥化市初中毕业学业考试

数学试题

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟
2. 本试题共三道大题，28 个小题，总分 120 分
3. 所有答案都必须写在答题卡上所对应的题号后的指定区域内

一、单项选择题（本题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

请在答题卡上用 2B 铅笔将你的选项所对应的方框涂黑

1. 实数 $-\frac{1}{2025}$ 的相反数是（ ）

- A. 2025 B. -2025 C. $-\frac{1}{2025}$ D. $\frac{1}{2025}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解题的关键.

【详解】解：实数 $-\frac{1}{2025}$ 的相反数是 $\frac{1}{2025}$ ，

故选：D.

2. 下列所述图形中，是轴对称图形但不是中心对称图形的是（ ）

- A. 圆 B. 菱形 C. 平行四边形 D. 等腰三角形

【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念进行判断即可.

【详解】A、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误；

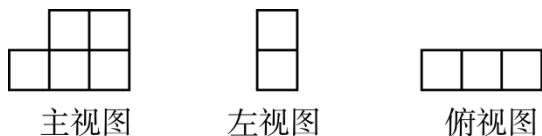
C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项正确，

故选 D.

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念.辨别轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；.辨别中心对称图形的关键是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

3. 某几何体是由完全相同的小正方体组合而成，下图是这个几何体的三视图，那么构成这个几何体的小正方体的个数是（ ）



- A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题主考查了三视图，由主视图易得这个几何体共有 2 层，由俯视图可得第一层立方体的个数，由主视图和左视图可得第二层立方体的个数，相加即可.

【详解】 解：由三视图易得最底层有 3 个正方体，第二层有 2 个正方体，那么共有 $3+2=5$ 个正方体组成. 故选：A.

4. 若式子 $\sqrt{2m-3}$ 有意义，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \leq \frac{2}{3}$ B. $m \geq -\frac{3}{2}$ C. $m \geq \frac{3}{2}$ D. $m \leq -\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，根据题意可得 $2m-3 \geq 0$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 式子 $\sqrt{2m-3}$ 有意义，

$$\therefore 2m-3 \geq 0,$$

$$\text{解得： } m \geq \frac{3}{2},$$

故选：C.

5. 下列计算中，结果正确的是 ()

- A. $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$ B. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
C. $\sqrt{9} = \pm 3$ D. $(-x^2y)^3 = x^6y^3$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂，完全平方公式，算术平方根，积的乘方，据此逐项分析计算，即可求解.

【详解】 解：A. $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$ ，故该选项正确，符合题意；

B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

C. $\sqrt{9} = 3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $(-x^2y)^3 = -x^6y^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：A.

6. 小影与小冬一起写作业，在解一道一元二次方程时，小影在化简过程中写错了常数项，因而得到方程的两个根是6和1；小冬在化简过程中写错了一次项的系数，因而得到方程的两个根是-2和-5. 则原来的方程是()

A. $x^2 + 6x + 5 = 0$

B. $x^2 - 7x + 10 = 0$

C. $x^2 - 5x + 2 = 0$

D. $x^2 - 6x - 10 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根与系数的关系，根据题意得出原方程中 $x_1 + x_2 = 7$ ， $x_1x_2 = 10$ ，逐项分析判断，即可求解.

【详解】解：∵小影在化简过程中写错了常数项，得到方程的两个根是6和1；

$$\therefore x_1 + x_2 = 6 + 1 = 7,$$

又∵写错了一次项的系数，因而得到方程的两个根是-2和-5.

$$\therefore x_1x_2 = 10$$

A. $x^2 + 6x + 5 = 0$ 中， $x_1 + x_2 = -6$ ， $x_1x_2 = 5$ ，故该选项不符合题意；

B. $x^2 - 7x + 10 = 0$ 中， $x_1 + x_2 = 7$ ， $x_1x_2 = 10$ ，故该选项符合题意；

C. $x^2 - 5x + 2 = 0$ 中， $x_1 + x_2 = 5$ ， $x_1x_2 = 2$ ，故该选项不符合题意；

D. $x^2 - 6x - 10 = 0$ 中， $x_1 + x_2 = 6$ ， $x_1x_2 = -10$ ，故该选项不符合题意；

故选：B.

7. 某品牌女运动鞋专卖店，老板统计了一周内不同鞋码运动鞋的销售量如表：

鞋码	36	37	38	39	40
平均每天销售量/双	10	12	20	12	12

如果每双鞋的利润相同，你认为老板最关注的销售数据是下列统计量中的 ()

A. 平均数

B. 中位数

C. 众数

D. 方差

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查统计的有关知识，了解平均数、中位数、众数、方差的意义；平均数、中位数、众数是描述一组数据集中程度的统计量；方差是描述一组数据离散程度的统计量．销量大的尺码就是这组数据的众数．

【详解】解：由于众数是数据中出现次数最多的数，故老板最关注的销售数据的统计量是众数．

故选：C．

8. 一艘货轮在静水中的航速为 40km/h ，它以该航速沿江顺流航行 120km 所用时间，与以该航速沿江逆流航行 80km 所用时间相等，则江水的流速为（ ）

- A. 5km/h B. 6km/h C. 7km/h D. 8km/h

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了分式方程的应用，利用顺水速 = 静水速 + 水速，逆水速 = 静水速 - 水速，设未知数列出方程，解方程即可求出答案．

【详解】解：设江水的流速为 $x\text{ km/h}$ ，根据题意可得：

$$\frac{120}{40+x} = \frac{80}{40-x},$$

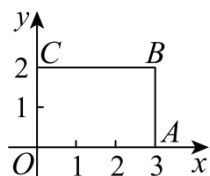
解得： $x = 8$ ，

经检验： $x = 8$ 是原方程的根，

答：江水的流速为 8km/h ．

故选：D．

9. 如图，矩形 $OABC$ 各顶点的坐标分别为 $O(0,0)$ ， $A(3,0)$ ， $B(3,2)$ ， $C(0,2)$ ，以原点 O 为位似中心，将这个矩形按相似比 $\frac{1}{3}$ 缩小，则顶点 B 在第一象限对应点的坐标是（ ）



- A. $(9,4)$ B. $(4,9)$ C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了位似图形的性质，根据题意 B 的坐标乘以 $\frac{1}{3}$ ，即可求解.

【详解】解：依题意， $B(3,2)$ ，以原点 O 为位似中心，将这个矩形按相似比 $\frac{1}{3}$ 缩小，则顶点 B 在第一象限对应点的坐标是 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$

故选：D.

10. 下列叙述正确的是 ()

- A. 顺次连接平行四边形各边中点一定能得到一个矩形
- B. 平分弦的直径垂直于弦
- C. 物体在灯泡发出的光照射下形成的影子是中心投影
- D. 相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等

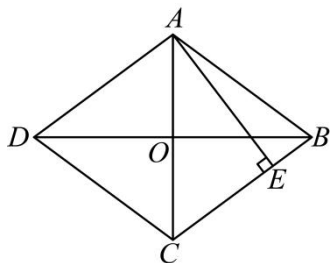
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了矩形的判定，垂径定理，中心投影，弧、弦与圆心角的关系，根据相关定理逐项分析判断，即可求解.

- 【详解】A. 顺次连接平行四边形各边中点不一定能得到一个矩形，故该选项不正确，不符合题意；
- B. 平分弦（非直径）的直径垂直于弦，故该选项不正确，不符合题意；
- C. 物体在灯泡发出的光照射下形成的影子是中心投影，故该选项正确，符合题意；
- D. 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等，故该选项不正确，不符合题意；

故选：C.

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $CD=5$ ， $BD=8$ ， $AE \perp BC$ 于点 E ，则 AE 的长是 ()

- A. $\frac{24}{5}$
- B. 6
- C. $\frac{48}{5}$
- D. 12

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理，菱形的性质，根据勾股定理求得 OC ，进而得出 $AC = 6$ ，进而根据等面积法，即可求解。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $CD = 5$ ， $BD = 8$ ，

$$\therefore DO = \frac{1}{2}BD = 4, \quad AC \perp BD, \quad BC = CD = 5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDO \text{ 中, } CO = \sqrt{DC^2 - DO^2} = 3,$$

$$\therefore AC = 2OC = 6,$$

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}AC \times BD = BC \times AE,$$

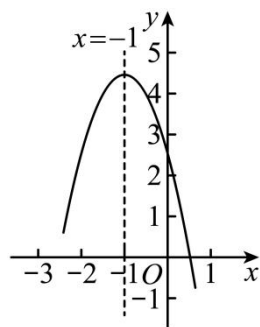
$$\therefore AE = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 6}{5} = \frac{24}{5},$$

故选：A.

12. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分图象如图所示，对称轴为直线 $x = -1$ ，则下列结论中：

① $\frac{b}{c} > 0$ ② $am^2 + bm \leq a - b$ (m 为任意实数) ③ $3a + c < 1$

④若 $M(x_1, y)$ 、 $N(x_2, y)$ 是抛物线上不同的两个点，则 $x_1 + x_2 \leq -3$ ．其中正确的结论有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象的性质，根据抛物线的开口方向，对称轴可得 $a < 0$ ， $b = 2a < 0$ 即可判断①， $x = -1$ 时，函数值最大，即可判断②，根据 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，即可判断③，根据对称性可得 $x_1 + x_2 = -2$ 即可判断④，即可求解。

【详解】解：∵ 二次函数图象开口向下

$$\therefore a < 0$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -1,$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -1$$

$$\therefore b = 2a < 0$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于正半轴，则 $c > 0$

$$\therefore \frac{b}{c} < 0, \text{ 故①错误,}$$

$\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时， y 取得最大值，最大值为 $a - b + c$

$$\therefore am^2 + bm + c \leq a - b + c \quad (m \text{ 为任意实数})$$

即 $am^2 + bm \leq a - b$ ，故②正确；

$$\therefore x = 1 \text{ 时, } y < 0$$

$$\text{即 } a + b + c < 0$$

$$\therefore b = 2a$$

$$\therefore a + 2a + c < 0$$

$$\text{即 } 3a + c < 0$$

$$\therefore 3a + c < 1, \text{ 故③正确;}$$

$\therefore M(x_1, y)$ 、 $N(x_2, y)$ 是抛物线上不同的两个点，

$\therefore M, N$ 关于 $x = -1$ 对称，

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = -1 \text{ 即 } x_1 + x_2 = -2 \text{ 故④不正确}$$

正确的有②③

故选：B

二、填空题（本题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

请在答题卡上把你的答案写在所对应的题号后的指定区域内

13. 中国的领水面积约为 $370\,000\text{ km}^2$ ，将数 $370\,000$ 用科学记数法表示为：_____.

【答案】 3.7×10^5

【解析】

【详解】科学记数法是指： $a \times 10^n$ ，且 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为原数的整数位数减一， $370000 = 3.7 \times 10^5$.

故答案为： 3.7×10^5 .

14. 分解因式： $2mx^2 - 8my^2 =$ _____.

【答案】 $2m(x+2y)(x-2y)$

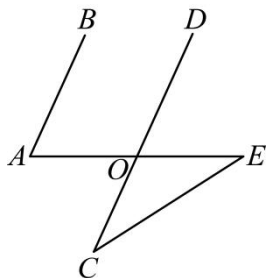
【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，先提公因式 $2m$ ，然后根据平方差公式因式分解，即可求解.

【详解】 解： $2mx^2 - 8my^2 = 2m(x^2 - 4y^2) = 2m(x+2y)(x-2y)$

故答案为： $2m(x+2y)(x-2y)$.

15. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle C = 33^\circ$ ， $OC = OE$. 则 $\angle A = \underline{\quad\quad}^\circ$.



【答案】 66

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质，等边对等角，三角形外角的性质，根据等边对等角可得 $\angle E = \angle C = 33^\circ$ ，根据三角形的外角的性质可得 $\angle DOE = 66^\circ$ ，根据平行线的性质，即可求解.

【详解】 解： $\because OC = OE$ ， $\angle C = 33^\circ$ ，

$$\therefore \angle E = \angle C = 33^\circ,$$

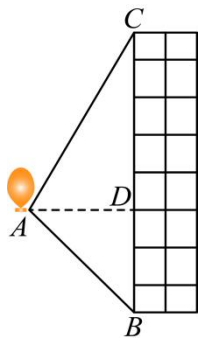
$$\therefore \angle DOE = \angle E + \angle C = 66^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle DOE = 66^\circ,$$

故答案为： 66.

16. 如图，用热气球的探测器测一栋楼的高度，从热气球上的点 A 测得该楼顶部点 C 的仰角为 60° ，测得底部点 B 的俯角为 45° ，点 A 与楼 BC 的水平距离 $AD = 50\text{m}$ ，则这栋楼的高度为 $\underline{\quad\quad}\text{m}$ (结果保留根号).



【答案】 $(50 + 50\sqrt{3}) \text{##} (50\sqrt{3} + 50)$

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形—仰角俯角问题. 注意准确构造直角三角形是解答此题的关键. 根据题意得 $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$, $AD = 50\text{m}$, 然后利用三角函数求解即可.

【详解】解: 依题意, $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$, $AD = 50\text{m}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = AD \cdot \tan 45^\circ = 50 \times 1 = 50\text{m}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD = AD \cdot \tan 60^\circ = 50 \times \sqrt{3} = 50\sqrt{3}\text{m}$,

$$\therefore BC = BD + CD = (50 + 50\sqrt{3})\text{m}.$$

故答案为: $(50 + 50\sqrt{3})$.

17. 计算: $\frac{x-y}{x} \div \left(x - \frac{2xy-y^2}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{x-y}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的混合运算. 先算括号内的减法, 把除法变成乘法, 再根据分式的乘法法则进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{x-y}{x} \div \left(x - \frac{2xy-y^2}{x}\right) \\ &= \frac{x-y}{x} \div \frac{x^2-2xy+y^2}{x} \\ &= \frac{x-y}{x} \cdot \frac{x}{(x-y)^2} \\ &= \frac{1}{x-y}, \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{x-y}$.

18. 用一个圆心角为 126° , 半径为 10cm 的扇形作一个圆锥的侧面, 这个圆锥的底面圆的半径为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

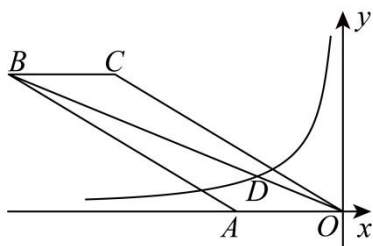
【分析】本题考查了弧长公式, 根据圆锥的底面圆的周长等于侧面的弧长, 代入数据计算, 即可求解.

【详解】解：设这个圆锥的底面圆的半径为 $R\text{cm}$ ，由题意得， $\frac{126}{180} \times 10 \times \pi = 2\pi R$

解得： $R = \frac{7}{2}\text{cm}$

故答案为： $\frac{7}{2}$.

19. 如图，已知点 $A(-7,0)$ ， $B(x,10)$ ， $C(-17,y)$ ，在平行四边形 $ABCO$ 中，它的对角线 OB 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象相交于点 D ，且 $OD:OB = 1:4$ ，则 $k =$ _____.

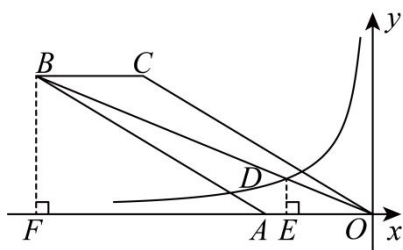


【答案】 -15

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与平行四边形综合，相似三角形的性质与判定，分别过点 B, D ，作 x 的垂线，垂足分别为 F, E ，根据平行四边形的性质得出 $B(-24,10)$ ，证明 $\triangle ODE \sim \triangle OBF$ 得出 $OE = 6$ ， $DE = 2.5$ ，进而可得 $D(-6, 2.5)$ ，即可求解.

【详解】 如图所示，分别过点 B, D ，作 x 的垂线，垂足分别为 F, E ，



$\because$ 四边形 $AOCB$ 是平行四边形，点 $A(-7,0)$ ， $B(x,10)$ ， $C(-17,y)$ ，

$\therefore OA = BC = 7$ ，

$\therefore x = -24$ ，即 $B(-24,10)$ ，则 $OF = 24$ ， $BF = 10$

$\because DE \perp x$ 轴， $BF \perp x$ 轴，

$\therefore DE \parallel BF$

$\therefore \triangle ODE \sim \triangle OBF$

$\therefore \frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OB} = \frac{DE}{BF} = \frac{1}{4}$

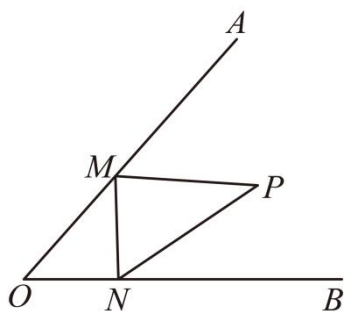
$$\therefore OE = 6, DE = 2.5$$

$$\therefore D(-6, 2.5)$$

$$\therefore k = -6 \times 2.5 = -15$$

故答案为：-15.

20. 如图，已知 $\angle AOB = 50^\circ$ ，点 P 为 $\angle AOB$ 内部一点，点 M 为射线 OA 、点 N 为射线 OB 上的两个动点，当 $\triangle PMN$ 的周长最小时，则 $\angle MPN = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 80° ## 80 度

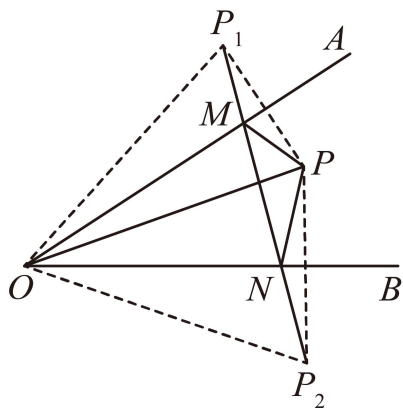
【解析】

【分析】 本题考查了轴对称 - 最短路线问题，等腰三角形的性质，三角形内角和定理的应用；作关于 OA ， OB 的对称点 P_1 ， P_2 ，连接 OP_1 ， OP_2 ，则当 M ， N 是 P_1P_2 与 OA ， OB 的交点时， $\triangle PMN$ 的周长最短，根据对称的性质可以证得： $\angle OP_1M = \angle OPM = 50^\circ$ ， $OP_1 = OP_2 = OP$ ，根据等腰三角形的性质即可求解.

【详解】 解：作 P 关于 OA ， OB 的对称点 P_1 ， P_2 ，连接 OP_1 ， OP_2 ，则当 M ， N 是 P_1P_2 与 OA ， OB 的交点时， $\triangle PMN$ 的周长最短，连接 P_1O 、 P_2O ，

$\because PP_1$ 关于 OA 对称，

$$\therefore \angle POP_1 = 2\angle MOP, OP_1 = OP, P_1M = PM, \angle OP_1M = \angle OPM$$



同理， $\angle P_2OP = 2\angle NOP$ ， $OP = OP_2$ ，

$$\therefore \angle P_1OP_2 = \angle P_1OP + \angle P_2OP = 2(\angle MOP + \angle NOP) = 2\angle AOB = 100^\circ, \quad OP_1 = OP_2 = OP,$$

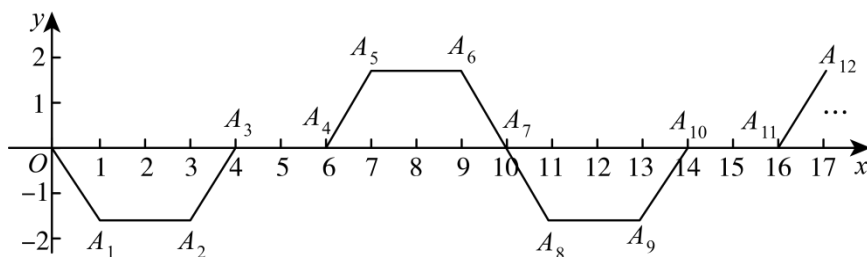
$\therefore \triangle P_1OP_2$ 是等腰三角形.

$$\therefore \angle OP_2N = \angle OP_1M = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle NPO = \angle OP_2N + \angle OP_1M = 80^\circ$$

故答案为: 80° .

21. 如图, 已知 $A_1(1, -\sqrt{3})$, $A_2(3, -\sqrt{3})$, $A_3(4, 0)$, $A_4(6, 0)$, $A_5(7, \sqrt{3})$, $A_6(9, \sqrt{3})$, $A_7(10, 0)$, $A_8(11, -\sqrt{3}) \dots$, 依此规律, 则点 A_{2024} 的坐标为_____.



【答案】 $(2891, -\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题考查了点坐标的规律探究. 解题的关键在于根据题意推导出一般性规律. 根据题意可知 7 个点坐标的纵坐标为一个循环, A_{7n} 的坐标为 $(10n, 0)$, 据此可求得 A_{2024} 的坐标.

【详解】 解: $\because A_1(1, -\sqrt{3})$, $A_2(3, -\sqrt{3})$, $A_3(4, 0)$, $A_4(6, 0)$, $A_5(7, \sqrt{3})$, $A_6(9, \sqrt{3})$, $A_7(10, 0)$, $A_8(11, -\sqrt{3}) \dots$,

$\therefore$ 可知 7 个点坐标的纵坐标为一个循环, A_{7n} 的坐标为 $(10n, 0)$, $A_{7n+1}(10n+1, -\sqrt{3})$

$$\because 2024 \div 7 = 289 \dots 1,$$

$$\therefore A_{2023} \text{ 的坐标为 } (2890, 0).$$

$$\therefore A_{2024} \text{ 的坐标为 } (2891, -\sqrt{3})$$

故答案为: $(2891, -\sqrt{3})$.

22. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 E 在直线 AD 上, 且 $DE = 2\text{cm}$, 则点 E 到矩形对角线所在直线的距离是_____ cm .

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质，解直角三角形，设 AC, BD 交于点 O ，点 E_1 在线段 AD 上， E_2 在 AD 的延长线上，过点 A 作 AC, BD 的垂线，垂足分别为 F_1, F_2, F_3 ，进而分别求得垂线段的长度，即可求解。

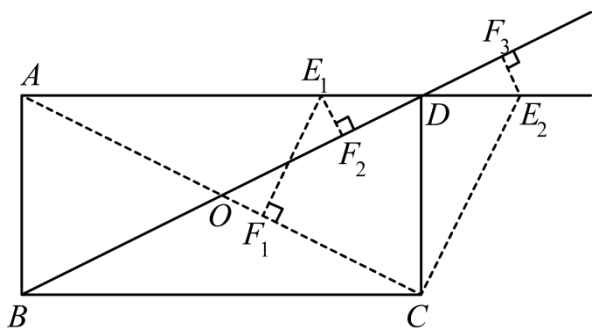
【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，

$$\therefore AD = BC = 8, \quad CD = AB = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \sin \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \angle CAD = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \tan \angle CAD = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

如图所示，设 AC, BD 交于点 O ，点 E_1 在线段 AD 上， E_2 在 AD 的延长线上，过点 A 作 AC, BD 的垂线，垂足分别为 F_1, F_2, F_3



$$\therefore AO = DO$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA$$

当 E 在线段 AD 上时，

$$\therefore AE_1 = AD - DE = 8 - 2 = 6$$

$$\text{在 Rt}\triangle AE_1F_1 \text{ 中, } E_1F_1 = AE_1 \cdot \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{5}}{5} \times 6 = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA$$

$$\text{在 Rt}\triangle E_1F_2D \text{ 中, } E_1F_2 = DE_1 \sin \angle E_1DF_2 = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

当 E 在射线 AD 上时，

$$\text{在 Rt}\triangle DCE_2 \text{ 中, } \tan \angle DCE_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DCE$$

$$\therefore \angle DCE + \angle DCA = 90^\circ$$

$$\therefore E_2C \perp AC$$

$$\therefore E_2C = \sqrt{DE_2^2 + DC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DE_2F_3 \text{ 中, } E_2F_3 = DE_2 \times \sin \angle E_2DF_3 = DE_2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

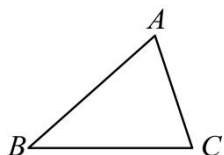
综上所述, 点 E 到对角线所在直线的距离为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $2\sqrt{5}$.

三、解答题 (本题共 6 个小题, 共 54 分)

请在答题卡上把你的答案写在所对应的题号后的指定区域内

23. 已知: $\triangle ABC$.



(1) 尺规作图: 画出 $\triangle ABC$ 的重心 G . (保留作图痕迹, 不要求写作法和证明)

(2) 在 (1) 的条件下, 连接 AG , BG . 已知 $\triangle ABG$ 的面积等于 5cm^2 , 则 $\triangle ABC$ 的面积是 _____ cm^2 .

【答案】(1) 见解析 (2) 15

【解析】

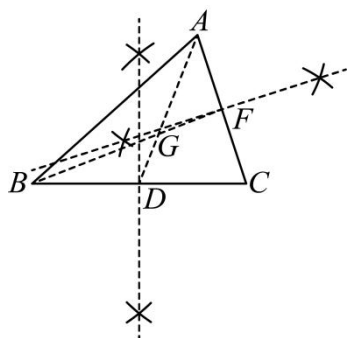
【分析】本题考查了三角形重心的性质, 画垂线;

(1) 分别作 BC, AC 的中线, 交点即为所求;

(2) 根据三角形重心的性质可得 $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{2}{3}$, 根据三角形中线的性质可得 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 15\text{cm}^2$

【小问 1 详解】

解: 作法: 如图所示



①作 BC 的垂直平分线交 BC 于点 D

②作 AC 的垂直平分线交 AC 于点 F

③连接 AD 、 BF 相交于点 G

④标出点 G ，点 G 即为所求

【小问 2 详解】

解：∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AG = \frac{2}{3} AD$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{2}{3}$$

∵ $\triangle ABG$ 的面积等于 5cm^2 ，

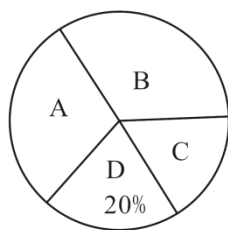
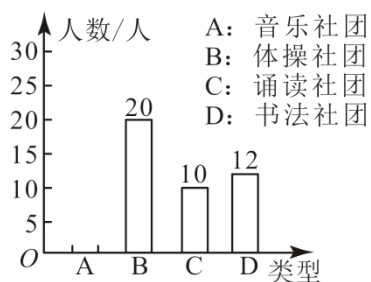
$$\therefore S_{\triangle ABD} = 7.5\text{cm}^2$$

又∵ D 是 BC 的中点，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 15\text{cm}^2$$

故答案为：15.

24. 为了落实国家“双减”政策，某中学在课后服务时间里，开展了音乐、体操、诵读、书法四项社团活动. 为了了解七年级学生对社团活动的喜爱情况，该校从七年级全体学生中随机抽取了部分学生进行“你最喜欢哪一项社团活动”的问卷调查，每人必须选择一项社团活动（且只能选择一项）. 根据调查结果，绘制成如下两幅统计图.



请根据统计图中的信息，解答下列问题：

- (1) 参加本次问卷调查的学生共有_____人.
- (2) 在扇形统计图中, A 组所占的百分比是_____, 并补全条形统计图.
- (3) 端午节前夕, 学校计划进行课后服务成果展示, 准备从这 4 个社团中随机抽取 2 个社团汇报展示. 请用树状图法或列表法, 求选中的 2 个社团恰好是 B 和 C 的概率.

【答案】(1) 60

(2) 30%, 作图见解析

(3) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了条形统计图与扇形统计图信息关联, 列表法或画树状图法求概率;

- (1) 根据 D 组的人数除以占比得出总人数;
- (2) 根据总人数求得 A 组的人数, 进而求得占比, 以及补全统计图;
- (3) 根据列表法或画树状图法求概率, 即可求解.

【小问 1 详解】

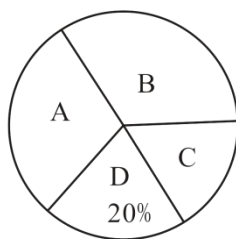
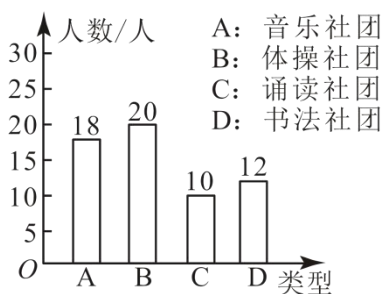
解: 参加本次问卷调查的学生共有 $12 \div 20\% = 60$ (人);

【小问 2 详解】

解: A 组人数为 $60 - 20 - 10 - 12 = 18$ 人

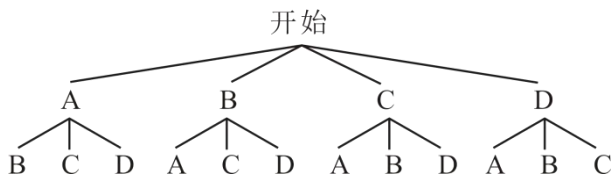
A 组所占的百分比为: $\frac{18}{60} \times 100\% = 30\%$

补全统计图如图所示,



【小问 3 详解】

画树状图法如下图



列表法如下图

	A	B	C	D
--	-----	-----	-----	-----

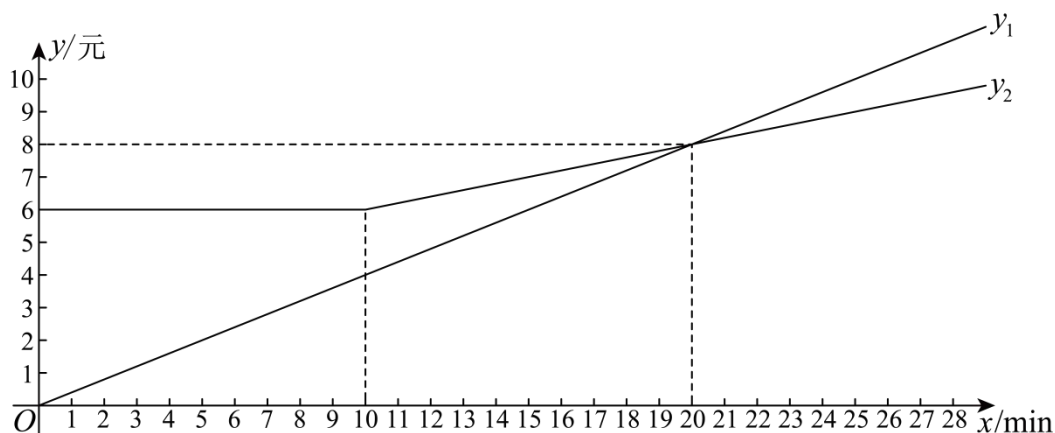
A		(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)		(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)		(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	

由树状图法或列表法可以看出共有 12 种结果出现的可能性相等，选中的 2 个社团恰好是 B 和 C 的情况有两种.

$$\therefore P(\text{选中的 2 个社团恰好是 } B \text{ 和 } C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

25. 为了响应国家提倡的“节能环保”号召，某共享电动车公司准备投入资金购买 A 、 B 两种电动车. 若购买 A 种电动车 25 辆、 B 种电动车 80 辆，需投入资金 30.5 万元；若购买 A 种电动车 60 辆、 B 种电动车 120 辆，需投入资金 48 万元. 已知这两种电动车的单价不变.

- (1) 求 A 、 B 两种电动车的单价分别是多少元？
- (2) 为适应共享电动车出行市场需求，该公司计划购买 A 、 B 两种电动车 200 辆，其中 A 种电动车的数量不多于 B 种电动车数量的一半. 当购买 A 种电动车多少辆时，所需的总费用最少，最少费用是多少元？
- (3) 该公司将购买的 A 、 B 两种电动车投放到出行市场后，发现消费者支付费用 y 元与骑行时间 x min 之间的对应关系如图. 其中 A 种电动车支付费用对应的函数为 y_1 ； B 种电动车支付费用是 10min 之内，起步价 6 元，对应的函数为 y_2 . 请根据函数图象信息解决下列问题.



①小刘每天早上需要骑行 A 种电动车或 B 种电动车去公司上班. 已知两种电动车的平均行驶速度均为 $300\text{m}/\text{min}$ (每次骑行均按平均速度行驶, 其它因素忽略不计), 小刘家到公司的距离为 8km , 那么小刘选择_____种电动车更省钱 (填写 A 或 B).

②直接写出两种电动车支付费用相差 4 元时, x 的值_____.

【答案】(1) A、B 两种电动车的单价分别为 1000 元、3500 元

(2) 当购买 A 种电动车 66 辆时所需的总费用最少, 最少费用为 535000 元

(3) ① B ② 5 或 40

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式的应用, 一次函数的应用;

(1) 设 A、B 两种电动车的单价分别为 x 元、 y 元, 根据题意列二元一次方程组, 解方程组, 即可求解;

(2) 设购买 A 种电动车 m 辆, 则购买 B 种电动车 $(200-m)$ 辆, 根据题意得出 m 的范围, 进而根据一次函数的性质, 即可求解;

(3) ①根据函数图象, 即可求解;

②分别求得 y_1, y_2 的函数解析式, 根据 $|y_2 - y_1| = 4$, 解方程, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设 A、B 两种电动车的单价分别为 x 元、 y 元

$$\text{由题意得, } \begin{cases} 25x + 80y = 305000 \\ 60x + 120y = 480000 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 1000 \\ y = 3500 \end{cases}$$

答: A、B 两种电动车的单价分别为 1000 元、3500 元

【小问 2 详解】

设购买 A 种电动车 m 辆，则购买 B 种电动车 $(200-m)$ 辆，

由题意得： $m \leq \frac{1}{2}(200-m)$

解得： $m \leq \frac{200}{3}$

设所需购买总费用为 w 元，则 $w = 1000m + 3500(200-m) = -2500m + 700000$

$\because -2500 < 0$ ， w 随着 m 的增大而减小，

$\therefore m$ 取正整数

$\therefore m = 66$ 时， w 最少

$\therefore w_{\text{最少}} = 700000 - 2500 \times 66 = 535000$ (元)

答：当购买 A 种电动车 66 辆时所需的总费用最少，最少费用为 535000 元

【小问 3 详解】

解：① $\because$ 两种电动车的平均行驶速度均为 $300\text{m}/\text{min}$ ，小刘家到公司的距离为 8km ，

$\therefore$ 所用时间为 $\frac{8000}{300} = 26\frac{2}{3}$ 分钟，

根据函数图象可得当 $x > 20$ 时， $y_2 < y_1$ 更省钱，

$\therefore$ 小刘选择 B 种电动车更省钱，

故答案为：B.

②设 $y_1 = k_1x$ ，将 $(20, 8)$ 代入得，

$$8 = 20k_1$$

解得： $k = \frac{2}{5}$

$\therefore y_1 = \frac{2}{5}x$ ；

当 $0 < x \leq 10$ 时， $y_2 = 6$ ，

当 $x > 10$ 时，设 $y_2 = k_2x + b_2$ ，将 $(10, 6)$ ， $(20, 8)$ 代入得，

$$\begin{cases} 6 = 10k_2 + b_2 \\ 8 = 20k_2 + b_2 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k_2 = \frac{1}{5} \\ b_2 = 4 \end{cases}$

$$\therefore y_2 = \frac{1}{5}x + 4$$

依题意，当 $0 < x < 10$ 时， $y_2 - y_1 = 4$

$$\text{即 } 6 - \frac{2}{5}x = 4$$

解得： $x = 5$

当 $x > 10$ 时， $|y_2 - y_1| = 4$

$$\text{即 } \left| \frac{1}{5}x + 4 - \frac{2}{5}x \right| = 4$$

解得： $x = 0$ （舍去）或 $x = 40$

故答案为： 5 或 40 .

26. 如图 1， O 是正方形 $ABCD$ 对角线上一点，以 O 为圆心， OC 长为半径的 $\odot O$ 与 AD 相切于点 E ，与 AC 相交于点 F .

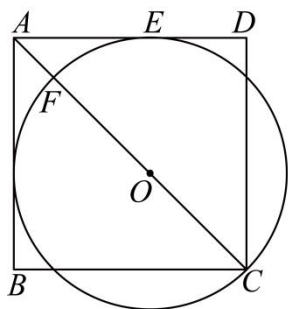


图1

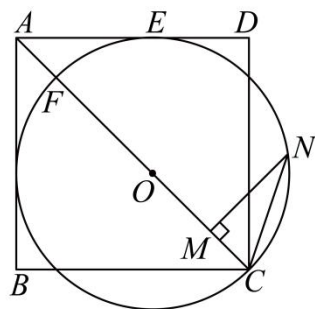


图2

(1) 求证： AB 与 $\odot O$ 相切.

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2} + 1$ ，求 $\odot O$ 的半径.

(3) 如图 2，在 (2) 的条件下，若点 M 是半径 OC 上的一个动点，过点 M 作 $MN \perp OC$ 交 $\widehat{CE}$ 于点 N . 当 $CM : FM = 1 : 4$ 时，求 CN 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $\sqrt{2}$

(3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 方法一： 连接 OE ，过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，四边形 $ABCD$ 是正方形， AC 是正方形的对角线，得出 $OE = OG$ ，进而可得 OG 为 $\odot O$ 的半径，又 $OG \perp AB$ ，即可得证；

方法二：连接 OE ，过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，根据正方形的性质证明 $\triangle AOE \cong \triangle AOG$ (AAS) 得出 $OE = OG$ ，同方法一即可得证；

方法三：过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，连接 OE ，得出四边形 $AEOG$ 为正方形，则 $OE = OG$ ，同方法一即可得证；

(2) 根据 $\odot O$ 与 AD 相切于点 E ，得出 $\angle AEO = 90^\circ$ ，由 (1) 可知 $AE = OE$ ，设 $AE = OE = OC = OF = R$ ，在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中，勾股定理得出 $AO = \sqrt{2}R$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，勾股定理求得 AC ，进而根据 $OA + OC = AC$ 建立方程，解方程，即可求解。

(3) 方法一：连接 ON ，设 $CM = k$ ，在 $\text{Rt}\triangle OMN$ 中，由勾股定理得： $MN = 2k$ ，在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中，由勾股定理得： $CN = \sqrt{5}k$ ，结合题意 $FC = 5k = 2R = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 得出 $k = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ ，即可得出 $CN = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ ；

方法二：连接 FN ，证明 $\triangle CNM \sim \triangle CFN$ 得出 $CN^2 = CM \cdot CF$ ，进而可得 $CM = \frac{1}{5}CF = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ ，同理可得 CN

方法三：连接 FN ，证明 $\triangle CNM \sim \triangle CFN$ 得出 $NC^2 = MC \cdot FC$ ，设 $CM = k$ ，则 $FC = 5k$ ，进而可得 $NC = \sqrt{5}k$ ，进而同方法一，即可求解。

【小问 1 详解】

方法一：证明：连接 OE ，过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，

$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 E ，

$\therefore OE \perp AD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， AC 是正方形的对角线，

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 45^\circ$ ，

$\therefore OE = OG$ ，

$\because OE$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OG$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\because OG \perp AB$ ，

$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切。

方法二：

证明：连接 OE ，过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，

$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 E ， $\therefore OE \perp AD$ ，

$$\therefore \angle AEO = \angle AGO = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 45^\circ,$$

又 $\because AO = AO,$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle AOG (\text{AAS}),$$

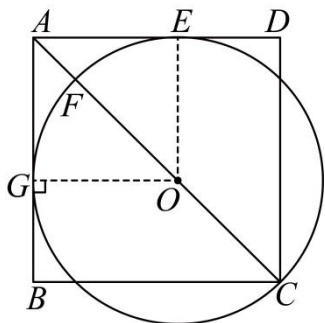
$$\therefore OE = OG,$$

$\because OE$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore OG$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\because OG \perp AB,$

$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切.



方法三:

证明: 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G , 连接 OE .

$\because AD$ 与 $\odot O$ 相切, OE 为 $\odot O$ 半径,

$$\therefore OE \perp AE,$$

$$\therefore \angle AEO = 90^\circ,$$

$\because OG \perp AB,$

$$\therefore \angle AGO = 90^\circ,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEOG$ 为矩形,

又 $\because AC$ 为正方形的对角线,

$$\therefore \angle EAO = \angle GAO = \angle AOE = 45^\circ,$$

$$\therefore OE = AE,$$

$\therefore$ 矩形 $AEOG$ 为正方形,

$$\therefore OE = OG.$$

又 $\because OE$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore OG$ 为 $\odot O$ 的半径,

又 $\because OG \perp AB$,

$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切.

【小问2详解】

解: $\because AC$ 为正方形 $ABCD$ 的对角线,

$\therefore \angle DAC = 45^\circ$,

$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 E ,

$\therefore \angle AEO = 90^\circ$,

$\therefore$ 由(1)可知 $AE = OE$, 设 $AE = OE = OC = OF = R$,

在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中,

$$\because AE^2 + EO^2 = AO^2,$$

$$\therefore AO^2 = R^2 + R^2,$$

$$\because R > 0, \therefore AO = \sqrt{2}R,$$

又 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}+1$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中,

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1),$$

$$\because OA + OC = AC,$$

$$\therefore \sqrt{2}R + R = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1),$$

$$\therefore R = \sqrt{2}.$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$.

【小问3详解】

方法一:

解: 连接 ON , 设 $CM = k$,

$$\because CM : FM = 1 : 4,$$

$$\therefore CF = 5k,$$

$$\therefore OC = ON = 2.5k,$$

$$\therefore OM = OC - CM = 1.5k.$$

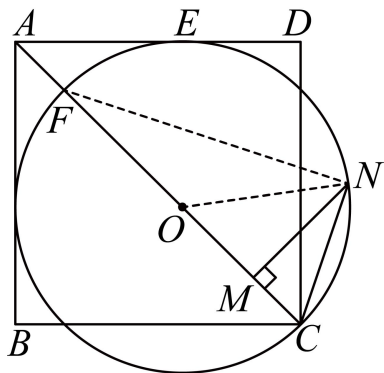
在 $\text{Rt}\triangle OMN$ 中，由勾股定理得： $MN = 2k$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中，由勾股定理得： $CN = \sqrt{5}k$ ，

又 $\because FC = 5k = 2R = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore k = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

$$\therefore CN = \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$



方法二：

解：连接 FN ，

$\because CF$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle CNF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FNM + \angle CNM = 90^\circ,$$

$\because MN \perp AC$ ，

$$\therefore \angle NFM + \angle FNM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NFM = \angle CNM,$$

$$\because \angle NCM = \angle FCN,$$

$$\therefore \triangle CNM \sim \triangle CFN,$$

$$\therefore CN^2 = CM \cdot CF,$$

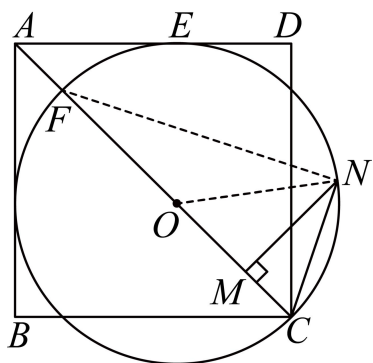
$$\because CM : FM = 1 : 4, \quad CF = 5CM,$$

$$\therefore CN = \sqrt{5}CM,$$

$$\because CF = 2R = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CM = \frac{1}{5}CF = \frac{2\sqrt{2}}{5},$$

$$\therefore CN = \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$



方法三：

解：连接 FN ，

$\because CF$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle CNF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FNM + \angle CNM = 90^\circ,$$

$\because MN \perp AC$ ，

$$\therefore \angle NFM + \angle FNM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NFM = \angle CNM,$$

$$\because \angle NCM = \angle FCN,$$

$$\therefore \triangle CNM \sim \triangle CFN,$$

$$\therefore \frac{NC}{MC} = \frac{FC}{NC},$$

$$\therefore NC^2 = MC \cdot FC,$$

$$\because CM : FM = 1 : 4,$$

$$\therefore CM : FC = 1 : 5,$$

设 $CM = k$ ，则 $FC = 5k$ ，

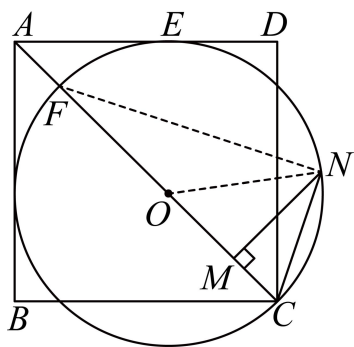
$$\therefore NC^2 = k \times 5k,$$

$$\therefore NC = \sqrt{5}k.$$

$$\text{又} \because FC = 5k = 2R = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore k = \frac{2\sqrt{2}}{5},$$

$$\therefore CN = \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$



【点睛】本题考查了切线的性质与判定，正方形的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理，垂径定理，相似三角形的性质与判定，正确的添加辅助线是解题的关键.

27. 综合与实践

问题情境

在一次综合与实践课上，老师让同学们以两个全等的等腰直角三角形纸片为操作对象.

纸片 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 满足 $\angle ACB = \angle EDF = 90^\circ$ ， $AC = BC = DF = DE = 2\text{cm}$.

下面是创新小组的探究过程.

操作发现

(1) 如图 1，取 AB 的中点 O ，将两张纸片放置在同一平面内，使点 O 与点 F 重合. 当旋转 $\triangle DEF$ 纸片交 AC 边于点 H 、交 BC 边于点 G 时，设 $AH = x$ ($1 < x < 2$)， $BG = y$ ，请你探究出 y 与 x 的函数关系式，并写出解答过程.

问题解决

(2) 如图 2，在 (1) 的条件下连接 GH ，发现 $\triangle CGH$ 的周长是一个定值. 请你写出这个定值，并说明理由.

拓展延伸

(3) 如图 3，当点 F 在 AB 边上运动 (不包括端点 A 、 B)，且始终保持 $\angle AFE = 60^\circ$. 请你直接写出 $\triangle DEF$ 纸片的斜边 EF 与 $\triangle ABC$ 纸片的直角边所夹锐角的正切值_____ (结果保留根号).

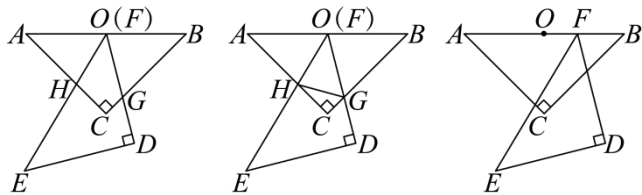


图1

图2

图3

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$ ($1 < x < 2$)，见解析；(2) 2，见解析；(3) $2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意证明 $\triangle AFH \sim \triangle BGF$ ，得出关系式 $AH \cdot BG = AF \cdot BF$ ，进而求得 $AB = 2\sqrt{2}$, $AF = BC = \sqrt{2}$ ，代入比例式，即可求解；

(2) 方法一：勾股定理求得 GH ，将 (1) 中 $xy = 2$ 代入得 $GH = x + y - 2$ ，进而根据三角形的周长公式，即可求解；

方法二：证明 $\triangle AOH \sim \triangle BGO$ ， $\triangle HAO \sim \triangle HOG$ ，过 O 作 $OM \perp AH$ 交 AH 于点 M ，作 $OP \perp HG$ 交 HG 于点 P ，作 $ON \perp GB$ 交 GB 于点 N 。证明 $\triangle OMH \cong \triangle OPH$ ， $\triangle OPG \cong \triangle ONG$ ，得出

$HG = MH + GN$ ，得出 $CM = CN = \frac{1}{2}BC = 1$ ，进而根据三角形的周长公式可得 $\triangle CHG$ 的周长 $= CM + CN = 2CM = 2 \times 1 = 2$ 。

方法三：过 O 作 $OM \perp AH$ 交 AH 于点 M ，作 $ON \perp GB$ 交 GB 于点 N ，在 NB 上截取一点 Q ，使 $NQ = MH$ ，连接 OC 。得出 $\triangle OMH \cong \triangle ONQ$ ， $\triangle OHG \cong \triangle OQG$ ，则 $HG = GQ = GN + MH$ ，同方法二求得 $CM = CN = \frac{1}{2}BC = 1$ ，进而即可求解；

(3) 分两种情况讨论， EF 于 AC, BC 的夹角；①过点 F 作 $FN \perp AC$ 于点 N ，作 FH 的垂直平分线交 FN 于点 M ，连接 MH ，在 $\text{Rt}\triangle MNH$ 中，设 $NH = k$ ，由勾股定理得， $FN = MN + MF = (2 + \sqrt{3})k$ ，进而根据正确的定义，即可求解；②过点 F 作 $FN \perp BC$ 于点 N ，作 FG 的垂直平分线交 BG 于点 M ，连接 FM ，在 $\text{Rt}\triangle FNM$ 中，设 $FN = k$ ，同①即可求解。

【详解】操作发现

解：(1) $\because \angle ACB = \angle EDF = 90^\circ$ ，且 $AC = BC = DF = DE = 2\text{cm}$ 。

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle DFE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH + \angle BFG = \angle BFG + \angle FGB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH = \angle FGB,$$

$$\therefore \triangle AFH \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{AF}{BG} = \frac{AH}{BF},$$

$$\therefore AH \cdot BG = AF \cdot BF.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $AC = BC = 2$ ，

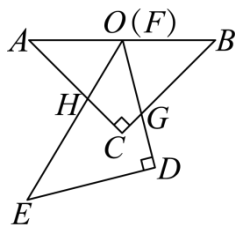
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$\therefore O$ 是 AB 的中点，点 O 与点 F 重合，

$$\therefore AF = BF = \sqrt{2},$$

$$\therefore xy = \sqrt{2} \times \sqrt{2},$$

$$\therefore y = \frac{2}{x} (1 < x < 2).$$



问题解决

(2) 方法一:

解: $\triangle CGH$ 的周长定值为 2.

理由如下: $\because AC = BC = 2, AH = x, BG = y,$

$$\therefore CH = 2 - x, CG = 2 - y,$$

$$\text{在 Rt}\triangle HCG \text{ 中, } \therefore GH = \sqrt{CH^2 + CG^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 4(x+y) + 8} = \sqrt{(x+y)^2 - 2xy - 4(x+y) + 8}.$$

将 (1) 中 $xy = 2$ 代入得:

$$\therefore GH = \sqrt{(x+y)^2 - 4(x+y) + 4} = \sqrt{(x+y-2)^2} = |x+y-2|.$$

$$\because (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 4 \geq 4, \text{ 又 } \because 1 < x < 2,$$

$$\therefore x+y > 2,$$

$$\therefore GH = x+y-2.$$

$$\therefore \triangle CHG \text{ 的周长} = CH + CG + GH,$$

$$\therefore \triangle CHG \text{ 的周长} = 2-x+2-y+x+y-2=2.$$

方法二:

解: $\triangle CGH$ 的周长定值为 2.

理由如下: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle E = \angle EOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOH + \angle BOG + \angle EOD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOH + \angle BOG = 135^\circ,$$

在 $\triangle AOH$ 中, $\angle A = 45^\circ$,

$$\therefore \angle AOH + \angle AHO = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AHO = \angle BOG,$$

$$\therefore \triangle AOH \sim \triangle BGO,$$

$$\therefore \frac{AO}{BG} = \frac{OH}{OG} = \frac{AH}{OB}, \quad \angle AOH = \angle OGB, \quad \angle AHO = \angle BOG,$$

$\therefore O$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AO = BO,$$

$$\therefore \frac{OH}{OG} = \frac{AH}{AO},$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle EOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle HAO \sim \triangle HOG,$$

$$\angle AHO = \angle OHG, \quad \angle OGB = \angle OGH,$$

$\therefore$ 过 O 作 $OM \perp AH$ 交 AH 于点 M , 作 $OP \perp HG$ 交 HG 于点 P , 作 $ON \perp GB$ 交 GB 于点 N .

$$\therefore OM = OP = ON.$$

$$\text{又} \because OH = OH, \quad OG = OG,$$

$$\therefore \triangle OMH \cong \triangle OPH, \quad \triangle OPG \cong \triangle ONG,$$

$$\therefore HM = PH, \quad PG = NG,$$

$$\therefore HG = MH + GN.$$

$$\therefore \triangle CHG \text{ 的周长} = CH + CG + GH = CH + CG + MH + GN = CM + CN.$$

$$\text{又} \because AO = OB, \quad OM = ON, \quad \angle A = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON,$$

$$\therefore AM = BN,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \quad \angle AMO = 90^\circ,$$

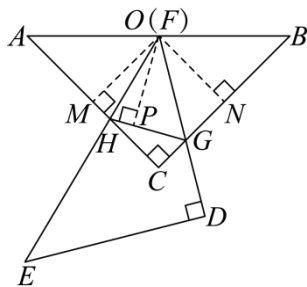
$$\therefore OM \parallel BC,$$

$\therefore O$ 是 AB 的中点,

$\therefore$ 点 M 是 AC 的中点, 同理点 N 是 BC 的中点.

$$\therefore CM = CN = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore \triangle CHG \text{ 的周长} = CM + CN = 2CM = 2 \times 1 = 2.$$



方法三：

解： $\triangle CGH$ 的周长定值为 2.

理由如下：过 O 作 $OM \perp AH$ 交 AH 于点 M ，作 $ON \perp GB$ 交 GB 于点 N ，在 NB 上截取一点 Q ，使 $NQ = MH$ ，连接 OC 。

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， O 为 AB 的中点，

$\therefore OC$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore OM = ON$ ，

$\therefore \triangle OMH \cong \triangle ONQ$ ，

$\therefore OH = OQ$ ， $\angle MOH = \angle NOQ$ 。

$\because \angle HOG = 45^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MON = 90^\circ$ ， $\angle MOH + \angle GON = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GOQ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle HOG = \angle GOQ$ ，

$\because OG = OG$ ，

$\therefore \triangle OHG \cong \triangle OQG$ ，

$\therefore HG = GQ = GN + MH$ ，

$\therefore \triangle CHG$ 的周长 $= CH + CG + GH = CH + CG + MH + GN = CM + CN$ 。

又 $\because AO = OB$ ， $OM = ON$ ， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON$ ，

$\therefore AM = BN$ 。

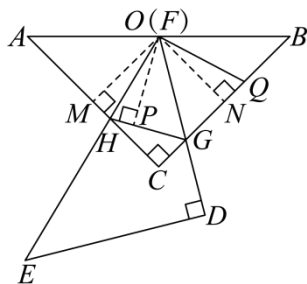
$\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle AMO = 90^\circ$ ，

$\therefore OM \parallel BC$ 。

$\because O$ 是 AB 的中点， $\therefore$ 点 M 是 AC 的中点，同理点 N 是 BC 的中点。

$$\therefore CM = CN = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore \triangle CHG \text{ 的周长} = CM + CN = 2CM = 2 \times 1 = 2.$$



拓展延伸

$$(3) \quad 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } 2 - \sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} \text{解: } \because \angle AFE = 60^\circ, \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AHF = 75^\circ,$$

过点 F 作 $FN \perp AC$ 于点 N , 作 FH 的垂直平分线交 FN 于点 M , 连接 MH ,

$$\therefore FM = MH,$$

$$\because \angle FNH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NFH = 15^\circ,$$

$$\therefore FM = MH,$$

$$\therefore \angle NFH = \angle MHF = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle NMH = 30^\circ,$$

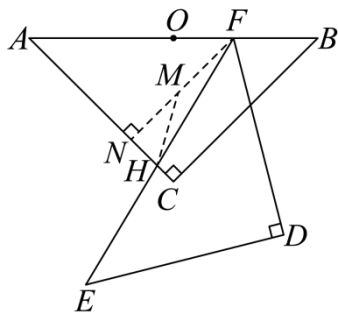
在 $\text{Rt}\triangle MNH$ 中, 设 $NH = k$,

$$\therefore MH = MF = 2k, \text{ 由勾股定理得,}$$

$$MN = \sqrt{3}NH = \sqrt{3}k,$$

$$\therefore FN = MN + MF = (2 + \sqrt{3})k,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle FNH \text{ 中, } \tan \angle FHN = \tan 75^\circ = \frac{FN}{NH} = \frac{(2 + \sqrt{3})k}{k} = 2 + \sqrt{3}.$$



$\tan \angle BCP = \frac{1}{6} \tan \angle ACB$. 若存在, 请求出满足条件的所有点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由. (提示: 依题意补全图形, 并解答)

(3) 将该抛物线向左平移 2 个单位长度得到 $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ($a_1 \neq 0$), 平移后的抛物线与原抛物线相交于点 D , 点 E 为原抛物线对称轴上的一点, F 是平面直角坐标系内的一点, 当以点 B 、 D 、 E 、 F 为顶点的四边形是菱形时, 请直接写出点 F 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 4x + 1$

(2) 存在, 点 P 坐标为 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, 补图见解析

(3) $F_1(-1, 3)$ 、 $F_2(3, 4 - \sqrt{6})$ 、 $F_3(3, 4 + \sqrt{6})$ 、 $F_4(1, -2)$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2) 根据平行线的性质可得 $y_c = 1 = -x^2 + 4x + 1$, 求得 $C(4, 1)$, 进而分别求得 $A(3, 4)$, $Q(3, 1)$, 根据 $\tan \angle BCP = \frac{1}{6} \tan \angle ACB$ 可得 $\tan \angle BCP = \frac{1}{2}$, 设直线 CP 交 y 轴于点 M , 则 $M_1(0, 3)$, $M_2(0, -1)$. 进而可得 CM_1 , CM_2 的解析式为 $y_{CM_1} = -\frac{1}{2}x + 3$, $y_{CM_2} = \frac{1}{2}x - 1$, 连接 CM_1 交抛物线于 P_1 , 连接 CM_2 交抛物线于 P_2 , 进而联立抛物线与直线解析式, 解方程, 即可求解.

(3) ①以 BD 为对角线, 如图作 BD 的垂直平分线 ME_1 交 BD 于点 M 交直线 $x = 2$ 于 E_1 , 设 $E_1(2, y)$, 根据两点距离公式可得 $y = 2$, 根据中点坐标公式可得 $F_1(-1, 3)$, ②以 BD 为边, 如图以 B 为圆心, BD 为半径画圆交直线 $x = 2$ 于点 E_2 , E_3 ; 连接 BE_2 , BE_3 , 根据勾股定理求得 BD, BE_2 , 进而得出 $E_2(2, 1 - \sqrt{6})$, $E_3(2, 1 + \sqrt{6})$, 根据平移的性质得出 $F_2(3, 4 - \sqrt{6})$, $F_3(3, 4 + \sqrt{6})$, ③以 BD 为边, 如图以点 D 为圆心, BD 长为半径画圆交直线 $x = 2$ 于点 E_4 和 E_5 , 连接 DE_4 , DE_5 , 则 $DE_4 = DE_5 = BD = \sqrt{10}$, 过点 D 作 $DH \perp E_4E_5$ 于点 H , 则 $DH = 1$, 在 $Rt\triangle DHE_4$ 和 $Rt\triangle DHE_5$ 中, 由勾股定理得 $HE_4 = HE_5 = 3$, 则 $E_4(2, 1)$ 、 $E_5(2, 7)$, 根据 $\tan \angle DBE_4 = \tan \angle E_5DH = 3$, 可得 $\angle DBE_4 = \angle E_5DH$, 过点 B 作 $BF_4 \parallel DE_4$, 过 E_4 作 $E_4F_4 \parallel BD$, BF_4 和 E_4F_4 相交于点 F_4 , BE_4 的中点 $G(1, 1)$. 根据中点坐标公式可得 $F_4(1, -2)$;

【小问 1 详解】

解: $\because$ 把点 $A(3, 4)$, $B(0, 1)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} -9+3b+c=4 \\ c=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=4 \\ c=1 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x + 1.$$

【小问2详解】

存在.

理由: $\because BC \parallel x$ 轴且 $B(0,1)$,

$$\therefore y_c = 1 = -x^2 + 4x + 1,$$

$$\therefore x_1 = 0 \text{ (舍去)}, \quad x_2 = 4,$$

$$\therefore C(4,1).$$

过点A作 $AQ \perp BC$ 于点Q,

在 $\text{Rt}\triangle ACQ$ 中,

$$\because A(3,4),$$

$$\therefore Q(3,1),$$

$$\therefore \tan \angle BCP = \frac{1}{6} \tan \angle ACB,$$

$$\therefore \tan \angle BCP = \frac{1}{6} \times \frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}.$$

设直线CP交y轴于点M,

$$\because BC = 4, \quad \angle CBM = 90^\circ,$$

$$\therefore M_1(0,3), \quad M_2(0,-1).$$

连接 CM_1 交抛物线于 P_1 , 连接 CM_2 交抛物线于 P_2 ,

$$\therefore CM_1, CM_2 \text{ 的解析式为 } y_{CM_1} = -\frac{1}{2}x + 3, \quad y_{CM_2} = \frac{1}{2}x - 1,$$

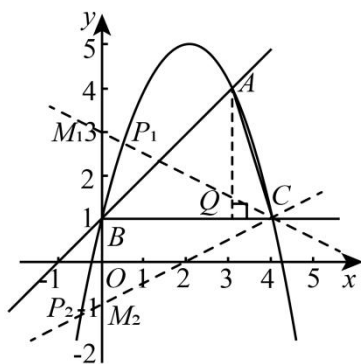
$$\therefore \begin{cases} y_{CM_1} = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -x^2 + 4x + 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 4 \text{ (舍去)} \end{cases},$$

$$\text{或} \begin{cases} y_{CM_2} = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -x^2 + 4x + 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = 4 (\text{舍去}) \end{cases}.$$

$$\therefore \text{把 } x_1 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2} \text{ 代入 } y = -x^2 + 4x + 1 \text{ 得 } y_1 = \frac{11}{4}, y_3 = -\frac{5}{4},$$

$$\therefore P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right).$$

综上所述，满足条件的点 P 坐标为 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.



【小问 3 详解】

$$F_1(-1, 3), F_2(3, 4 - \sqrt{6}), F_3(3, 4 + \sqrt{6}), F_4(1, -2).$$

方法一：

①以 BD 为对角线，如图作 BD 的垂直平分线 ME_1 交 BD 于点 M 交直线 $x = 2$ 于 E_1

$$\therefore B(0, 1), D(1, 4),$$

$$\therefore M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

$$\text{设 } E_1(2, y),$$

$$\therefore DE_1 = BE_1,$$

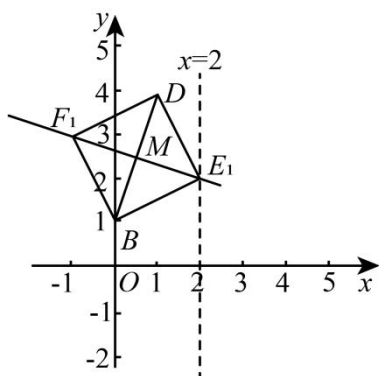
$$\therefore 1^2 + (4 - y)^2 = 2^2 + (y - 1)^2,$$

$$\therefore y = 2,$$

$$\therefore E_1(2, 2),$$

$\therefore M$ 是 E_1F_1 的中点，

$$\therefore F_1(-1, 3).$$



②以 BD 为边

如图以 B 为圆心， BD 为半径画圆交直线 $x=2$ 于点 E_2 ， E_3 ；连接 BE_2 ， BE_3 ，

过点 D 作 $DF_2 \parallel BE_2$ ，过点 E_2 作 $E_2F_2 \parallel BD$ ， DF_2 和 E_2F_2 相交于点 F_2 ，同理可得 F_3

$$\because B(0,1), D(1,4),$$

$$\therefore BD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore BE_2 = BE_3 = \sqrt{10}.$$

$\therefore$ 过点 B 作 $BN \perp$ 直线 $x=2$ 于点 N ，则 $BN=2$ ；

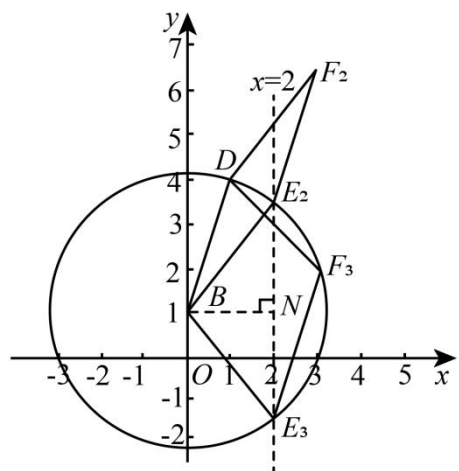
在 $\text{Rt}\triangle BNE_2$ 和 $\text{Rt}\triangle BNE_3$ 中，由勾股定理得，

$$E_2N = E_3N = \sqrt{6},$$

$$\therefore E_2(2, 1-\sqrt{6}), E_3(2, 1+\sqrt{6}).$$

$\therefore$ 点 F 是由点 E 向右平移1个单位长度，再向上平移3个单位长度得到的，

$$\therefore F_2(3, 4-\sqrt{6}), F_3(3, 4+\sqrt{6}),$$



③以 BD 为边

如图以点 D 为圆心， BD 长为半径画圆交直线 $x=2$ 于点 E_4 和 E_5 ，

连接 DE_4 ， DE_5 ，则 $DE_4 = DE_5 = BD = \sqrt{10}$ ，

过点 D 作 $DH \perp E_4E_5$ 于点 H ，则 $DH=1$ ，在 $\text{Rt}\triangle DHE_4$ 和 $\text{Rt}\triangle DHE_5$ 中，由勾股定理得，

$$\therefore HE_4 = HE_5 = 3,$$

$$\therefore E_4(2,1)、E_5(2,7),$$

$$\therefore \tan \angle DBE_4 = \tan \angle E_5DH = 3,$$

$$\therefore \angle DBE_4 = \angle E_5DH,$$

$$\therefore B、D、E_5 \text{ 三点共线},$$

$$\therefore \text{过点 } B \text{ 作 } BF_4 \parallel DE_4, \text{ 过 } E_4 \text{ 作 } E_4F_4 \parallel BD,$$

$$BF_4 \text{ 和 } E_4F_4 \text{ 相交于点 } F_4,$$

$$\therefore B(0,1)、E_4(2,1),$$

$$\therefore BE_4 \text{ 的中点 } G(1,1).$$

$$\therefore D(1,4), \text{ 点 } G \text{ 为 } DF_4 \text{ 的中点},$$

$$\therefore F_4(1,-2).$$

综上所述： $F_1(-1,3)$ 、 $F_2(3,4-\sqrt{6})$ 、 $F_3(3,4+\sqrt{6})$ 、 $F_4(1,-2)$ 。

